- DERIVATA PARZIALE
- GRADIENTE
- ESEMPIO ECONOMICO
- DIFFERENZIALE
- DERIVABILITÀ PARZIALE CONTINUITÀ
- DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL 1°
- TEOREMA DI SCHWARZ
- HESSIANA

DERIVATA PARZIALE:

Definizione:

DATA una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si DICE DERIVATA PARZIALE rispetto alla variabile x_i nel punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ il seguente limite se $\exists$ finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x^0)$$

Ex:

$$y = x_1^3 + e^{x_2} = f(x_1, x_2) \qquad \text{PUNTO } (1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,2) = 3x_1^2 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,2) = e^{x_2} = e^2$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$$\nabla f(x^0) = [3, e^2]$$

$$\nabla f(1,2) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,2) \right]$$

Se una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ammette in un punto x_0 tutte le derivate parziali rispetto a tutte le variabili il vettore:

$$\nabla f(x^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right]$$

si chiama GRADIENTE della f in x^0

$$f(x,y) = 3x + \log(x-y) + xy^2 \qquad x^0 = (2,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + \frac{1}{x-y} + y^2 = 3 + \frac{1}{2-1} + 1 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x-y} + x2y = -\frac{1}{1} + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 3$$

$$\nabla f(2,1) = [5, \quad 3]$$

1) PRODUTTIVITÀ MARGINALE

$Q(K, L)$ = FUNZIONE DI PRODUZIONE

$\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)$ PRODUTTIVITÀ MARGINALE DEL CAPITALE

$$\Delta Q \cong \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*, L^*)}_{} \cdot \underbrace{\Delta K}_{=1}$$

EX: $Q = 4K^{3/4} L^{1/4}$

$$K = 10'000 \qquad L = 625$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 4L^{1/4} \cdot \frac{3}{4} K^{-1/4}$$

$$Q(10'000, 625) = 4 \cdot 10'000^{3/4}\ 625^{1/4} = 20'000$$

$$4 \cdot 10001^{3/4}\ 625^{1/4} =$$

$$\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K}(10'000, 625) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\Delta K}$$

$$\Delta Q \cong \underbrace{4 \cdot 625^{1/4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10'000^{-1/4}} = 1,5$$

$$Q + \Delta Q \cong 20'001,5$$

$$Q(10'001, 625) = \text{REALE}$$

ELASTICITÀ DOMANDA BENE 1 $\rightarrow f$ PREZZO BENE 1

$\rightarrow f$ PREZZO BENE 2

$$Q_1 = f(P_1, P_2, \text{reddito})$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_1 / Q_1}{\Delta P_1 / P_1} \quad \frac{\%}{\%}$$

$-1 < \varepsilon < 0$ ANELASTICA \ RIGIDA

$\varepsilon < -1$ ELASTICA

$\varepsilon = -1$ ELASTICITÀ UNITARIA

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\Delta Q_1}{Q_1}}{\dfrac{\Delta P_2}{P_2}} \gtrless 0 \quad ?$$

$\varepsilon > 0$ $\uparrow$ PREZZO bene 2 (THE) $\uparrow$ DOMANDA BENE 1 (CAFFÈ)

BENI SOSTITUTI

$\varepsilon < 0$ $\uparrow$ PREZZO bene 2 (ZUCCHERO) $\downarrow$ DOMANDA BENE 1 (Caffè)

BENI COMPLEMENTARI

DIFFERENZIALE :

Supponiamo di voler studiare $F(\underline{x},\underline{y})$ in un intorno (x^0, y^0) :

$$F(x^0+\underbrace{\Delta x}, y^0) - F(x^0, y^0) \cong \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, y^0)\cdot \underbrace{\Delta x}$$

$$F(x^0, y^0+\underbrace{\Delta y}) - F(x^0, y^0) \cong \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\cdot \underbrace{\Delta y}$$

Se variano sia la x sia la y, la variazione totale

$$\underbrace{F(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - F(x^0, y^0)} \cong \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, y^0)\,\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\,\Delta y$$

DIFFERENZIALE TOTALE =

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$f(x) - f(x^0)$

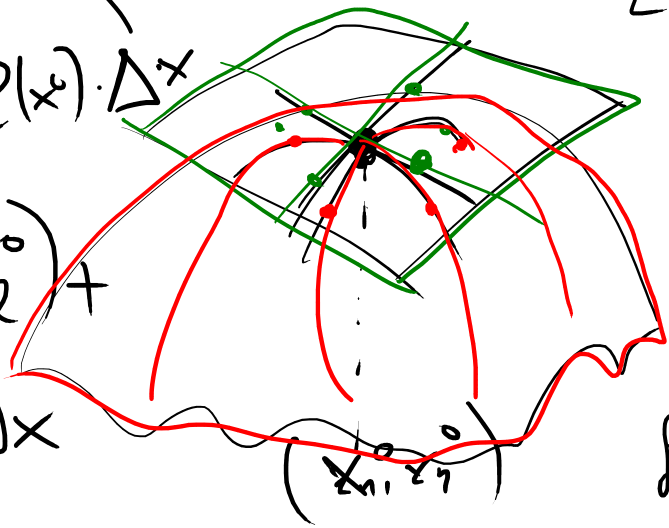
$$= \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x} , \frac{\partial F}{\partial y} \right]}_{\text{GRADIENTE}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

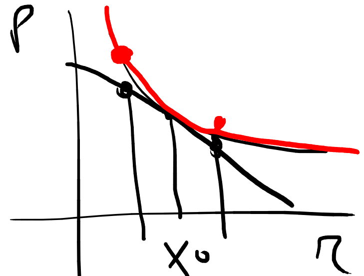
vettore degli incrementi

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot \Delta x$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \nabla f(x_1^0, x_2^0) \Delta x$$





$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

EX: $F(K,L) = 4K^{3/4} L^{1/4}$

$F(10'000, 625) = F(K_0, L_0) = 4 \cdot 10'000^{3/4} \cdot 625^{1/4} = 20'000$

$F(10'010, 623) = ?$

K AUMENTO DI 10 UNITÀ

L DIMINUISCE DI 2 UNITÀ

$F(10'010, 623) = 4 \cdot 10'010^{3/4} \cdot 623^{1/4} \simeq 19'999 = 19'998{,}97$

$\Delta K = 10$

$\Delta L = -2$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}(10'000, 625) \cdot \underset{10}{\Delta K} + \frac{\partial F}{\partial L}(10'000, 625) \cdot \underset{-2}{\Delta L}$$

$= 1{,}5 \cdot 10 + 8 \cdot (-2) = 15 - 16 = -1$ 19'999

VARIAZIONE STIMATA SU PIANO TANGENTE

$$F = 4K^{3/4}L^{1/4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 4L^{1/4}\frac{3}{4}K^{-1/4} = \cancel{4}\cdot 625^{1/4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cdot 10000^{-1/4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 4K^{3/4}\frac{1}{4}L^{-3/4} = \cancel{4}\cdot 10000^{3/4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}625^{-3/4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 1{,}5$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 8$$

per f a n variabili

il differenziale totale è

$$\overbrace{F(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta_2, \dots, x_n^0+\Delta x_n) - F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} =$$

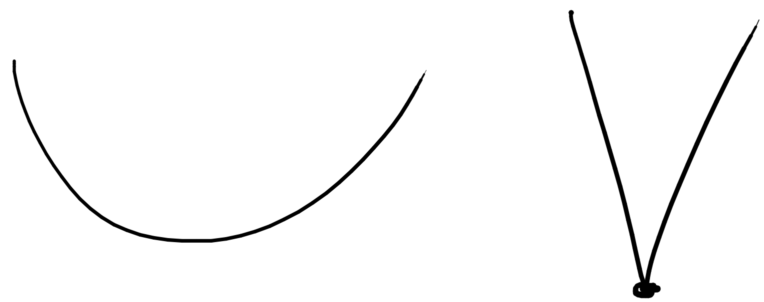
$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^0)\right] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^0) \cdot \Delta x_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^0) \cdot \Delta x_n$$

LEGAME TRA DERIVABILITÀ PARZIALE e CONTINUITÀ

f 1 var CONTINUA $\not\Rightarrow$ DERIVABILE



f a + variabili <u>CONTINUA</u> $\not\Rightarrow$ <u>DERIVABILE PARZIALE.</u>

es:

$$y = x_1^2 + |x_2|$$

continua

ma non derivabile

parz risp x_2

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(0+\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{\Delta x_1^2 - 0}{\Delta x_1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta x_2) - f(0,0)}{\Delta x_2} =$$

$$= \frac{|\Delta x_2| - 0}{\Delta x_2} = \begin{cases} 1 & \Delta x_2 > 0 \\ -1 & \Delta x_2 < 0 \end{cases}$$