MATRICE

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & \boxed{2} & 3/2 \\ 2 & 1 & -1/2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q(x) = x^T A x$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 4\,x_1 x_2 + 3\,x_1 x_3 - x_2 x_3$$

OGNI F.Q SI ANNULLA IN $x = 0$

COSA DISTINGUE UNA FORMA QUADRATICA

è il SEGNO $x \neq 0$

SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

1) DEFINITA POSITIVA: se $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0, \, x \in \mathbb{R}^n$

2) DEFINITA NEGATIVA: se $x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0, \, x \in \mathbb{R}^n$

3) SEMI DEFINITA POSITIVA: se $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$ e $x^T A x = 0$ per almeno un $x \neq 0$

4) SEMIDEFINITA NEGATIVA: se $x^T A x \leq 0 \quad \forall x \neq 0$ ed $\exists \, x \neq 0 : x^T A x = 0$

5) INDEFINITA: se $x^T A x > 0$ per almeno un x_i
$x^T A x < 0$ per almeno un x_j

TEOREMA STUDIO SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA:

DIAMO DEFINIZIONI DI

- MINORE PRINCIPALE
- MINORE PRINCIPALE DI GUIDA O DI NORD-OVEST

MINORE PRINCIPALE:

DATA UNA matrice $A_{n \times n}$ la sottomatrice $k \times k$ ottenuta eliminando $(n-k)$ colonne e le stesse $(n-k)$ righe, si dice sottomatrice principale di ordine k. Il suo determinante è il minore principale di ordine k.

ex:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Minore principale di ordine 3: è il determinante di A

Minori principali di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ho eliminato 1ª riga
1ª colonna

Minori principali di ordine 1: a_{33} a_{22} a_{11}

MINORE PRINCIPALE DI NORD-OVEST (O DI GUIDA)

Sia $A_{K \times K}$ la sottomatrice principale di ordine K ottenuta eliminando le **ULTIME** $n-K$ righe e $n-K$ colonne

questa è chiamata sottomatrice principale di NORD-OVEST e il suo determinante è il MINORE PRINCIPALE DI NORD-OVEST

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

MINORE PRINCIPALE DI NORD-OVEST DI ORDINE 3
è il Det(A)

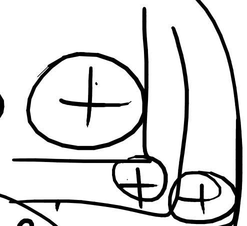
MINORE PRINCIPALI DI NORD-OVEST DI ORDINE 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

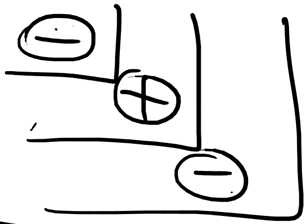
MINORE PRINC DI N-O DI ORDINE 1
é a_{11}

TEOREMA :

la matrice A si dice definita + sse tutti i minori principali di nord-ovest sono >0 +

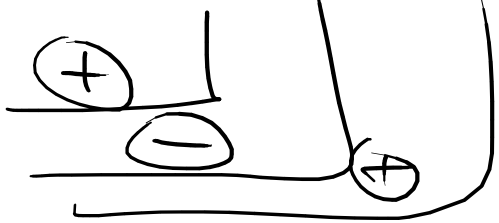


la matrice A si dice definita − sse i minori princ di N-O sono a segno alterno a partire dal negativo $M_1<0$ $M_2>0$ $M_3<0$



la matrice A si dice indefinita se almeno 1 minore principale di nord-ovest è diverso da zero ma non soddisfa i casi precedenti

ex:



TEOREMA :

la matrice A è semidefinita ⊕ sse ogni MINORE PRINCIPALE è ≥ 0

la matrice A è semidefinita ⊖ sse ogni MINORE PRINCIPALE DI ORDINE DISPARI è ≤ 0

DI ORDINE PARI è ≥ 0

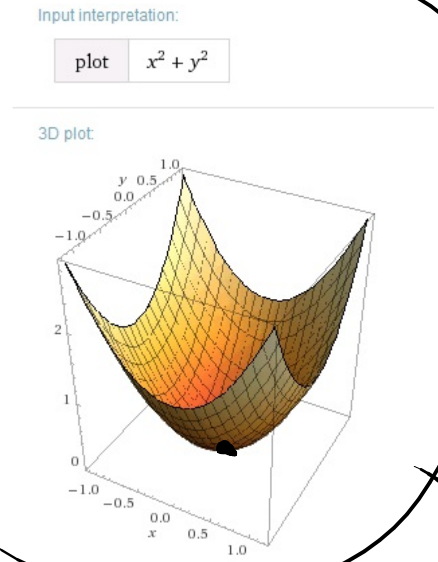
TEOREMA :

Sia A semidef ⊕ (semidef ⊖)

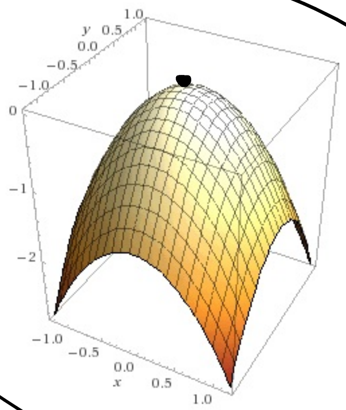
allora $\exists$ un $x \neq 0$: $x^T A x = 0$

sse A è SINGOLARE ($\det(A) = 0$)

$x_1^2 + x_2^2$ Def $+$

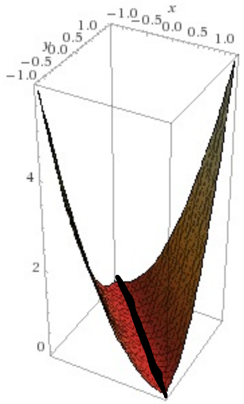


$-x_1^2 - x_2^2$ Def $-$



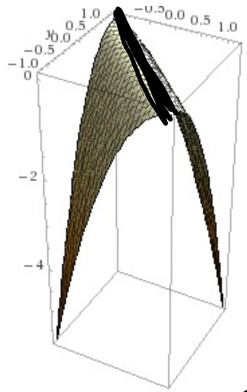
$(x_1 + x_2)^2$

semidef $+$



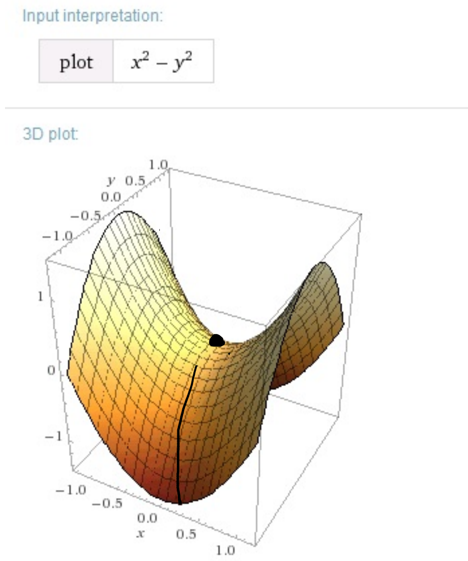
$-(x_1 + x_2)^2$

semidef $-$



$$x_1^2 - x_2^2$$

funzione è indefinita

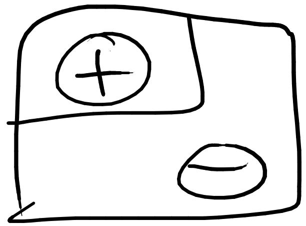


$$[x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

indefinito

$\Pi_1 = 1 > 0$

$\Pi_2 = -1 < 0$



$x_1^2 + x_2^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Pi_1 = 1 > 0$ $\oplus$

$\Pi_2 = 1 > 0$ $\oplus$

Definita $\oplus$

$-x_1^2 - x_2^2$

$$A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Pi_1 = -1$ $\ominus$

$\Pi_2 = 1$ $\oplus$

Def $\ominus$

$$(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MINORI PRINC DI N-O

$M_1 = 1 > 0$ $\quad +$

$M_2 = 0$ $\quad 0$

MINORI PRINCIPALI DI ORDINE 1:

$1 > 0$

$1 > 0$

MINORE PRINC DI ORDINE 2

$\mathrm{Det}(A) = 0$

Visto che tutti i minori principali sono $\geq 0 \rightarrow$ SEMIDEF $+$

$$-(x_1+x_2)^2 = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

MINORI PRINCIPALI DI ORDINE 1 $\quad -1 < 0$

$-1 < 0$

MINORI PRINC DI ORD 2: $\mathrm{Det}(A) = 0$

$\Big\}$ semidef $-$

caso particolare matrice DIAGONALE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

def $\oplus$ sse $a_{ii} > 0$

def $\ominus$ sse $a_{ii} < 0$

semidef $\oplus$ sse $a_{ii} \geq 0$

semidef $\ominus$ sse $a_{ii} \leq 0$

indef se ci sono 2 a_{ii} DI SEGNO OPPOSTO

EX: $\quad A: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ SEMIDEF $(+)$

MINORI PRINC DI NORD-OVEST: $\quad M_1 = 1 > 0$

$M_2 = 1 > 0$

$M_3 = 2 - 1 - 1 = 0$

MINORI PRINCIPALI:

DI ORDINE 1: $\quad 1 > 0$

$2 > 0$

$1 > 0$

MINORE 3 $= \det(A) = 0$

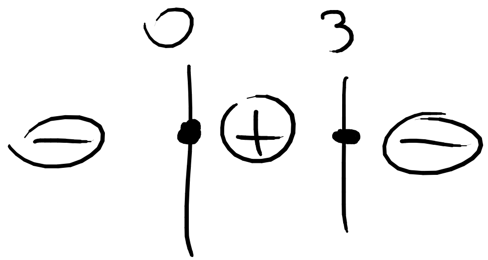
DI ORDINE 2: $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

Ex: $\begin{bmatrix} \boxed{3} & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$

MINORI PRINCIPALI DI NORD-OVEST:

$m_1 = 3 > 0$

$m_2 = 3\alpha - \alpha^2 \qquad \alpha(3-\alpha) \to \alpha = 0, \ \alpha = 3$



$0 < \alpha < 3$

$m_1 > 0$

$m_2 > 0$ Def $+$

$\alpha < 0 \qquad m_1 > 0, \ m_2 < 0 \qquad \oplus \ \ominus$ indef

$\alpha > 3 \qquad m_1 > 0, \ m_2 < 0$: indef

$\alpha = 0$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_1 \geq 0$

$M_2 = \det(A) = 0$

semidef $\oplus$

$\alpha = 3$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$M_1 > 0$

$\det(A) = 0$

semidef $\oplus$