- legame derivabilità parziale / continuità ✓

- DERIVATE PARZIALI SECONDE

- FUNZIONE DI CLASSE C^K

- TEOREMA SCHWARZ

- HESSIANA

DIFFERENZIABILITÀ
- DERIVABILITÀ PARZIALE ✓
- CONTINUITÀ ✓

DIFFERENZIALE SECONDO ✓

POLINOMIO TAYLOR

esempio F CONTINUA MA NON DERIVAB PARZ

CONTINUA $\not\Rightarrow$ DERIV. PARZ

$\not\Leftarrow$

es: funzione derivabile parzialmente ma non continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE

AL 1° :

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A insieme aperto, supponiamo che

f ammetta derivate parziali 1^e rispetto a ogni

variabile $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$

queste a loro volta sono $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quindi

ANDIAMO A RIDERIVARE $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$

allora la derivata parziale seconda di f rispetto a x_i 2 volte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \underline{x_i + h}, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2 \dots x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_i, \underline{x_j + h}, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_n)}{h}$$

se $\exists$ finito il limite $f_{x_i x_j}$ $f_{x_i x_i}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & f(x,y) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \dfrac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & & \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "\text{TEOREMA DI SCHWARZ}"'] & & \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}
\end{tikzcd}$$

MATRICE HESSIANA :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\
\hline
x_1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\
x_2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
x_m & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}
\end{array}
$$

FUNZIONE DERIVABILE CON CONTINUITÀ

f DI CLASSE C^{k}

- f è continua — C^1
- f è derivabile parzialmente — C^2
- deriv parz sono continue — C^k

C^{2} continua con derivate parz continue fino all'ordine 2

TEOREMA DI SCHWARZ:

se la f è di classe $C^2(A)$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

allora $\forall x \in A \quad \forall i, j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

matrice Hessiana è simmetrica

$$f(x,y) = e^{x+y} \cdot x + x^4 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} x + e^{x+y} + 4x^3 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{x+y} + x^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y} x + e^{x+y} + e^{x+y} + 12x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x e^{x+y} + e^{x+y} + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x+y} + x e^{x+y} + 4x^3$$

$$H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & \qquad\qquad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} e^{x+y}x + 2e^{x+y} + 12x^2 y & \boxed{e^{x+y} + xe^{x+y} + 4x^3} \\ \boxed{e^{x+y} + xe^{x+y} + 4x^3} & xe^{x+y} \end{bmatrix} \end{array}$$

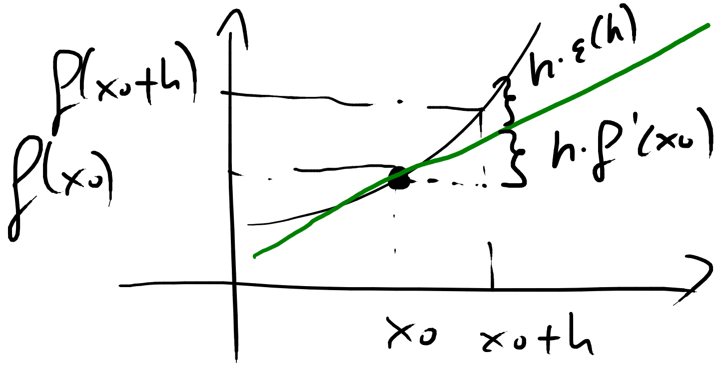
matrice H è simmetrica

FUNZIONE DIFFERENZIABILE (1 VARIABILE)

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A aperto, $x_0 \in A$,

f si dice <u>DIFFERENZIABILE in x_0</u> se è incremento subito da f nel passare da x_0 a x_0+h lo posso scrivere :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \overbrace{h \cdot f'(x_0)}^{\text{DIFFERENZIALE}} + \overbrace{h \cdot \varepsilon(h)}^{\text{ERRORE}}$$



$\varepsilon(h) \to 0$
per $h \to 0$

PER F A 1 VARIABILE:

se f è DIFFERENZIABILE in x_0 $\rightarrow$ DERIVABILE in x_0

se f DERIVABILE in x_0 $\rightarrow$ DIFFERENZIABILE in x_0

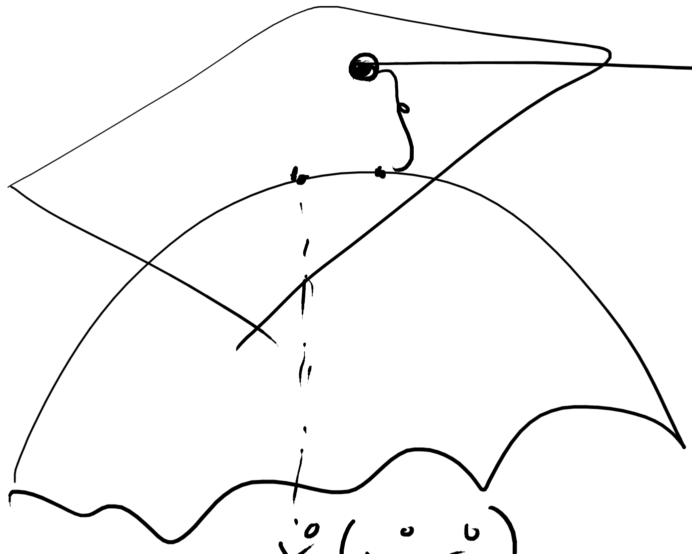
PER FUNZIONE A n VARIABILI:

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f è DIFFERENZIABILE in $x^0 \in A$ se l'incremento della funzione lo posso scrivere come:

$$\underbrace{f(x^0+h) - f(x^0)} = \underbrace{h^T \cdot \nabla f(x^0)}_{\text{DIFFERENZIALE}} + \|h\| \cdot \overbrace{\varepsilon(h)}^{\text{RESTO}}$$

$\varepsilon(h) \to 0$ per $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0+h) - f(x^0) - h^T \nabla f(x_0)}{\|h\|} = \varepsilon(h) \to 0$$



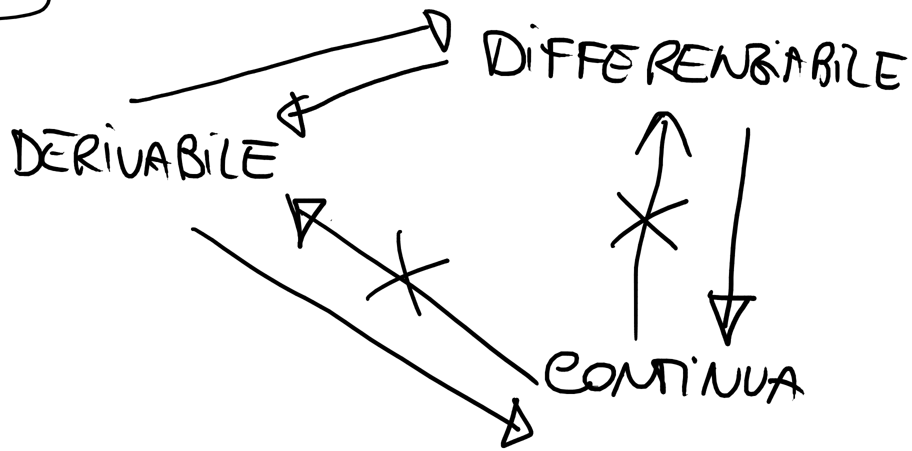
$x^0 = (x_1^0, x_2^0)$

$$h \cdot Df(x^0)$$

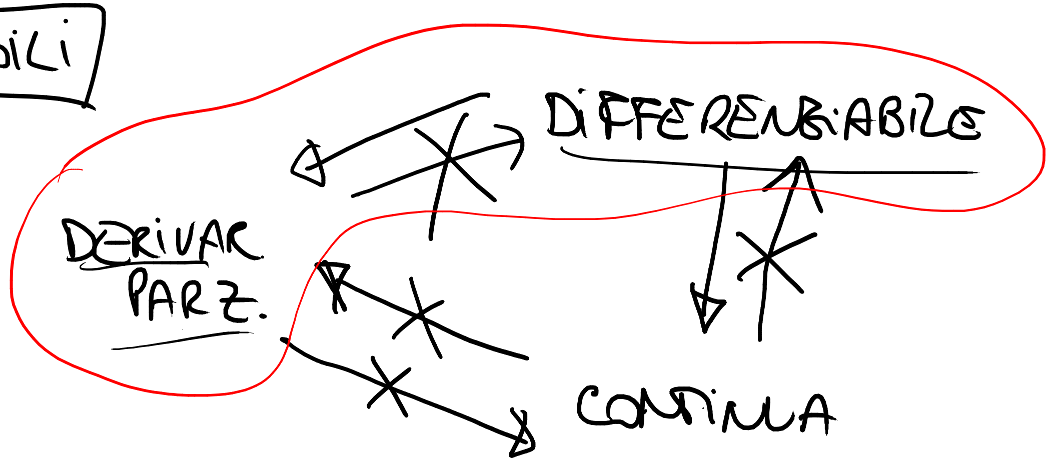
$$[\Delta x_1, \Delta x_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$[x_1 - x_1^0] \; [x_2 - x_2^0] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \end{bmatrix}$$

1 VARIABILE



+ VARIABILI



1 TEOREMA :

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x^0 \in A$

allora f è continua in x^0

2 TEOREMA :

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x^0 \in A$,

allora f ammette derivate parziali in x^0

TEOREMA (3) :

se la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^1

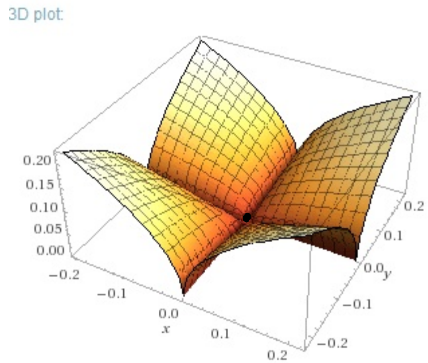
continua con derivate parziali continue

$\to$ allora la f è DIFFERENZIABILE

se DERIV. PARZ CONTINUE $\to$ DIFFERENZ

EX: funzione continua, derivabile parz (0,0) ma non differenziabile:

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$



continua in (0,0)

$$\exists f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\exists f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

DIFFERENZIALE SECONDO:

Sia f differenziabile in A aperto e sia

$$df = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial x_2} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

il differenziale primo.

il differenziale secondo si ottiene differenziando il differenziale 1° nell'Hp $f \in C^2$:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} dx_2 dx_n +$$

$$\dots$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_n dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} dx_n dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2$$

$$d^2 f = [dx_1, dx_2, \dots, dx_n] \, [H] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

è UNA FORMA QUADRATICA

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$f \in C^2 \to$ SCHWARZ $\to H$ è simm.