ex: $x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$

$y(x)$ $y = f(x) \ldots$

$x + y = 0$

$y = -x$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = 2x - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0 \\ x^2 - 3yx + y^3 - 7 = 0 \end{cases}$$

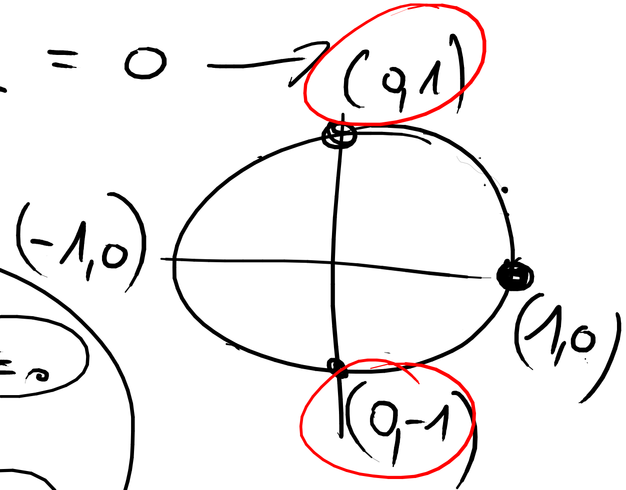
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

$\boxed{(4,3)}$

$$y'(x) = -\frac{2x-3y}{-3x+3y^2}.$$

$$\boxed{y'(x)} = -\frac{8-9}{-12+3\cdot 9} \neq 0 = \boxed{\frac{1}{15}}$$

ex: $G(x,y) = x^2+y^2-1 = 0 \rightarrow (0,1)$



$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}=0 \quad 2x=0 \quad x=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}=0 \quad 2y=0 \quad y=0 \end{cases}$$

NON CI SONO PUNTI IRREGOLARI (DA ESCLUDERE)

in $(-1,0)$ e $(1,0)$ la $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 2y = 0$ NON POSSO ESPLICITARE $y=f(x)$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=0$$

→ in $(-1,0)$ e $(1,0)$ ESPLICITO $x=g(y)$

Nei punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ non posso esplicitare $x = g(y)$ perché $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$

quindi esplicito $y = f(x)$

in tutti gli altri punti posso esplicitare sia $x = g(y)$ sia $y = f(x)$ perché sia $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ sia $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$

es: $G(x,y) = x \cdot y$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$

È UN PUNTO IRREGOLARE

$\nexists$ $(0,0)$ non posso esplicitare né $y=f(x)$ né $x=h(y)$

CONDIZIONI DI QUALIFICAZIONE DEI VINCOLI
(CASO 1 VINCOLO:)

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\begin{cases} G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

CONDIZIONI QUALIFICAZIONE VINCOLI :

CASO m VINCOLI :

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$G_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$G_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(sottomatrice della)

Determinante matrice JACOBIANA $\neq 0$

ho x riga i GRADIENTI

Matrice JACOBIANA : degli m vincoli

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \nabla G_1 \\ \to \nabla G_2 \\ \vdots \\ \to \nabla G_m \end{array}$$

EX : VINCOLI

$x_1 - 1 = 0$

$$x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \qquad x_1 x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 & G_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 & G_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_1 x_2 = x_3 & G_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

verifichiamo se il punto $(1,1,1)$ è REGOLARE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ x_2 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

nel punto $(1,1,1)$

la matrice Jacobiana è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(J) = 1 - 1 = 0$

il punto $(1,1,1)$ è un punto irregolare

$\det(J) = 1 - x_1 = 0$ quando $x_1 = 1$

tutti i punti $(1, x_2, x_3)$ sono irregolari

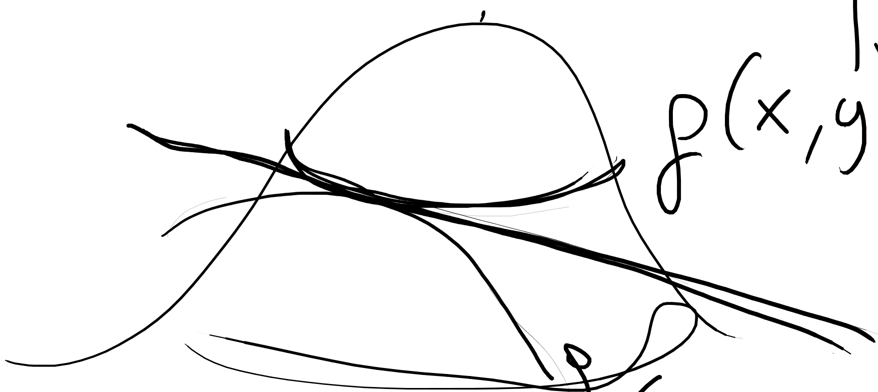
OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA:

f funzione obiettivo

g vincolo

$\underbrace{y = h(x)}$

$f(x,y)$



$g(x,y)$

$y = \varphi(x)$

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x}{\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y} \qquad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x} = g'_x}{\frac{\partial g}{\partial y} = g'_y}$$

$$h'(x) = \varphi'(x) \qquad -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{f'_y}$$

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{g'_x}{g'_y} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \end{cases}$$

$$f'_x = \lambda g'_x$$

$$f'_y = \lambda g'_y$$

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\cancel{\lambda} g'_x}{\cancel{\lambda} g'_y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

CN 1° ORD
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 & f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 & f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 & -g(x,y) = 0 \qquad g(x,y) = 0 \end{cases}$$

CASO 2 VARIABILI e 1 VINCOLO:

CONDIZIONE NECESSARIA affinché $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ PUNTO REGOLARE SIA ESTREMANTE RELATIVO CONDIZIONATO DI f è che $\exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda})$ SIA SOLUZIONE DEL SISTEMA:

$$\begin{cases} g(x_1, x_2) = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \\ f'_1(x_1, x_2) = \lambda g'_1(x_1, x_2) \longrightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ f'_2(x_1, x_2) = \lambda g'_2(x_1, x_2) \rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

CASO n VARIABILI e m VINCOLI :

Siano f e $G_1, \dots, G_m$ funzioni di n variabili di classe C^1

f obiettivo, $G_1, \dots, G_m$ vincoli

$\underline{\max / \min}\ f$ sotto ai vincoli $G_1, \dots, G_m$

$$I_{\text{AMMISSIBILE}} = \begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \\ \vdots \\ G_m = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $x^* \in I$ sia punto regolare e sia pto max / min per f $\rightarrow$

ALLORA $\exists$ m moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$:

(x^*, λ^*) è PUNTO STAZIONARIO DELLA LAGRANGIANA.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \dots - \lambda_m G_m$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow \text{VINCOLO } G_1 \text{ SODDISFATTO} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0 \rightarrow \text{vincolo } G_m \text{ soddisfatto} \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$$

$n = 3$

f DI 3 VARIABILI $\quad G(x_1, x_2, x_3)$

$m = 2$

VINCOLI

$\cancel{\max}$

$$\min \quad 5x_1 + 2x_2 - x_3$$

s.t.
$$\boxed{\begin{cases} x_1 x_2 - 3 = 0 \\ x_1 x_3 - 1 = 0 \end{cases}} \qquad \begin{array}{l} G_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ G_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{array}$$

PUNTI IRREGOLARI : $\det(J) = 0$

$$J = \begin{bmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 - 0 \rightarrow \boxed{x_1 \neq 0}$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \underline{5x_1} + 2x_2 - x_3 - \lambda_1(x_1x_2 - 3) - \lambda_2(x_1x_3 - 1)$$

C.N. $\nabla \mathcal{L} = 0$

$$x_2 = \frac{3}{x_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \boxed{5 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0} & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -x_1x_2 + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2 - \lambda_1 x_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dfrac{2}{x_1} & \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = -1 - \lambda_2 x_1 = 0 & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = -x_1x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{x_1}$$

$$5 - \frac{2}{x_1}\frac{3}{x_1} - \left(-\frac{1}{x_1}\right)\frac{1}{x_1} = 0$$

$$5 - \frac{6}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} = 0$$

$$5x_1^2 - 6 + 1 = 0$$

$$5x_1^2 = 5 \qquad x_1^2 = 1$$

$$x_1 = \pm 1$$

$$x_1 = 1 \rightarrow (1, 3, 1, 2, -1)$$

$$x_1 = -1 \rightarrow (-1, -3, -1, -2, 1)$$