Esiste quindi un intorno $U(0)$ e una funzione $y(x)$ tali che $y(0) = 0$ e $f(x, y(x)) = 0 \ \forall x \in U(0)$.
Di tale funzione è possibile calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile endogena x, si ha: $\frac{\partial y}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0$

c) Prima ipotesi: g_1 e g_2 sono funzioni differenziabili in $\mathbf{0}$; seconda ipotesi: $g_1(\mathbf{0}) = g_2(\mathbf{0}) = 0$; terza ipotesi:

$$\nabla_{(x,y)}\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z+1} \\ \frac{1}{z-1} & 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è non singolare, con determinante $D = 1$.
Esiste quindi un intorno $U(\mathbf{0})$ e due funzioni $h_1(z)$ e $h_2(z)$ tali che $h_1(0) = h_2(0) = 0$ e $g_1(h_1(z), h_2(z), z) = 0$ e $g_2(h_1(z), h_2(z), z) = 0 \ \forall z \in U(\mathbf{0})$.
Di tali funzioni è possibile calcolare le derivate parziali rispetto alla variabile endogena z, si ha:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{z+1}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{z-1}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = -\frac{1+y}{(z+1)^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{1-x}{(z-1)^2}$$

quindi

$$\frac{\partial h_1}{\partial z}(\mathbf{0}) = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} / D = -\det \begin{bmatrix} -\frac{1+y}{(z+1)^2} & \frac{1}{(z+1)} \\ \frac{1-x}{(z-1)^2} & 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} = -\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial z}(0) = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} / D = -\det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+y}{(z+1)^2} \\ \frac{1}{z-1} & \frac{1-x}{(z-1)^2} \end{bmatrix}_{(\mathbf{0})} = -\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ottimizzazione vincolata in $\mathbf{R}^n$

8.20 In $\mathbf{R}^2$ si considerino i vincoli: $x_2 = 0$, $x_2 - (x_1 - 1)^2 = 0$; si dimostri che il punto $(1, 0)$ è ammissibile ma non regolare (Figura 8.11).

Il punto $(1, 0)$ è ammissibile perché soddisfa le equazioni di entrambi i vincoli, non è regolare in quanto, come si vede anche dalla Figura 8.11, $(1, 0)$ è il punto di tangenza fra la retta $x_2 = 0$ e la parabola $x_2 = (x_1 - 1)^2$; quindi i gradienti dei due vincoli in $(1, 0)$ non sono linermente indipendenti.

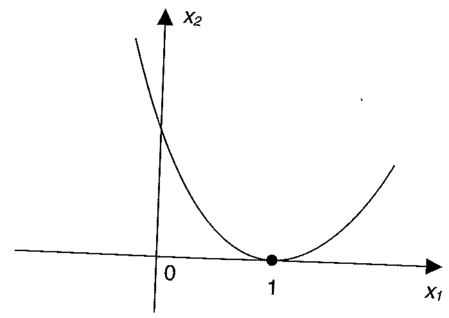

Figura 8.11

Si verifica la stessa cosa considerando lo Jacobiano dei vincoli (si ricordi che lo Jacobiano $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ di un insieme di funzioni $h_i(\mathbf{x})$ è la matrice in cui nella posizione i, j compare la derivata parziale $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$); posto: $h_1(\mathbf{x}) = x_2$, $h_2(\mathbf{x}) = x_2 - (x_1 - 1)^2$, si ha $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2(x_1 - 1) & 1 \end{bmatrix}$, $\nabla\mathbf{h}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, il cui rango è 1. Si è verificato che il rango dello Jacobiano nel punto è inferiore al numero dei vincoli.

8.21 Si verifichi se il punto $\mathbf{x}_0$ è regolare per gli insiemi di vincoli seguenti in $\mathbf{R}^n$.

a) $x_1 = 1, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 x_2 = x_3 \quad \mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$

b) $9x_1^2 - 3x_2 = 1, \quad \ln x_2 - 3x_1 = 2, \quad x_2 > 0 \quad \mathbf{x}_0 = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

a) Il punto $(1, 1, 1)$ è ammissibile perché verifica le equazioni dei tre vincoli, non è regolare in quanto se si considera lo Jacobiano dei vincoli con: $h_1(\mathbf{x}) = x_1 - 1$, $h_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - 1$, $h_3(\mathbf{x}) = x_1 x_2 - 1$, si ha $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ x_2 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$, $\nabla\mathbf{h}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, il cui rango è 2 inferiore al numero dei vincoli.

b) Il punto $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ è ammissibile perché verifica le equazioni dei due vincoli, inoltre è regolare; infatti, dati i vincoli: $h_1(\mathbf{x}) = 9x_1^2 - 3x_2 - 1$, $h_2(\mathbf{x}) = \ln x_2 - 3x_1 - 2$, si ha che lo Jacobiano $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 18x_1 & -3 \\ -3 & \frac{1}{x_2} \end{bmatrix}$, $\nabla \mathbf{h}\left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, il cui rango è uguale al numero dei vincoli. Si può osservare che le due curve si intersecano in $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ ma non sono tangenti in tale punto.

8.22 In $\mathbf{R}^n$ si determini l'insieme dei punti regolari per i seguenti insiemi di vincoli.

$$x_1^2 - 4x_2^2 = -16, \quad x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 9 = 0$$

I punti di intersezione fra i due vincoli sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_2^2 = -16 \\ x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = \pm 4 \frac{\sqrt{11}}{5} \\ x_2 = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Il punto $(0, 2)$ è ammissibile perché verifica le equazioni dei due vincoli, non è regolare in quanto in tale punto le due curve sono tangenti come si vede dallo Jacobiano dei vincoli $\nabla \mathbf{h}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, il cui rango è 1 (inferiore al numero dei vincoli). I punti $\left(\pm 4 \frac{\sqrt{11}}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ sono regolari infatti in tali punti i vincoli sono reciprocamente secanti (il rango di $\nabla \mathbf{h}$ è 2) (Figura 8.12).

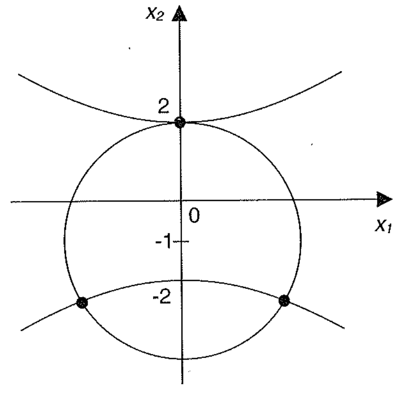

Figura 8.12

8.23 Si individuino i punti di massimo e di minimo della seguente funzione applicando, se possibile, il Teorema di Kuhn-Tucker.

$$y = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 20 \quad \text{soggetta a} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Posta la matrice dei vincoli $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$, i vincoli del problema definiscono una varietà di classe C^∞ e lo Jacobiano di $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ è: $\nabla \mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Poiché il rango di tale matrice è 2, i gradienti dei vincoli sono linearmente indipendenti, perciò tutti i punti ammissibili sono regolari. Premesso questo, si può applicare il teorema di Kuhn-Tucker (vedi Teorema 8.17 del libro di testo) considerando la funzione Lagrangiana:

$$L(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 20 - \lambda_1(2x_1 + x_2 - x_3) - \lambda_2(x_2 + x_3)$$

I punti di ottimo vanno ricercati fra le soluzioni del sistema:

$$\nabla L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2 \\ -2x_2 + 3 \\ -4x_3 + 4 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

cioè:

$$\begin{cases} -x_1 + 1 - \lambda_1 = 0 \\ -2x_2 + 3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4x_3 + 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{8} \\ x_2 = -\frac{3}{8} \\ x_3 = \frac{3}{8} \\ \lambda_1 = \frac{5}{8} \\ \lambda_2 = \frac{25}{8} \end{cases}$$

L'unico eventuale punto di ottimo è $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Poiché f, h_1 e h_2 sono di classe C^2, per verificare se $\mathbf{x}^*$ è di ottimo, è necessario stabilire se la matrice hessiana della Lagrangiana in tale punto è definita (condizione del secondo ordine). In questo caso $\nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x})$ è costante, come lo jacobiano dei vincoli; infatti

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifica quindi se nelle direzioni $\mathbf{d}$ ortogonali ai gradienti dei vincoli (per cui $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} = \mathbf{0}$), l'Hessiano della funzione Lagrangiana è definito; si ha

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 2d_1 + d_2 - d_3 = 0 \\ d_2 + d_3 = 0 \end{cases} \iff \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{d}^T\nabla^2_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^\star)\mathbf{d} = [\alpha \ \ -\alpha \ \ \alpha]\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ -\alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = -8\alpha^2 < 0 \quad \forall \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$$

Perciò la lagrangiana è concava nel punto $\left(\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$ il quale risulta essere un punto di massimo locale stretto. Si può ottenere lo stesso risultato considerando la matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

ottenuta dalla matrice Hessiana della Lagrangiana orlata con lo Jacobiano dei vincoli; infatti per determinare se la forma quadratica associata all'Hessiano della Lagrangiana con il vincolo lineare $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \mathbf{0}$, è definita negativa, basta calcolare il segno del minore principale di ordine 5 (vedi pag. 574 del libro di testo). Si ottiene che $|\tilde{\mathbf{A}}| = -32 < 0$, perciò la Lagrangiana è concava.
Un altro metodo per risolvere il problema è quello dell'esplicitazione dei vincoli; abbiamo già osservato che i punti ammissibili sono della forma $(x_1, -x_1, x_1)$ perciò sostituendo nella funzione si ottiene: $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 + 3x_1 + 20$ parabola con la concavità verso il basso avente il vertice nel punto di ascissa $\frac{3}{8}$; tale punto rappresenta il punto di massimo locale stretto.

Osservazione Con il Teorema di Kuhn-Tucker si introducono i moltiplicatori di Lagrange che sono soggetti a una interpretazione legata al valore della funzione nel punto di ottimo; si suppone che la funzione obiettivo sia $f(\mathbf{x})$ e che $g_k(\mathbf{x}) = c_k$ sia il k-mo vincolo, i valori che assume λ_k (moltiplicatore di Lagrange associato al k-mo vincolo), in corrispondenza della soluzione ottima, sono una misura dell'effetto che una variazione del parametro c_k esercita sul valore ottimale della funzione obiettivo. Nel nostro caso $c_k = 0$, $k = 1, 2$ e, se la soluzione trovata si rivela ottima, l'effetto sul valore della funzione obiettivo di una stessa variazione di c_k nelle equazioni dei vincoli è maggiore per il secondo vincolo; infatti $\lambda_2 > \lambda_1$.

8.24 Applicando i metodi dell'esplicitazione dei vincoli e delle curve di livello, si individuino, al variare di $a \in \mathbf{R}$, i punti di massimo e di minimo della funzione $y = x_1^2 + x_2^2$ soggetta al vincolo $x_1 x_2 = a$.

Posto $h(\mathbf{x}) = x_1 x_2 - a$ i vincoli del problema definiscono una varietà di classe C^∞ e lo Jacobiano di $h(\mathbf{x})$ è:

$$\nabla h(\mathbf{x}) = [x_2 \ \ x_1]$$

Il rango di tale matrice è 1 se $x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0$; inoltre se $a = 0$, il punto $(0, 0)$ è ammissibile ma non regolare infatti

$$\nabla h\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

quindi lo Jacobiano dei vincoli ha rango 0 minore del numero di vincoli; (in questo caso non sarebbe possibile applicare il teorema di Kuhn-Tucker), si verifica che $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto infatti $f(0, 0) = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$.
Se $a = 0$ tutti i punti sugli assi sono di minimo assoluto.
Se $a \neq 0$, tutti i punti ammissibili (per essi $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$) sono regolari; essendo $x_1 \neq 0$, i punti ammissibili sono del tipo $\left(x_1, \frac{a}{x_1}\right)$. Sostituendo nella funzione i punti ammissibili si ottiene: $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{a^2}{x_1^2}$; funzione in una variabile definita per $x_1 \neq 0$, la cui derivata è $f'(\mathbf{x}) = 2x_1 - \frac{2a^2}{x_1^3} = 0$; si ha $f'(\mathbf{x}) = 0$ se $x_1 = \pm\sqrt{|a|}$; nei quattro punti $\left(\pm\sqrt{|a|}, \pm\sqrt{|a|}\right)$ la $f''(x_1) > 0$ perciò si tratta di minimi locali.
Un altro metodo, utile per confermare quanto ottenuto, è quello delle curve di livello che in questo caso hanno la forma di circonferenze con centro nell'origine ed equazione: $x_1^2 + x_2^2 = k$ con $k \geq 0$. Se $a \neq 0$, il vincolo è un'iperbole equilatera riferita agli assi coordinati che, se $a > 0$, giace nel primo e terzo quadrante, altrimenti nel secondo e quarto; i punti di tangenza fra il vincolo e le curve di livello sono: $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$ se $a > 0$ e $(\sqrt{-a}, -\sqrt{-a})$, $(-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$ se $a < 0$; inoltre, poiché in ogni intorno di tali punti le intersezioni del vincolo con le curve di livello hanno una quota maggiore di quella dei punti trovati, si tratta di punti di minimo locale stretto (in Figura 8.13 è rappresentato il caso $a > 0$).
Se $a = 0$, il vincolo è l'unione degli assi coordinati; si è già verificato che i punti su tali assi sono di minimo assoluto (Figura 8.13).

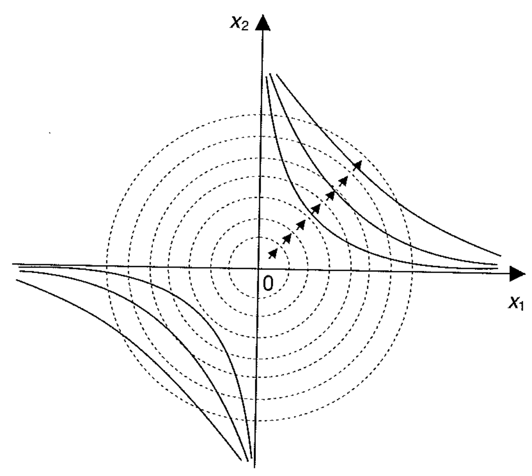

Figura 8.13

8.25 Sia $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2^2 + x_3^2$ (*funzione di produzione*) la quantità di un bene prodotto da una impresa in funzione di tre risorse x_1, x_2, x_3; e $g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$ il costo totale di produzione dove $a_i = i$ è il costo di una unità di x_i.

a) Si determini il livello minimo della funzione di produzione corrispondente a un costo totale fissato a $C = 20$.

b) Si determini il costo totale massimo corrispondente a un livello di produzione fissato a $y = 50$.

a) Il problema può essere modellizzato come segue:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{soggetta a} \quad \sum_{i=1}^{3} i x_i = C, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

La Lagrangiana è:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 3x_1 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 20)$$

e la condizione del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = \dfrac{9}{2} \\ x_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Per verificare la condizione del secondo ordine si considera la matrice Hessiana della Lagrangiana orlata con il gradiente del vincolo.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se i minori di ordine 3 e 4 ($n = 3$, $m = 1$) hanno entrambi il segno $(-1)^m = -1$, la forma quadratica associata all'Hessiano della Lagrangiana è definita positiva; il minore principale di ordine 4 è negativo ($|\tilde{\mathbf{A}}| = -4$), il minore Nord-Ovest di ordine 3 è anch'esso negativo, infatti $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; pertanto il punto trovato è di minimo locale pari a $y = 101.625$. La sensibilità del valore di ottimo a una variazione di C è data da $\lambda = 3$.

b) Il problema può essere modellizzato come segue:

$$\max \sum_{i=1}^{3} i x_i \quad \text{soggetta a} \quad 3x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 50, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

La Lagrangiana è:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \lambda(3x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 50)$$

e la condizione del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2 - 2x_2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 3 - 2x_3\lambda = 0 \\ 3x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 50 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = 3 \\ x_3 = \dfrac{9}{2} \\ x_1 = \dfrac{83}{12} \end{cases}$$

Per verificare la condizione del secondo ordine, si considera, come nel punto *a)*, la matrice Hessiana della Lagrangiana orlata con il gradiente del vincolo.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 9 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Se il minore di ordine 3 ha il segno $(-1)^{m+1} = 1$ e il minore di ordine 4 ha il segno opposto -1, la forma quadratica associata all'Hessiano della Lagrangiana è definita negativa; il minore principale di ordine 3 è positivo $\left(\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 6\right)$ e il minore Nord-Ovest di ordine 4 è negativo ($|\tilde{\mathbf{A}}| = -4$), perciò il punto trovato è di massimo locale pari a $y = 26.41$. La sensibilità del valore di ottimo a una variazione di y è data da $\lambda = \frac{1}{3}$.

8.26 Si considerino due individui e due beni. Le funzioni utilità dei due individui sono:

$$u = u(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad v = v(y_1, y_2)$$

dove x_1 e x_2 sono le quantità dei beni 1 e 2 consumate dal primo soggetto e y_1 e y_2 sono le quantità dei beni 1 e 2 consumate dal secondo soggetto.

La quantità disponibile del bene 1 è z_1, quella del bene 2 è z_2.