# Esercizi CLEF – parte di matematica generale

# Esercizi sulla formula di Taylor

Scrivere la formula di Taylor arrestata al primo ed al secondo ordine della funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $x^0$ essendo:

$f(x_1, x_2) = x_1^2 \ln(x_2),$ $\qquad\qquad x^0 = (-1,1)$

Sol: $\quad f(x_1, x_2) = x_2 - 1 + R_1(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = x_2 - 1 - \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 - 1) + R_2(x_1, x_2)$$

- Trovare una stima del valore assunto dalla funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $(-0.9,1.1)$

Sol: $\quad f(-0.9,1.1) \cong 0.075$

# Esercizi sulla formula di Taylor

Scrivere la formula di Taylor arrestata al primo ed al secondo ordine della funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $x^0$ essendo:

$$f(x_1, x_2) = x_2\, e^{x_1-2} + x_1 x_2^2, \qquad x^0 = (2,1)$$

Sol: $f(x_1, x_2) = 3 + 2(x_1 - 2) + 5(x_2 - 1) + R_1(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = -6 + 2x_1 + 5x_2 + \frac{1}{2}[(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 6(x_1 - 2)(x_2 - 1)] + R_2(x_1, x_2)$$

- Trovare una stima del valore assunto dalla funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $(2.1,0.9)$

Sol: $f(2.1,0.9) \cong 2.695$

# Esercizi sulla formula di Taylor

Scrivere la formula di Taylor arrestata al primo ed al secondo ordine della funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $x^0$ essendo:

$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1}$, $\qquad x^0 = (1, -2)$

Sol: $\quad f(x_1, x_2) = -2 + 2(x_1 - 1) + 1(x_2 + 2) + R_1(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = -2 + 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}[-4(x_1 - 1)^2 - 2(x_1 - 1)(x_2 + 2)] + R_2(x_1, x_2)$$

# Esercizi sulla formula di Taylor

Scrivere la formula di Taylor arrestata al primo ed al secondo ordine della funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $x^0$ essendo:

$f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 - x_2}, \qquad\qquad x^0 = (2, 3)$

Sol: $f(x_1, x_2) = 1 + 1(x_1 - 2) - \frac{1}{2}(x_2 - 3) + R_1(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\left[-(x_1 - 2)^2 - \frac{1}{4}(x_2 - 3)^2 + (x_1 - 2)(x_2 - 3)\right] + R_2(x_1, x_2)$$

# Esercizi sulla formula di Taylor

Scrivere la formula di Taylor arrestata al primo ed al secondo ordine della funzione $f(x_1, x_2)$ nel punto $x^0$ essendo:

$f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2} - x_1^2 x_2$ $\qquad\qquad x^0 = (2, -2)$

Sol: $\quad f(x_1, x_2) = -15 + 9x_1 - 3x_2 + R_1(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = -15 + 9x_1 - 3x_2 + \frac{5}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 2)^2 - 3(x_1 - 2)(x_2 + 2) + R_2(x_1, x_2)$$

# Segno di una forma quadratica

**5.3.1** Studiare la tipologia della forma quadratica associata alle seguenti matrici simmetriche: a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

**5.3.2** Determinare per quali valori di $a$, $b$, $c$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ è: a) definita o semidefinita positiva; b) definita o semidefinita negativa; c) indefinita.

**5.3.3** Studiare la tipologia della forma quadratica associata alle seguenti matrici simmetriche: a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

**5.3.4** Stabilire, al variare del parametro $k$, la tipologia delle seguenti forme quadratiche: a) $Q(x_1, x_2) = (k-2)x_1^2 + kx_2^2$; b) $Q(x_1, x_2) = kx_1^2 + 2kx_1x_2 + 4x_2^2$.

**5.3.5** Stabilire, al variare del parametro $k$, la tipologia della forma quadratica $Q(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + (2k+2)x_2^2 + (k+2)x_3^2 + 2kx_1x_2 - 2(k+2)x_2x_3$.

**5.3.6** Stabilire, al variare del parametro $k$, la tipologia della forma quadratica $Q(x_1, x_2, x_3) = (1+k)x_1^2 + kx_2^2 + kx_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

**5.3.1** a) indefinita; b) definita positiva; c) semidefinita negativa.

**5.3.2** a) $A$ è definita positiva quando i minori principali di guida di ordine 1 e 2 sono positivi ovvero quando $a_{11} = a > 0$ e $|A| = ac - b^2 > 0$.
$A$ è semidefinita positiva quando i minori principali di ordine 1 e 2 sono non negativi ovvero quando $a_{11} = a \geq 0$, $a_{22} = c \geq 0$ e $|A| = ac - b^2 \geq 0$.
b) $A$ è definita negativa quando il minore principale di guida di ordine 1 è negativo e quello di ordine 2 è positivo ovvero quando $a_{11} = a < 0$ e $|A| = ac - b^2 > 0$.
$A$ è semidefinita negativa quando i minori principali di ordine 1 sono non positivi e quello di ordine 2 è non negativo ovvero quando $a_{11} = a \leq 0$, $a_{22} = c \leq 0$ e $|A| = ac - b^2 \geq 0$.
c) $A$ è indefinita quando non è definita o semidefinita e quindi quando $a$ e $c$ sono discordi in segno oppure quando $|A| < 0$.

**5.3.3** a) $A$ è definita positiva. b) $A$ è definita negativa.

**5.3.4** a) La forma quadratica è: definita positiva per $k > 2$, semidefinita positiva per $k \geq 2$, definita negativa per $k < 0$, semidefinita negativa per $k \leq 0$, indefinita in ogni altro caso, ovvero per $0 < k < 2$.
b) La forma quadratica è: definita positiva per $0 < k < 4$, semidefinita positiva per $0 \leq k \leq 4$, indefinita in ogni altro caso, ovvero per $k < 0$ e per $k > 4$.

**5.3.5** Si ha $A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & 2k+2 & -k-2 \\ 0 & -k-2 & k+2 \end{bmatrix}$. Poiché risulta $|A| = 0\ \forall k$, $A$ non è definita positiva; $A$ è semidefinita positiva per $k \geq 0$; $A$ è semidefinita negativa per $k \leq -2$, $A$; $A$ è indefinita in ogni altro caso, ovvero per $-2 < k < 0$.

**5.3.6** Si ha $A = \begin{bmatrix} 1+k & k & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$. $A$ è: definita positiva per $k > 1$, semidefinita positiva per $k \geq 1$, indefinita in ogni altro caso, ovvero per $k < 1$.