FUNZIONI A PIÙ VARIABILI:

- definizione
- esempi
- curve di livello
- f limitate
- f omogenee
- f convessa
- f continue
- f lineari
- f quadratiche → FORME QUADRATICHE

$f : \underline{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \underline{B} \subseteq \mathbb{R}$

f è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B.

A: Dominio =

B: Codominio =

insieme immagine =

$f(x,y) = \underline{x^2 + y^2}$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Immagine $\mathbb{R}_0^+$

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Dominio : $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\sqrt{\log(y^2 - 2x)}$$ $D = \{(x,y) : y^2 - 2x \geq 1\}$

Dominio : $\begin{cases} \log_e(y^2 - 2x) \geq 0 \\ y^2 - 2x > 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y^2 - 2x \geq 1}$

Esempi :

1) funzione di domanda $q = f(\text{prezzo})$

$q = f(p_1, p_2, \text{reddito})$

2) $f(t) = C(1+i)^t$ $f(t, i, C) = C(1+i)^t$

3) funzione di utilità $u(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\text{paniere di beni}})$

curve di indifferenza

$u(\mu, \sigma^2)$

4) FUNZIONE DI PRODUZIONE :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K_0$$

ISOQUANTO

PRODUZIONE

FATTORI DI PRODUZIONE

$$y = K \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2}$$

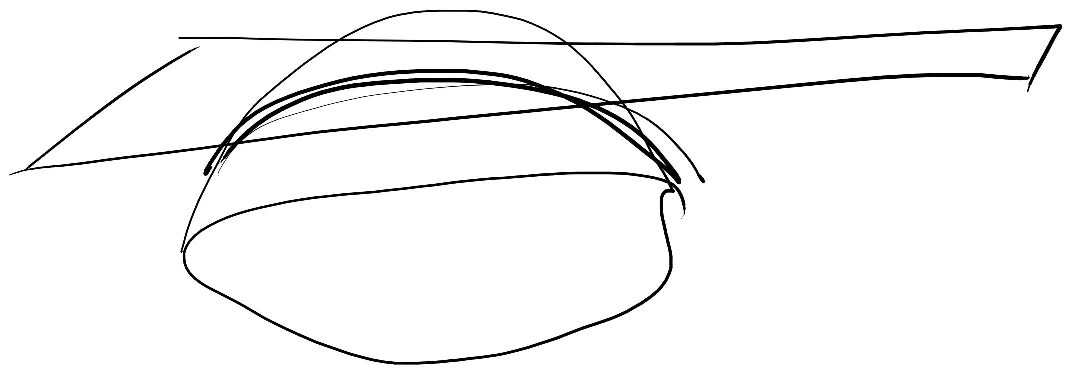
COBB-DOUGLAS

$$y = K \cdot C^{b_1} L^{b_2}$$

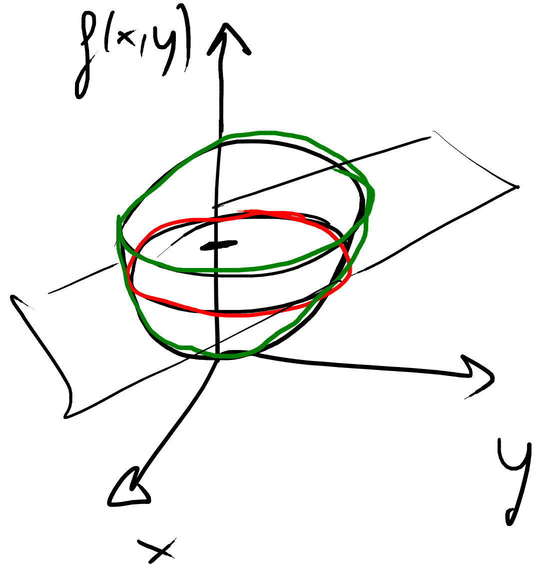
$$y = K \cdot C^{\alpha} L^{(1-\alpha)}$$

CURVA DI LIVELLO:

DATA $f(x,y)$ le curve di livello sono il luogo delle coppie (x,y) in corrispondenza delle quali $f(x,y) = z_0$



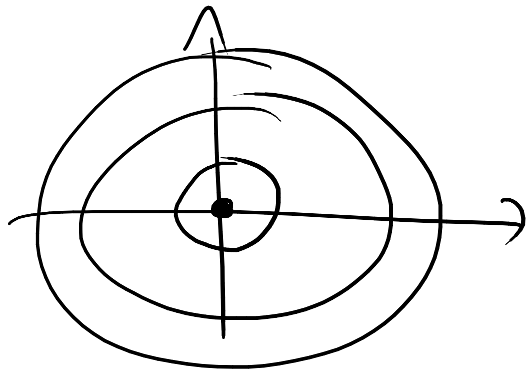
$$f(x,y) = x^2+y^2$$



$f(x,y)=0$

$f(x,y)=1$

$f(x,y)=2$



$x^2+y^2=0$ $\quad$ $x^2+y^2=1$

Esempio 1 funzione utilità

curve di indifferenza

Esempio 2 funzione di produzione

ISOQUANTO $f(x,y) = x \cdot y = 4$

FUNZIONE OMOGENEA :

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice OMOGENEA DI GRADO $p \in \mathbb{R}$

se $\forall x \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

$$f(\alpha x) = \alpha^{p} f(x)$$

p = GRADO DI OMOGENEITÀ

EX: $y = f(K, L) = \underbrace{c \cdot L^{t} K^{1-t}}$ $\quad 0 < t < 1$

$$f(\alpha K, \alpha L) = c \cdot (\alpha L)^{t} (\alpha K)^{1-t}$$

$$= c \cdot \alpha^{t} L^{t} \alpha^{1-t} K^{1-t}$$

$$= \underbrace{c \cdot L^{t} K^{1-t}} \cdot \alpha^{1} = \alpha^{1} f(K, L)$$

OMOGENEA DI GRADO 1

RENDIMENTI DI SCALA COSTANTI $\rho = 1$

se K e L variano dello stesso α
la produzione varia di α

Rendimenti CRESCENTI $\rho > 1$

Rendimenti decrescenti $0 < \rho < 1$

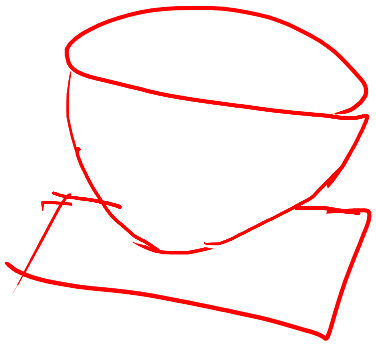
FUNZIONE LIMITATA:

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice limitata superiormente (inferiormente)

se il suo insieme immagine è limitato

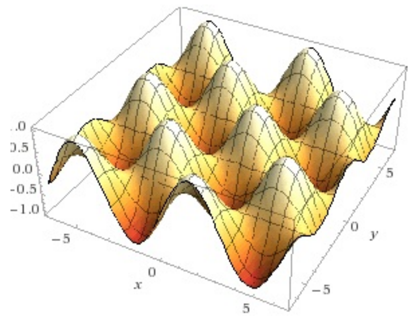
superiormente

inferiormente

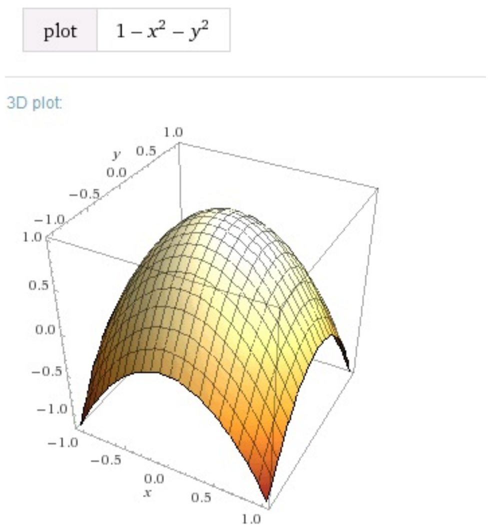


f si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente:

$f(x,y) = \sin x \cdot \cos x$



limitata



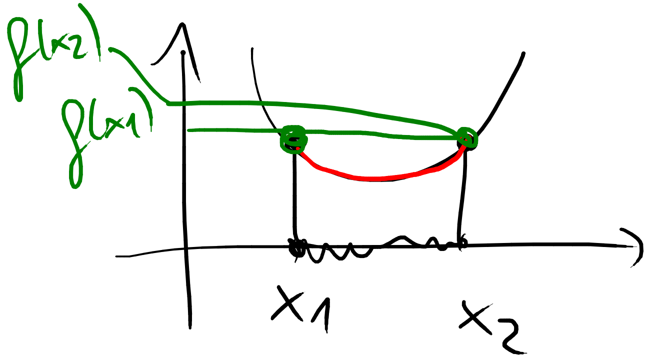
funzione limitata superiormente

FUNZIONE CONVESSA:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA su A insieme convesso se $\forall\, x^1, x^2 \in A$

$\forall k \in [0, 1]$

$$f(kx^1 + (1-k)x^2) \leq k\, f(x^1) + (1-k)\, f(x^2)$$



$$f[kx_1 + (1-k)x_2] \leq k \cdot f(x_1) + (1-k)\, f(x_2)$$

$$f(kx^1+(1-k)x^2) \le k f(x^1) + (1-k) f(x^2)$$

$f(kx^1+(1-k)x^2)$	$\le$	$k f(x^1) + (1-k) f(x^2)$	CONVESSA
"	$<$	"	STRETT. CONVESSA
"	$\ge$	"	CONCAVA
"	$>$	"	strettamente CONCAVA

DISTANZA EUCLIDEA TRA 2 VETTORI :

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$

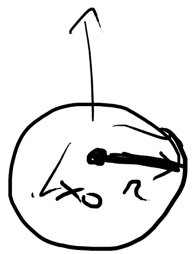
$$\|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

se $x = (0, 0, \ldots, 0)$ ORIGINE

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$ NORMA DI y
lunghezza y

INTORNO SFERICO in $\mathbb{R}^2$:

$$I(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x^0\| < r\}$$



$$\sqrt{(x_1-x_1^0)^2 + (x_2-x_2^0)^2}$$

$x = x_1, x_2$

$x^0 = x_1^0, x_2^0$

FUNZIONE CONTINUA:

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_0 \in A$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

f si dice continua in P_0 se $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

$\exists$ limite e coincide valore funzione nel punto

f è continua in A se è continua $\forall P \in A$

Funzione lineare :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, \dots x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$$
$$\dots + a_n x_n$$

$$a^T \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x$$

$$f(x) = a^T x = x^T a$$

FUNZIONI QUADRATICHE :

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\sum_{i \le j}^{n} a_{ij} x_i x_j}$$

$$f(x) = a \cdot \underbrace{x^2}$$

$$f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \boxed{a_{12} \underbrace{x_1^1 x_2^1}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 +$$

$$\underbrace{a_{12} x_1 x_2} + \underbrace{a_{13} x_1 x_3} + \underbrace{a_{23} x_2 x_3}$$

FORME QUADRATICHE = funzioni quadratiche

SONO POLINOMI OMOGENEI DI GRADO 2

AMMETTONO UNA RAPPRESENTAZIONE matriciale

mediante una matrice SIMMETRICA:

$$f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \underline{a_{12}} x_1 x_2 = x^T A x$$

$$x = x_1, x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} a_{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2} a_{12} \\ \frac{1}{2} a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ex:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{-x_1^2} + \underbrace{3x_2^2} - \underbrace{2x_3^2} \underbrace{-4x_1x_2} + \underbrace{x_1x_3} \underbrace{-6x_2x_3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1/2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1/2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE FORMA QUADRATICA:

La forma quadratica $\varphi(x) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$

$$= \sum_{i\leq j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

può essere rappresentata come:

$\varphi(x) = x^T A x$ ove la matrice A è simm ed è unica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \cdot & a_{22} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se abbiamo matrice A simmetrica
ad essa è associata sempre 1 forma
quadratica

FUNZIONE QUADRATICA FORMA QUADRATICA

A MATRICE