HESSIANA ORLATA :

$n = 2$ VARIABILI

$m = 1$ VINCOLO

$$H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & 1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \lambda & \overset{-1}{x_1} & \overset{-1}{x_2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \lambda \\ -1 \quad x_1 \\ -1 \quad x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \end{array}$$

HESSIANA ORLATA

$$\boxed{\mathcal{L} = f(x_1, x_2) - \lambda \, \overset{(x_1+x_2)}{g_1(x_1, x_2)}}$$

HESSIANA ORLATA NEL CASO + VINCOLI =

$$
H = \begin{array}{c} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_1 \partial x_m} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_2^2} & & \\
\vdots & & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \\
\vdots & & \vdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_m^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_m \partial \lambda_1} & \cdot & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_m \partial x_1} &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\mathcal{L} = f(x_1, x_2, \ldots x_m) - \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots x_m)
$$

$$H \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nabla g_1 \\ 0 & 0 & \nabla g_2 \\ \nabla g_1 & \nabla g_2 & \boxed{\begin{array}{l} H \text{ della } \mathcal{L} \\ \text{rispetto a } x_1, x_2 \\ \dots, x_n \end{array}} \end{bmatrix}$$

C.S. del 2° ordine

Affinché il punto (x^*, λ^*)

sia ~~minimo~~ massimo locale stretto vincolato

è che l'hessiana orlata sia DEF (+)

hessiana orlata sia DEF (−)

PER STUDIARE SEGNO HESSIANA ORLATA IN OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA IL TEOREMA è:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $n = n°$ VARIABILI

$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $m = n°$ VINCOLI

$\vdots$

$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$

C.N.S. affinché H orlata è DEF $(+)$

è che gli ultimi $n-m$ minori principali di nord-ovest della matrice H orlata abbiano segno $(-1)^m$

C.N.S. affinché H orlata sia DEF $(-)$

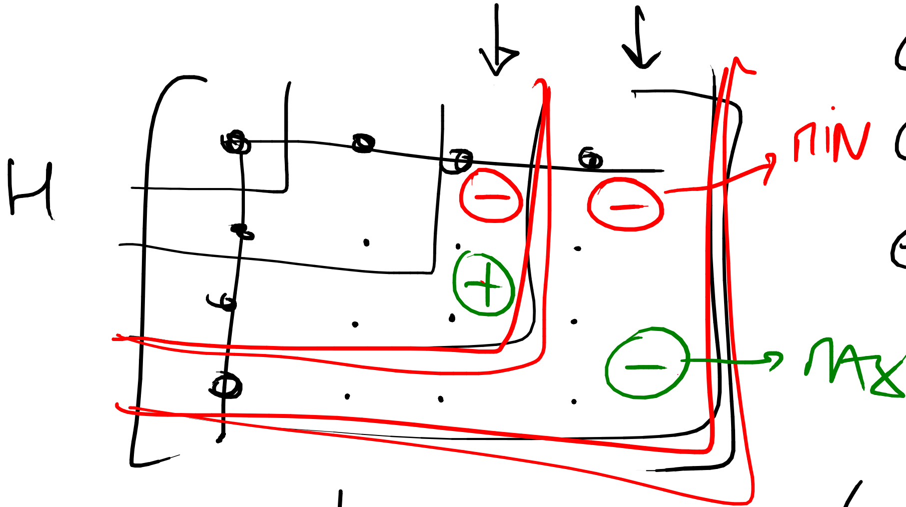
è che gli ultimi $n-m$ minori princ di nord ovest della matrice orlata abbiano segno alterno a partire da $(-1)^{m+1}$

$n = 3$ 3 incognite $x_1 \ x_2 \ x_3$

$m = 1$ 1 vincolo $g(x_1, x_2, x_3)$

VADO A VEDERE GLI ULTIMI $\overset{n}{3} - \overset{m}{1} = \boxed{2}$

MINORI PRINC DI NORD-OVEST cioè quelli di ordine 3 e ordine 4



se tutti e due hanno segno $(-1)^{m=1} < 0$

allora ho def $\oplus$ → minimo

se invece hanno segno alterno e partire da $(-1)^{\underset{1}{\overset{\shortparallel}{n}}+1} = (-1)^2 > 0$

minore di ordine 3 > 0

minore di ordine 4 < 0

+

−

allora H.ORL def − $\to$ MAX

altrimenti non posso concludere nulla

~~$n = 3$~~ $f(x_1, x_2, x_3)$

$m = 2$

$g_1(x_1, x_2, x_3)$

$g_2(x_1, x_2, x_3)$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
H = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

GUARDO GLI ULTIMI

$3 - 2 = 1$

MINORI PRINC. DI N-O

$\downarrow$

OVVERO IL $\mathrm{Det}(H)$

se Det (H) ha segno $(-1)^{m=2} > 0$

H ori è Def $\oplus$ $\rightarrow$ MINIMO

se Det (H) ha segno $(-1)^{m^2+1} < 0$

H ori è Def $\ominus$ $\rightarrow$ MAX

$n = 2 \quad f(x_1, x_2)$

$m = 1 \quad g(x_1, x_2)$

ultimi

$n - m = 1$

$$
\begin{array}{cccc}
 & \lambda & x_1 & x_2 \\
H = & \left[\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right.
\end{array}
$$

GUARDO IL DET(H)

$(-1)^m < 0$

Det $< 0 \to$ def $+$ $\to$ MIN

$(-1)^{\overset{1}{m}+1} > 0$ Det $> 0 \to$ def $-$ $\to$ MAX

EX: $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$ $n = 3$

$g_1(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow x_1 x_2 - 3 = 0$ $m = 2$

$g_2(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow x_1 x_3 - 1 = 0$

$3 - 2$

ULTIMI $n - m$ MINORI PRINC DI

NORD-OVEST : Det (H)

$(-1)^{m=2} > 0 \rightarrow$ def $+$ $\rightarrow$ MIN

$(-1)^{m+1} < 0 \rightarrow$ def $-$ $\rightarrow$ MAX

H ORLATA

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_3 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ x_1 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

AVEVAMO 2 PUNTI CANDIDATI ALL'OTTIMO :

$$(1,3,1,2,-1)$$

$$(-1,-3,-1,-2,1) \rightarrow \text{MAX}$$

$$H(1,3,1,2,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è PTO MINIMO

$$H(1,3,1,2,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(H) = (-1)^{5+2} \cdot 1 \cdot \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{5+3} \cdot 1 \cdot \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Det}(M) = (-1)^{5+2} \cdot 1 \cdot \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{5+3} \cdot 1 \cdot \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \left[(-1)^{4+1} \cdot 1 \operatorname{Det}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$+ \left[(-1)^{5} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = -\left[-(6-1] + (-2)(3) \right] + (-1)$$

$$= -(-11) - 1 = 10$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 5 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2 - \lambda_1 x_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = -1 - \lambda_2 x_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3 \partial x_1} = -\lambda_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\lambda_1 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_3} = -\lambda_2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} = -\lambda_1 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

TEOREMA DI LAPLACE:

$$\det = (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\text{sottomatrice che si ottiene eliminando la riga } i \text{ e la colonna } j)$$