OTTIMIZZAZIONE LIBERA:

$$\max_{\min} f(x) \qquad f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

funzione obiettivo

s.t. $x \in X$ insieme di vincoli individuato da equazioni o disequazioni

se X coincide con A ottimizzaz. libera

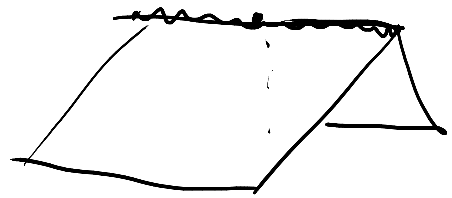
se $X \subset A$ ottimizzazione vincolata

Definizione max (min)

GLOBALE o ASSOLUTO LOCALE o RELATIVO

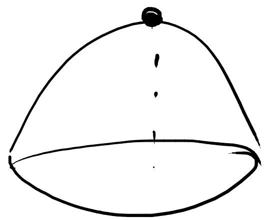
PROPRIO | IMPROPRIO

in senso stretto in senso lato



$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x^* \in A$

x^* è max ASSOLUTO in senso lato se $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in A$



" " " in senso stretto se $f(x^*) > f(x)$ $\forall x \in A$, $x \neq x^*$

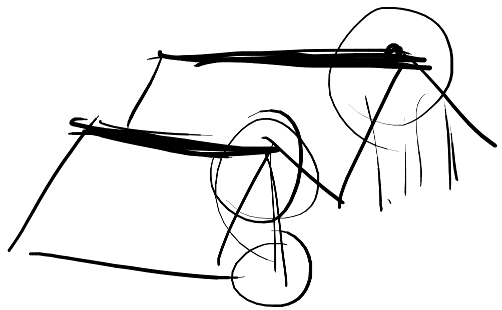
x^* è max relativo in senso lato se

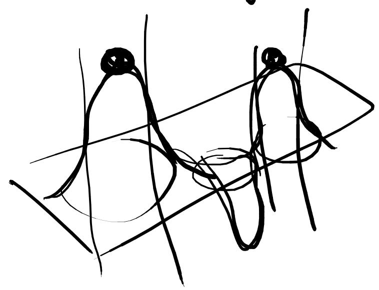
$$\exists\, I(x^*, \delta) : \forall x \in I(x^*, \delta) \cap A \quad f(x^*) \geq f(x)$$

x^* è max relativo in senso stretto

$$\exists\, I(x^*, \delta) : \forall x \in I(x^*, \delta) \cap A \quad f(x^*) > f(x)$$

$$x \neq x^*$$





CN 1° ORDINE

CN 2° ORDINE

CS 2° ORDINE

CN 1° ORDINE =

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f \in C^1(A)$

Se x^* è pto di max/min locale per f

e x^* è un punto interno ad A

allora $\nabla f(x^*) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

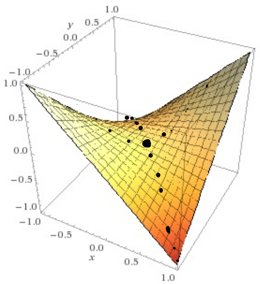
min
max $\xrightarrow{CN}$ $\nabla f(x^*) = 0$

$\not\xleftarrow{C.S}$

$f(x,y) = xy$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$



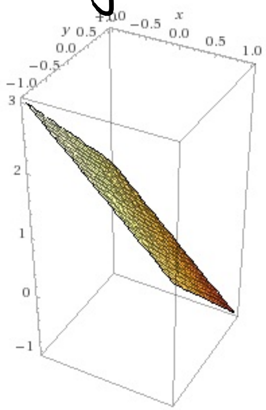
PUNTO DI SELLA :

x_0 è punto di sella se $\forall\, I(x_0, \delta)$

cadono sia punti x_i : $f(x_i) > f(x_0)$

sia punti x_j : $f(x_j) < f(x_0)$

ex : $f(x,y) = 1 - x - y$ punto sella $(0,0)$



polinomio di Taylor:

$$f(x) = f(x^0) + \underbrace{h^T \nabla f(x^0)}_{=0} + \frac{1}{2} h^T H h$$

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} h^T H h$$

$f(x) \leq f(x^0) \rightarrow$ max $x_0 \rightarrow f(x) - f(x^0) \leq 0$

$f(x) \geq f(x^0) \rightarrow$ min $x_0 \rightarrow f(x) - f(x^0) \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x) > f(x^0) \\ f(x) < f(x^0) \end{array}\right\} \rightarrow$ sella $x_0 \rightarrow f(x) - f(x^0)$ assume segni $\neq$

$f(x) < f(x_0) \rightarrow$ max $\rightarrow$ H def $\ominus$

$f(x) > f(x_0) \rightarrow$ min $\rightarrow$ H def $\oplus$

$\left.\begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{array}\right\} \rightarrow$ sella $\rightarrow$ H indefinita

PER i CASI semidef $\oplus$ / semidef $\ominus$ } NON POSSIAMO CONCLUDERE nulla

TEOREMA : C.S. 2° ORDINE :

sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f \in C^2(A)$

sia x^* un punto stazionario di f $\nabla f(x^*) = 0$

se è HESSIANA è def ⊖ ALLORA x^* MAX RELATIVO stretto

se è HESSIANA è def ⊕ ⟶ x^* min relativo stretto

se è HESSIANA è indefinito → x^* SELLA

HESSIANA semidef ⊕ o ⊖ non posso dire nulla

CONDIZ NECESSARIA 2° ORDINE

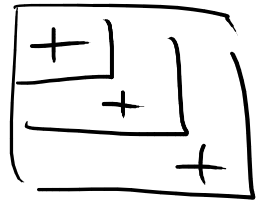
$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^2(A)$

x^* supponiamo sia di max (min) relativo interno per f

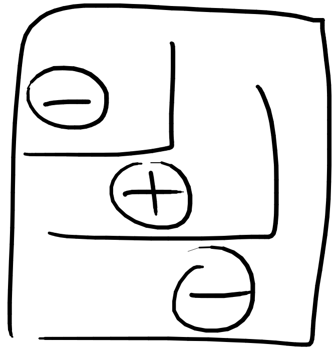
ALLORA e' HESSIANA è semidef $\ominus$

(semidef $\oplus$)

Def (+) tutti i minori principali di NORD-OVEST > 0

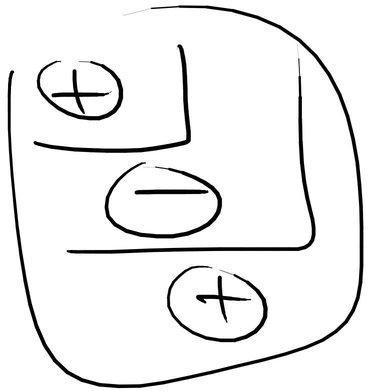


Def (−) tutti i minori principali di NORD-OVEST sono a segno alterno a partire dal (−)



indef se sono ≠ 0 ma non rispettano i casi precedenti

ex:



$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^5 - 5$$

$\mathbb{R}^2$

$\nabla f = 0$

$\underline{CN}$ 1° ord

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2\cdot 2xy^2 + 10x^4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 2y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$4x^2y + 4y^3 = 0$$

$$4x^3 + 10x^4 = 0$$

$$2x^3[2+5x] = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = -\frac{2}{5}$ $\quad$ $y = 0$

$$4y\underbrace{[x^2+y^2]}= 0$$

$x^2 + y^2 = 0$ $\quad$ $x = 0$, $y = 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3+4xy^2+10x^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y+4y^3$$

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2+4y^2+40x^3 & 8xy \\ 8xy & 4x^2+12y^2 \end{bmatrix}$$

$$H\left(-\frac{2}{5},0\right) = \begin{bmatrix} 12\left(-\frac{2}{5}\right)^2+40\left(-\frac{2}{5}\right)^3 & 0 \\ 0 & 4\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} 12\cdot\frac{4}{25}+\cancel{40}^{\,8}\cdot\left(-\frac{8}{\cancel{125}\,25}\right) & 0 \\ 0 & 4\cdot\frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{48}{25}-\frac{64}{25} & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$ NON POSSO CONCLUDERE nulla

$$H\left(-\frac{2}{5}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\frac{16}{25} & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} - & \\ & - \end{bmatrix}$$

indefinita

sella

$$-\frac{16}{25} \cdot \frac{16}{25} - 0 = \det(H) < 0$$

Ex :

$$f(x,y,z) = \underbrace{x^2+y^2+z^2-2x-1}_{} \qquad \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{2x-2}_{} = 0 & x = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 & y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0 & z = 0 \end{cases} \qquad (1,0,0)$$

H def (+)

→ punto di minimo

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 > 0$$

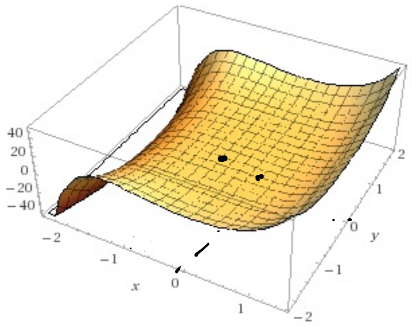
$$\Delta_3 = 8 > 0$$

$$H = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$+ \quad + \quad +$

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^5 - 5$$

$$\underbrace{f(x,y) - f(0,0)}_{} > 0$$



$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^5 \cancel{-5} \cancel{+5} =$$

$$x^4[1+2x] + y^4 + 2x^2y^2$$

$$1+2x > 0 \qquad x > -\frac{1}{2}$$

$(0,0)$ è punto di minimo