MASSIMI e MINIMI GLOBALI o ASSOLUTI

<u>TEOREMA</u>:

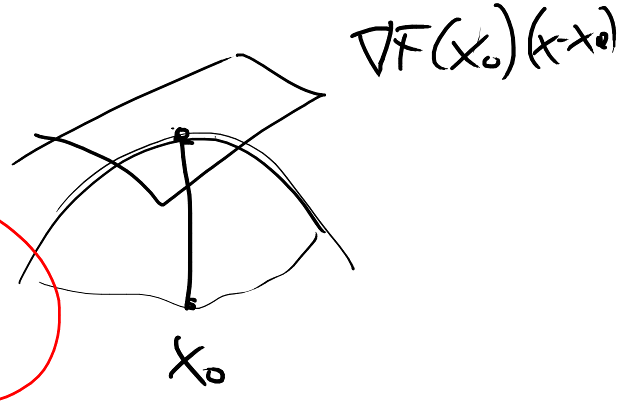
Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad F \in C^2(A)$

allora le 3 condizioni seguenti sono equivalenti

1) F è concava su A

2) $F(x) - F(x_0) \leq \nabla F(x_0)(x - x_0)$

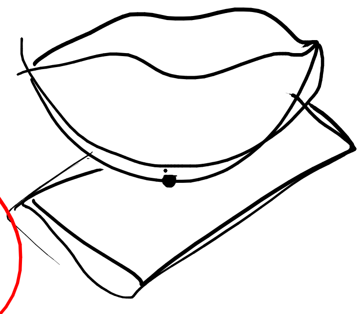
3) HESSIANA è SEMIDEF $\ominus$ $\forall x \in A$



1) F è convessa su A

2) $F(x) - F(x_0) \geq \nabla F(x_0)(x - x_0)$

3) Hessiana è semidef (+) $\forall x \in A$



Possiamo scrivere

- se la f è concava su A e $\nabla f(x^0) = 0 \rightarrow x^0$ è max assoluto

- se la f è convessa su A e $\nabla f(x^0) = 0 \rightarrow x^0$ è min assoluto ex: $f(x,y) = x^4 + y^2 + 4x$ $\mathbb{R}^2$

$\nabla f = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $x^3 = -1$

$x = -1$

$y = 0$

$(-1, 0)$

$\rightarrow H = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$H(-1,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $M_1 = 12 > 0$

$M_2 = 24 > 0$

HESSIANA è DEF $\oplus$

MIN RELATIVO STRETTO

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRICE è SEMIDEF ⊕ $\forall x \in A$

MINIMO ASSOLUTO

$M_1 \geq 0 \quad M_1 = 12x^2$

$M_2 = 24x^2 \geq 0 \qquad \forall \vec{x} \in A$

GUARDO TUTTI I MINORI PRINCIPALI DI ORDINE 1

$12x^2$ e 2 SONO TUTTI E DUE ≥ 0 $\forall x \in A$

ANCHE MINORE PRINC DI ORDINE $2 = \det(H) = 24x^2$

è ≥ 0 $\forall x \in A$

$+$ $-$ → selle

$+$ $+$ → min

$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$-$ $-$ → selle

$\mathrm{Det}(A) = 24x^2 = 24$

$\mathrm{Det}(-1,0) = 24 \longrightarrow$ min

$-$ $+$

$\oplus$

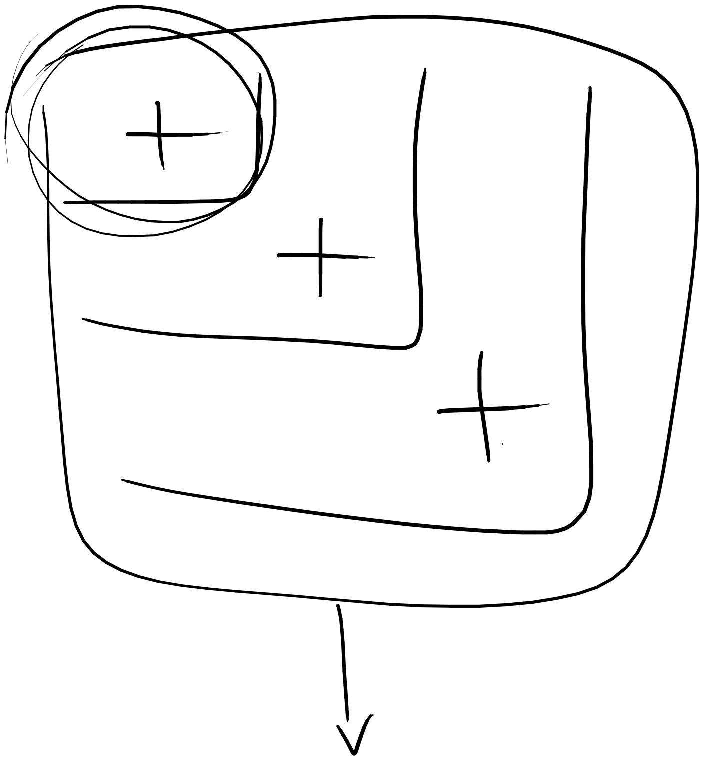
$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\oplus$

MKCO

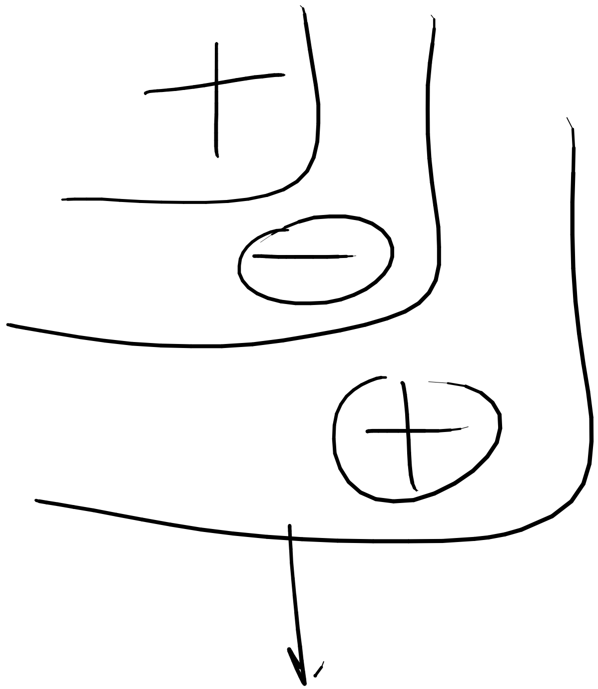
$\boxed{n_2 > 0}$

↓ def0

max



min



sella

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA:

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 4$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$$

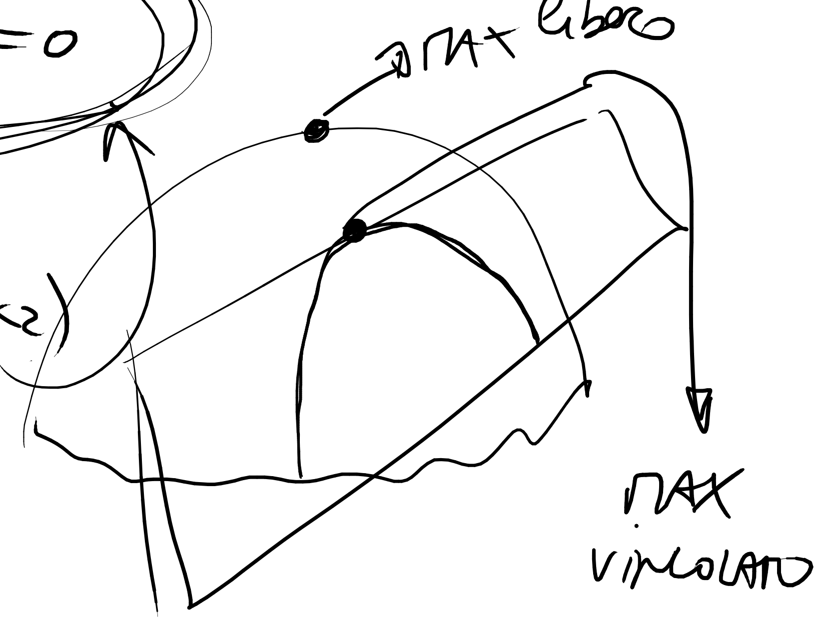
$$x_1 = 1 - x_2$$

1° METODO $\quad x_1 = f(x_2)$

LAGRANGIANA

2° METODO

ESPLICITO IL VINCOLO



- FUNZIONE IMPLICITA
- TEOREMA DI DINI
- PUNTI SINGOLARI / IRREGOLARI

  ESCLUDERE DA OTTIMIZZAZIONE

  NON RISPETTANO CONDIZIONI DI QUALIFICAZIONE DEI VINCOLI
- VINCOLO SINGOLO
- PIÙ VINCOLI

FUNZIONE IMPLICITA :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\boxed{x_1 + x_2 - 1} = 0$$

$$x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\boxed{x_1 = 1 - x_2}$$

$$x_1 = f(x_2) = 1 - x_2$$

$\exists f$? CONTINUA?

ex: $4x + 2y = 5$

tutte le volte che ho vincolo lineare posso sempre esplicitare $x = f(y)$, $y = g(x)$

$$x = \frac{5-2y}{4} = f(y)$$

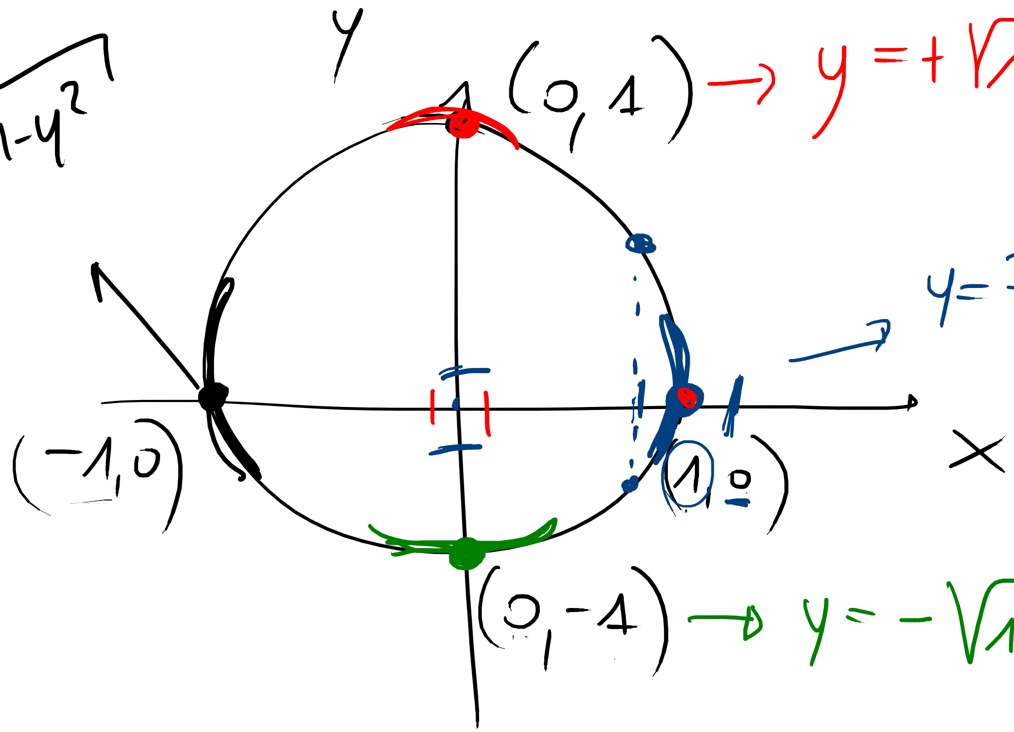
$$y = \frac{5-4x}{2} = g(x)$$

ex: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ non esplicitabile

ex: $x^2 + y^2 = 1$ $\quad x = \pm\sqrt{1-y^2}$ esplicitabile se $-1<y<1$

e ho 2 funzioni

$x = -\sqrt{1-y^2}$



$(0,1) \rightarrow y = +\sqrt{1-x^2}$

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$ non è def $x>1$

$x<1$ ho 2 soluz

$(0,-1) \rightarrow y = -\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{x^2+y^2=1}$ $\qquad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$x = +\sqrt{1-y^2}$

le domande che ci poniamo sono le seguenti:

DATA l'equazione $G(x,y) = 0$ e

UN PUNTO (x_0, y_0) che la soddisfa

$\exists$ una f CONTINUA $y = f(x)$ definita su di

un intorno di x_0:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

1) $G(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I(x_0)$

2) $y_0 = f(x_0)$

3) $f'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$

$$G(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \boxed{\frac{\partial y}{\partial x}} = 0$$

TEOREMA DI DINI :

SIA $G \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e UN PUNTO (x_0, y_0) :

$G(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

ALLORA $\exists$:

1) UN INTORNO $I(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
2) UN INTERVALLO $]a, b[$ CON $x_0 \in]a, b[$
3) UNA FUNZIONE $f \in C^1]a, b[$

TALI CHE :

1) $(x, f(x)) \in I \quad \forall x \in]a, b[\qquad y_0 = f(x_0)$
2) $G(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$
3) $\dashv$

3) $f(x)$ è UNICA e $f'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)}$

$f(x)$ è la funzione implicita definita dalla $G(x, y) = 0$

se $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ ALLORA ESPLICITO LA

$x = h(y)$ se $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

se $\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \underline{G(x_0, y_0) = 0} \end{cases}$ $\rightarrow$ **PUNTO IRREGOLARE**