

# MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

Corso di laurea di Economia Aziendale e Management  
Università di Modena e Reggio Emilia

## Fascicolo n. 4

### Funzioni di due variabili reali

- *Funzioni reali di due variabili reali*
- *Derivate parziali prime e seconde*
- *Differenziale totale*
- *Massimi e minimi, punti di sella*
- *Massimi e minimi vincolati*
- *Funzione lagrangiana*
- *Esercizi e applicazioni*

**Prof.ssa Carla Fiori**

**Prof. [Carlo Alberto Magni](#)**

**Università di Modena e Reggio Emilia**

# Funzioni a due variabili

**Docente: Carlo Alberto Magni**

**Revisione, integrazioni ed editing: Carlo Alberto Magni**

## 1. Funzioni a due variabili (1) – Introduzione e nozioni di base

[0:00:00](#) Intro  
[0:00:21](#) Concetti generali, dominio, immagine  
[0:24:08](#) Studio e rappresentazione grafica del dominio  
[0:44:35](#) Grafico  
[0:50:21](#) Funzione limitata  
[0:54:26](#) Intorno circolare  
[0:57:29](#) Massimi e minimi  
[1:07:25](#) Punti di sella  
[1:14:45](#) Outro

## 2. Funzioni a due variabili (2) – Derivate parziali e differenziale totale

[0:00:00](#) Intro  
[0:00:15](#) Derivate parziali: introduzione  
[0:16:44](#) Derivate parziali: definizione  
[0:23:15](#) Calcolo di derivate  
[0:42:33](#) Differenziale totale  
[0:56:30](#) Differenziale totale: esempio  
[1:03:50](#) Outro

## 3. Funzioni a due variabili (3) – Determinazione di massimi e minimi liberi

[0:00:00](#) Intro  
[0:16:24](#) Derivate parziali seconde  
[0:08:35](#) Teorema di Schwarz  
[0:10:56](#) Condizioni del prim'ordine e del second'ordine  
[0:18:47](#) Esempio  
[0:24:16](#) Accettabilità dei punti stazionari  
[0:24:39](#) Esempio (continua)  
[0:35:25](#) Outro (+ Sylvester)

## 4. Funzioni a due variabili (4) – Determinazione di massimi e minimi con vincolo esplicitabile

[0:00:00](#) Intro  
[0:00:18](#) Massimi e minimi vincolati  
[0:01:35](#) Vincolo di uguaglianza: introduzione ed esempio 1  
[0:11:05](#) Esempio 2 (vincolo di uguaglianza)  
[0:18:36](#) Esempio 3 (vincolo di uguaglianza)  
[0:28:32](#) Vincolo di disuguaglianza stretta  
[0:35:54](#) Esempio 4 (vincolo di disuguaglianza stretta)

- [0:42:12](#) Vincolo di disuguaglianza non stretta
- [0:43:54](#) Esempio 5 (vincolo di disuguaglianza non stretta)
- [0:59:34](#) Vincolo non esplicitabile
- [1:02:01](#) Outro

## **5. Funzioni a due variabili (5) – Determinazione di massimi e minimi vincolati – Metodo di Lagrange**

- [0:00:00](#) Intro
- [0:00:18](#) Vincolo non esplicitabile
- [0:06:02](#) Metodo di Lagrange
- [0:20:16](#) Outro

## **6. Funzioni a due variabili (6) – Determinazione di massimi e minimi vincolati – Metodo di Lagrange (esempio)**

- [0:00:00](#) Intro
- [0:00:18](#) Metodo di Lagrange
- [0:01:29](#) Esempio
- [0:04:18](#) Funzione lagrangiana
- [0:04:59](#) Condizioni del prim'ordine
- [0:14:35](#) Condizioni del second'ordine
- [0:21:34](#) Outro

## **7. Funzioni a due variabili (7) – Metodo di Lagrange e metodo di sostituzione (esempio)**

- [0:00:00](#) Intro
- [0:00:18](#) Presentazione dei contenuti del video
- [0:00:50](#) Vincolo esplicitabile: metodo di Lagrange
- [0:02:42](#) Condizioni necessaria (prim'ordine)
- [0:07:50](#) Hessiano orlato
- [0:11:42](#) Condizioni sufficienti (second'ordine)
- [0:14:39](#) Vincolo esplicitabile: metodo di sostituzione
- [0:15:58](#) Condizioni necessarie (prim'ordine)
- [0:17:43](#) Condizioni sufficienti (second'ordine)
- [0:19:41](#) Outro

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x; y) \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \}$$

**DEFINIZIONE.** Sia  $D$  un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Una funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è detta **funzione reale di due variabili reali**:

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = z$$

$$f : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = z$$

**Esempi.**

➤  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + 2y$ .

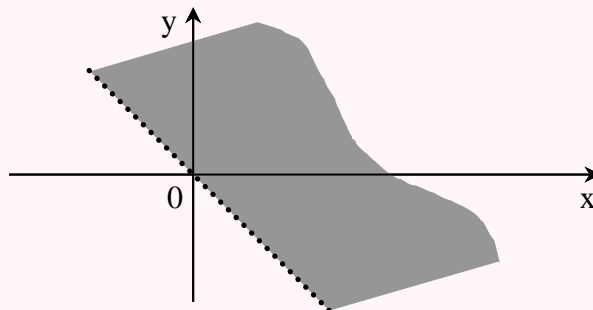
➤  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 - 1$ .

➤  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + y - 3$  con  $D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}$ .

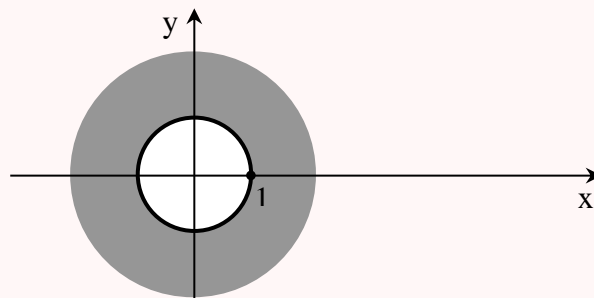
Se non si precisa il dominio (insieme di definizione, campo di esistenza) di una funzione, si sottintende che questo sia l'insieme dei punti nei quali i calcoli indicati nella espressione analitica della funzione sono eseguibili.

**Esempi.**

1. La funzione  $f(x; y) = \ln(x + y)$  è definita in tutti i punti del semipiano  $x + y > 0$ .

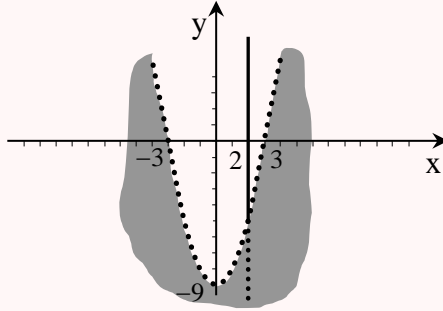


2. La funzione  $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$  è definita in tutti i punti del piano tali che  $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$  ossia in tutti i punti esterni e sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

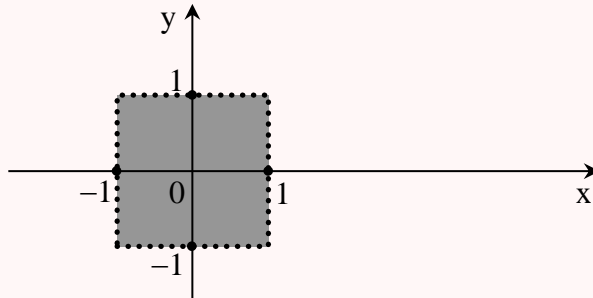


3. La funzione  $f(x; y) = \frac{\ln(x^2 - 9 - y)}{x - 2}$  è definita in tutti i punti del piano tali che
- $$\begin{cases} x^2 - 9 - y > 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Il dominio è costituito dai punti “esterni” alla parabola di equazione  $y = x^2 - 9$  con l’esclusione dei punti della retta  $x = 2$ .



4. La funzione  $f(x; y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$  è definita in tutti i punti del piano tali che  $\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ 1 - y^2 > 0 \end{cases}$ . Il dominio è costituito dai punti interni al quadrato rappresentato nella figura dalla parte più scura; i punti del perimetro sono esclusi.



5. Determinare il dominio di

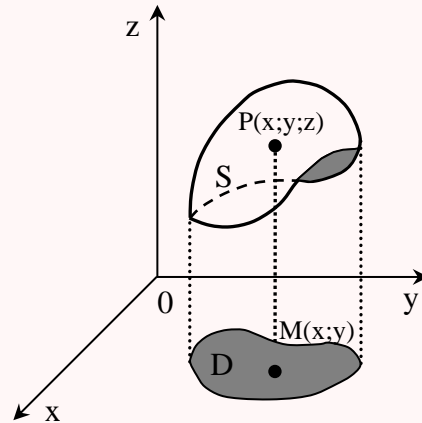
$$f(x, y) = \sqrt{y(x^2 - 4x + 4)}$$

La condizione di esistenza del radicale è  $y(x^2 - 4x + 4) = y(x - 2)^2 \geq 0$ . Poiché  $(x - 2)^2 \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $y(x^2 - 4x + 4) \geq 0$  se e solo se  $y \geq 0$  oppure  $x = 2$  (con  $y$  qualsiasi).

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \vee x = 2\}$$

## GRAFICO

Il **grafico** di una funzione  $f(x; y) = z$  è costituito dai punti  $P(x; y; z)$ ; essi formano una superficie nello spazio.



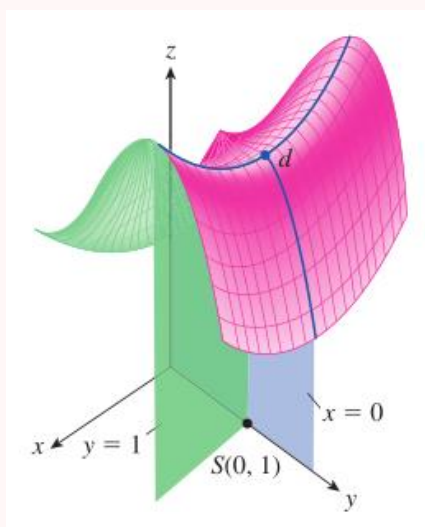
**DEFINIZIONE.** Si dice che una funzione  $f(x; y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , è **limitata** se è limitato il suo insieme immagine  $f(D)$ .

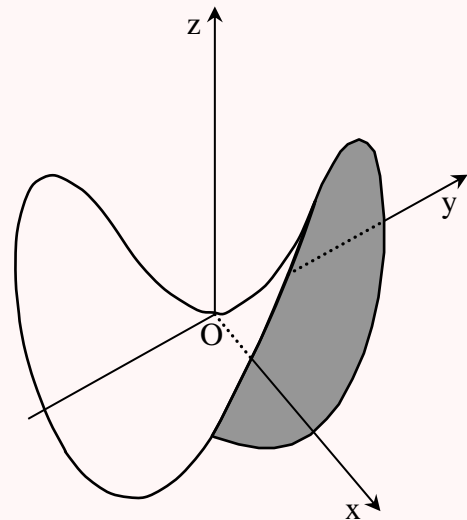
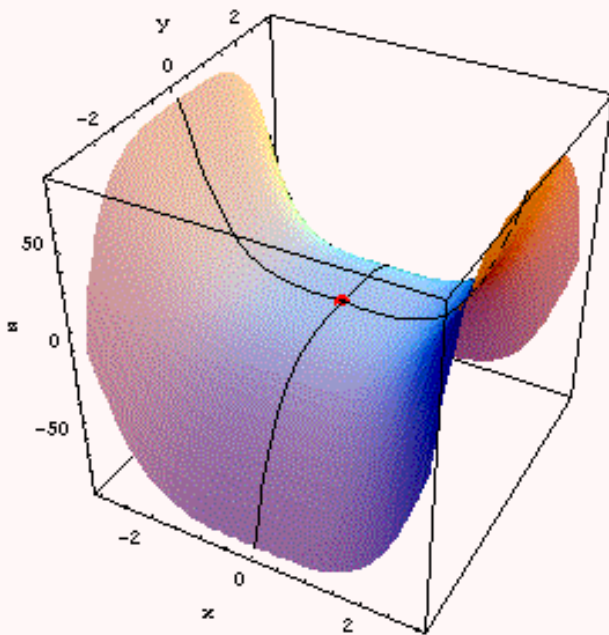
**DEFINIZIONE.** Sia  $f(x; y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , e sia  $P(x_0; y_0) \in D$ , si dice **intorno circolare**, di raggio  $r > 0$ , del punto  $P$  l'insieme dei punti interni della circonferenza di centro  $P$  e raggio  $r$ .

**DEFINIZIONE.** Sia  $f(x, y)$  definita in un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $P(x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ , si dice che  $P$  è un punto di:

- **massimo relativo** (o locale) se esiste un intorno circolare  $H$  del punto  $P$  tale che per ogni  $(x, y) \in D \cap H$  risulta  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ;
- **minimo relativo** (o locale) se esiste un intorno circolare  $H$  del punto  $P$  tale che per ogni  $(x, y) \in D \cap H$  risulta  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ;
- **massimo assoluto** per la funzione  $f(x, y)$  se per ogni  $(x, y) \in D$  risulta  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ;
- **minimo assoluto** per la funzione  $f(x, y)$  se per ogni  $(x, y) \in D$  risulta  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ .

Un punto  $P$  è detto **punto di sella** se esistono due direzioni tali che  $P$  è punto di massimo secondo una direzione e punto di minimo secondo l'altra.





## CALCOLO DIFFERENZIALE IN $\mathbb{R}^2$

- **derivata parziale prima rispetto a  $x$** : è il limite del rapporto incrementale se la variabile  $y$  è fissata a un valore determinato  $y_0$  ed è fatta variare la sola variabile  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- si indica con

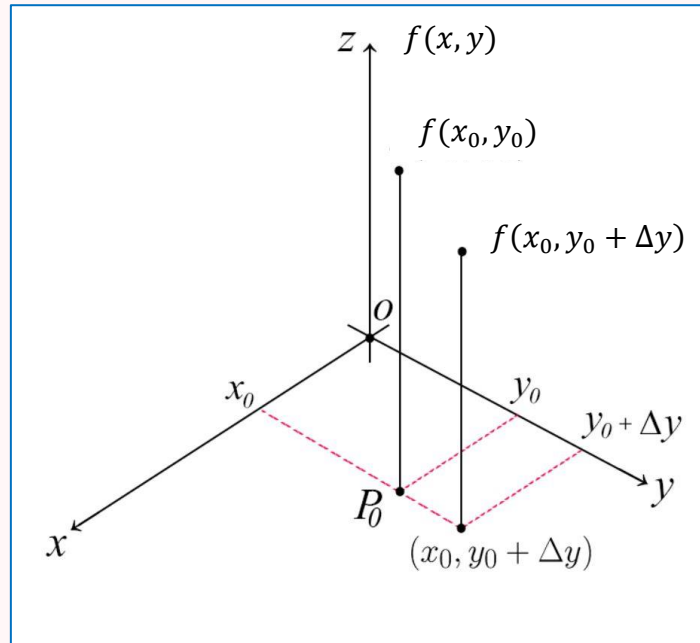
$$f_x, \quad f'_x, \quad f_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

- **derivata parziale prima rispetto a  $y$** : è il limite del rapporto incrementale se la variabile  $x$  è fissata a un valore determinato  $x_0$  ed è fatta variare la sola variabile  $y$ :

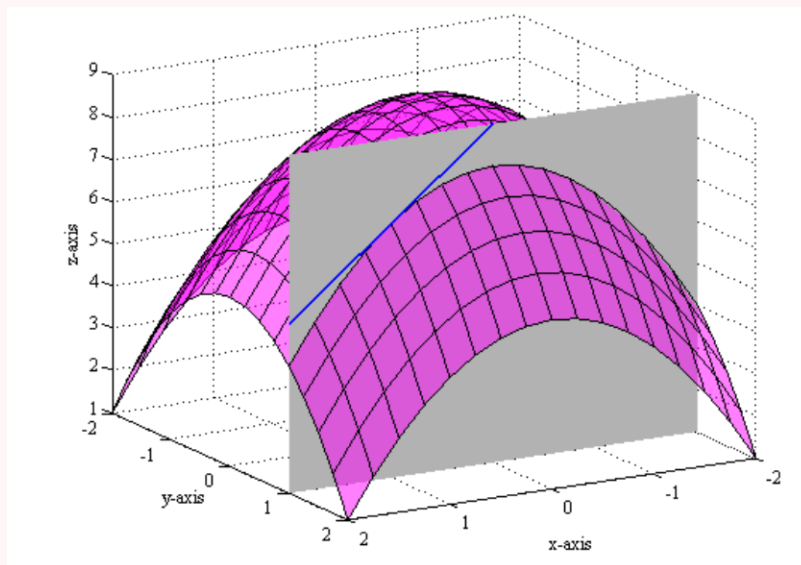
$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

- si indica con

$$f_y, \quad f'_y, \quad f_y(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$



Rappresentazione geometrica della derivata di una funzione  $f(x, y)$  nel punto di coordinate  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 1$ . È il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione  $z = F(x) = f(x, 1)$ .



**Esempi.**

- 1. Se  $f(x, y) = x^2y^2 - x^3 + y$  risulta  $f_x = 2xy^2 - 3x^2$ ,  $f_y = 2x^2y + 1$ .
- 2. Se  $f(x, y) = e^{2x+y}$  risulta  $f_x = 2e^{2x+y}$ ,  $f_y = e^{2x+y}$ .
- 3. Se  $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y)$  risulta  $f_x = \frac{2x}{x^2+3y}$ ,  $f_y = \frac{3}{x^2+3y}$ .

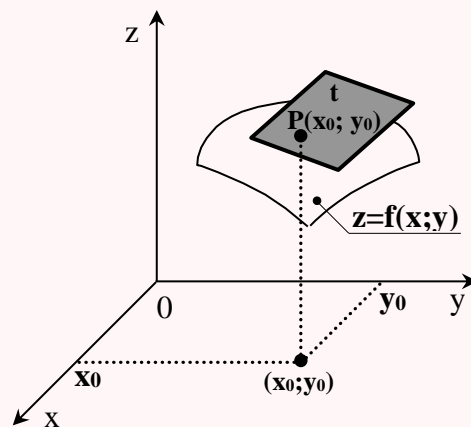
Si può dire che  $f_x$ , calcolata in  $P(x_0; y_0)$ , misura l'incremento che subisce la funzione  $f(x, y)$  per effetto della variazione della sola  $x$  nel punto  $P$ . Analogamente per  $f_y$ .

**DEFINIZIONE.** Data la funzione  $f(x, y)$  si chiama **gradiente** di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  la coppia formata dalle derivate parziali prime di  $f$ . Si scrive  $\text{grad } f = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ .  
A volte il gradiente si indica anche con  $\nabla f$ .

**DEFINIZIONE.** Data la funzione  $f(x, y)$ , si chiama **differenziale totale** della funzione  $f$  relativo al punto  $(x_0; y_0)$  e all'incremento  $\Delta x$  e  $\Delta y$  delle variabili, la quantità

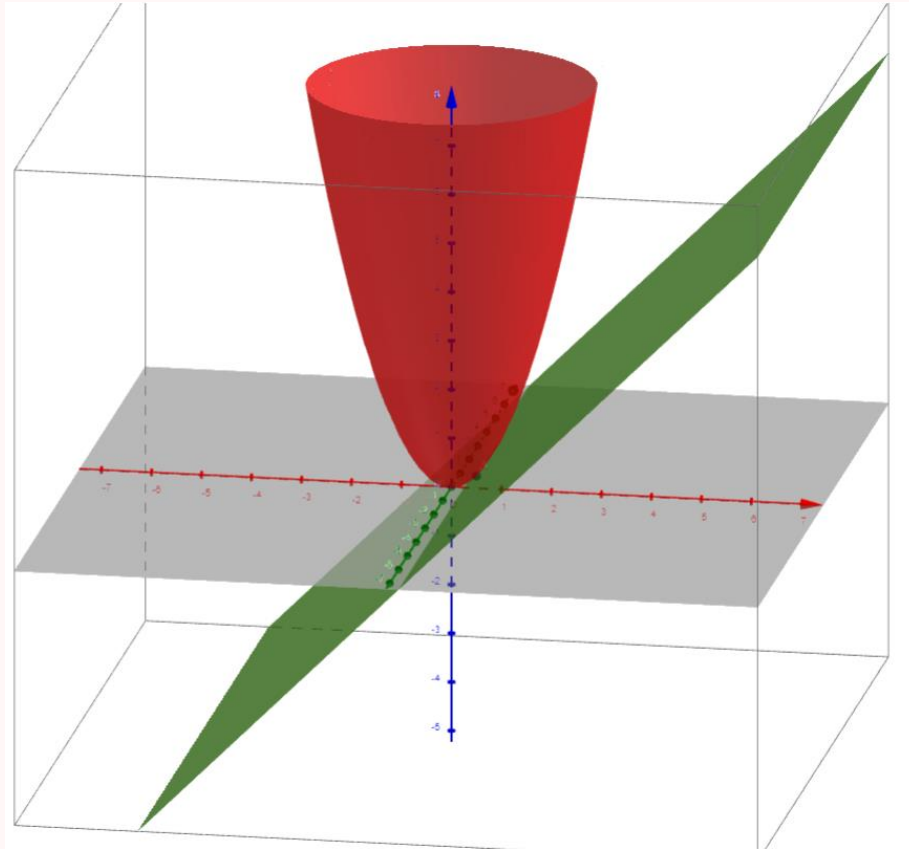
$$df = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

Il differenziale totale di  $f$  rappresenta una buona approssimazione dell'incremento della funzione, tanto migliore quanto più  $\Delta x$  e  $\Delta y$  sono piccoli. Geometricamente tale approssimazione equivale a "sostituire" la superficie, grafico della funzione, con il piano tangente nel punto  $P$ .



$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{piano tangente}}$$



**Esempio.** Calcolare il valore approssimato della funzione  $f(x,y)$  nel punto  $(1.5,3.4)$  sapendo che  $f(1,3) = 2.3$ ,  $f_x(1,3) = 0.2$ ,  $f_y(1,3) = 0.1$ .

$$f(1.5,3.4) - f(1,3) \approx f_x(1,3) \cdot 0.5 + f_y(1,3) \cdot 0.4$$

$$f(1.5,3.4) - 2.3 \approx 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.14 \Rightarrow f(1.5,3.4) \approx 2.44.$$

**Esempio.** Calcolare il valore approssimato della funzione  $f(x,y)$  nel punto  $(0.2,1.3)$  sapendo che  $f(0,1) = 2$ ,  $f_x(0,1) = -1$ ,  $f_y(0,1) = 0.7$ .

$$f(0.2,1.2) - f(0,1) \approx f_x(0,1) \cdot 0.2 + f_y(0,1) \cdot 0.3$$

$$f(0.2,1.2) - 2 \approx (-1) \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.3 = -0.2 + 0.21 = -0.09 \Rightarrow f(0.2,1.2) \approx 1.91.$$

## Derivate parziali seconde:

$$f_{xx} \quad , \quad f_{xy} \quad , \quad f_{yx} \quad , \quad f_{yy} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad .$$

Le derivate parziali seconde  $f_{xx}$  e  $f_{yy}$  sono dette **pure**, mentre le derivate seconde  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  sono dette **miste**.

### Esempi.

1. Se  $f(x, y) = x^2y + y^3 \quad \Rightarrow \quad f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2$   
 $\Rightarrow f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yx} = 2x, \quad f_{yy} = 6y.$

2. Se  $f(x, y) = y^2e^x + xy + 1$   
 $\Rightarrow f_x = y^2e^x + y, \quad f_y = 2ye^x + x$   
 $\Rightarrow f_{xx} = y^2e^x, \quad f_{xy} = 2ye^x + 1,$   
 $f_{yx} = 2ye^x + 1, \quad f_{yy} = 2e^x.$

3. Se  $f(x, y) = 3y - x^2 + xy^3 \quad \Rightarrow \quad f_x = -2x + y^3, \quad f_y = 3 + 3xy^2$   
 $\Rightarrow f_{xx} = -2, \quad f_{xy} = 3y^2, \quad f_{yx} = 3y^2, \quad f_{yy} = 6xy.$

Quando una funzione  $f(x, y)$  ha in un punto interno al suo dominio tanto la derivata  $f''_{xy}$  che la derivata  $f''_{yx}$ , queste possono risultare uguali oppure diverse. Sussiste però il seguente teorema.

### **TEOREMA di Schwarz**

*Se la funzione  $f(x, y)$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ammette entrambe le derivate parziali miste  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  in tutto un intorno del punto  $P(x_0, y_0)$ , interno all'insieme  $D$ , e se tali derivate seconde sono continue in  $(x_0, y_0)$ , allora  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .*

## RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI RELATIVI E DEI PUNTI DI SELLA

**DEFINIZIONE.** Se la funzione  $f(x, y)$  ammette derivate parziali seconde continue, si chiama **matrice hessiana** la matrice che raccoglie le derivate di  $f(x, y)$ :

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Si chiama **determinante hessiano**, o più brevemente "hessiano" di  $f(x, y)$  il determinante della matrice hessiana:

$$H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

Possiamo ora enunciare il teorema che ci dà un criterio per la ricerca dei punti estremanti di una funzione  $f(x, y)$ .

### TEOREMA (condizioni del prim'ordine o necessarie)

Sia  $f(x, y)$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  avente derivate parziali prime in un intorno circolare  $C$  del punto  $P(x_0, y_0)$ . Se  $P(x_0, y_0)$  è un punto di massimo oppure un punto di minimo, allora  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

N.B. L'annullamento del gradiente è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché  $P(x_0, y_0)$  sia punto di massimo o di minimo. Il punto  $P(x_0, y_0)$  è detto punto stazionario.

### TEOREMA (condizioni del second'ordine o sufficienti)

Sia  $f(x, y)$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  avente derivate parziali seconde continue in un intorno  $C$  del punto  $P(x_0, y_0)$  e sia  $P(x_0, y_0)$  un punto stazionario. Allora,

- Se  $H(x_0, y_0) > 0$ ,  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , allora il punto  $P$  è di minimo relativo.
- Se  $H(x_0, y_0) > 0$ ,  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , allora il punto  $P$  è di massimo relativo.
- Se  $H(x_0, y_0) < 0$ , allora il punto  $P$  è un punto a sella.
- Se  $H(x_0, y_0) = 0$ , allora non si può dire nulla senza ulteriori indagini su  $P$ .

**Esempio.** Determinare gli eventuali massimi, minimi relativi e punti di sella della funzione  $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 6y$ .

SOLUZIONE:

**Condizioni del prim'ordine (o necessarie)**

Risolviamo anzitutto il sistema  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 6y^2 - 6 = 0 \end{cases}$ .

Si trovano le seguenti soluzioni:  $P(0,1)$ ,  $Q(0,-1)$ ,  $R(1,1)$ ,  $S(1,-1)$ .

Questi sono i punti candidati ad essere di massimo, di minimo o punti a sella; per stabilirlo cerchiamo dapprima l'hessiano.

**Condizioni del second'ordine (o sufficienti)**

$$H(x, y) = (12x - 6) \cdot 12y = 144xy - 72y$$

- $H(P) = -72 < 0$  allora  $P$  è punto di sella;
- $H(Q) = 72 > 0$  e  $f_{xx}(Q) = -6 < 0$  allora  $Q$  è punto di massimo relativo;
- $H(R) = 72 > 0$  e  $f_{xx}(R) = 6 > 0$  allora  $R$  è punto di minimo relativo;
- $H(S) = -72 < 0$  allora  $S$  è punto di sella.

**ESEMPIO.** Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi e punti di sella della funzione  $f(x, y) = 4x^3 - y^3 - x^2 + 27y$ .

SOLUZIONE:

**Condizioni del prim'ordine**

Risolviamo anzitutto il sistema  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} 12x^2 - 2x = 0 \\ -3y^2 + 27 = 0 \end{cases}$ .

Si trovano le seguenti soluzioni:  $P(0, 3)$ ,  $Q(0, -3)$ ,  $R\left(\frac{1}{6}, 3\right)$ ,  $S\left(\frac{1}{6}, -3\right)$ .

Questi sono i punti candidati ad essere di massimo, di minimo o punti di sella; per stabilirlo cerchiamo dapprima l'hessiano.

**Condizioni del second'ordine**

$$H(x, y) = -144xy + 12y.$$

- $H(P) = 36 > 0$  e  $f_{xx}(P) = -2 < 0$  allora  $Q$  è punto di massimo relativo;
- $H(Q) = -36 < 0$  allora  $Q$  è punto a sella;
- $H(R) = -36 < 0$  allora  $R$  è punto a sella;
- $H(S) = 36 > 0$  e  $f_{xx}(S) = 2 > 0$  allora  $S$  è punto di minimo relativo.

**ESEMPIO.** Determinare massimi e minimi della funzione  $f(x, y) = 8 \ln x - x^2 + y^3 - 6y$ .

SOLUZIONE:

$$Dom f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} f_x = \frac{8}{x} - 2x = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8-2x^2}{x} = 0 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \text{ non accettabile perché } -2 \notin Dom f$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

**Condizioni del second'ordine**

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -8/x^2 - 2 & f_{xy}(x, y) &= 0 \\ f_{yx}(x, y) &= 0 & f_{yy}(x, y) &= 6y \end{aligned}$$

$$H(x, y) = (-8/x^2 - 2)(6y)$$

$H(2, \sqrt{2}) = (-8/4 - 2)(6\sqrt{2}) = -24\sqrt{2} < 0$  è un punto di sella

$H(2, -\sqrt{2}) = (-8/4 - 2)(-6\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} > 0$ . Poiché  $f_{xx}(2, -\sqrt{2}) = -4 < 0$  si tratta di un punto di massimo.

**ESEMPIO.** Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione  $f(x, y) = x + y + \ln(xy)$

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} f_x = 1 + y/(xy) = 1 + 1/x = 0 \\ f_y = 1 + x/(xy) = 1 + 1/y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Il punto stazionario è accettabile perché  $(-1) \cdot (-1) > 0$ .

**Condizioni del second'ordine**

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(x, y) = -1/x^2 & f_{xy}(x, y) = 0 \\ f_{yx}(x, y) = 0 & f_{yy}(x, y) = -1/y^2 \end{array}$$

$$H(x, y) = (-1/x^2)(-1/y^2) = \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$H(-1, -1) = 1 > 0.$$

Pertanto, poiché  $f_{xx}(-1, -1) = -1 < 0$ , il punto è di massimo.

**Applicazione (ricavo massimo)** La vostra azienda produce due modelli di altoparlanti, BANG e OLUFSEN. La domanda per ciascuno dipende in parte dal prezzo dell'altro. Le funzioni di domanda per BANG e per OLUFSEN sono, rispettivamente,

$$q_1(p_1, p_2) = 100000 - 100p_1 + 10p_2$$

$$q_2(p_1, p_2) = 150000 + 10p_1 - 100p_2$$

dove  $q_1, q_2$  rappresentano, rispettivamente, il numero di BANG e il numero di OLUFSEN venduti nell'arco di un anno, e  $p_1, p_2$  denotano i prezzi dei due modelli.

Quali prezzi devono essere praticati per BANG e OLUFSEN per ottenere il ricavo massimo?

SOLUZIONE:

$$R(p_1, p_2) = p_1q_1 + p_2q_2$$

---


$$\begin{aligned} R(p_1, p_2) &= p_1(100000 - 100p_1 + 10p_2) + p_2(150000 + 10p_1 - 100p_2) \\ &= 100000p_1 - 100p_1^2 + 10p_1p_2 + 150000p_2 + 10p_1p_2 - 100p_2^2 \\ &= 100000p_1 - 100p_1^2 + 20p_1p_2 + 150000p_2 - 100p_2^2 \end{aligned}$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$R_{p_1} = 100000 - 200p_1 + 20p_2$$

$$R_{p_2} = 20p_1 + 150000 - 200p_2$$

$$R_{p_1} = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{200p_1 - 100000}{20} = 10p_1 - 5000$$

$$R_{p_2} = 0 \Rightarrow 20p_1 + 150000 - 200(10p_1 - 5000) = -1980p_1 + 1150000 = 0$$

$$\Rightarrow -1980p_1 + 1150000 = 0 \Rightarrow p_1 = 580.81$$

$$\Rightarrow p_2 = 10(580.81) - 5000 = 808.08$$

Il punto  $(p_1, p_2) = (580.81; 808.08)$  è un punto stazionario

**Condizioni del second'ordine**

$$R_{p_1p_1} = -200 \quad R_{p_1p_2} = 20$$

$$R_{p_2p_1} = 20 \quad R_{p_2p_2} = -200$$

$$H(p_1, p_2) = (-200)(-200) - 400 > 0$$

Il punto stazionario è un punto di massimo perché  $R_{p_1p_1}(580.81, 808.08) = -200 < 0$

**Esempio.** Determinare la natura dei punti stazionari di  $f(x, y) = y(x - 1)^2$ .

SOLUZIONE:

Le derivate parziali prime sono

$$f_x(x, y) = 2y(x - 1)$$

$$f_y(x, y) = (x - 1)^2$$

**Condizioni del prim'ordine.**

$$\begin{cases} 2y(x - 1) = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

da cui  $x = 1$  e  $y$  qualsiasi. Esistono infiniti estremanti del tipo  $(1, y)$ .

**Condizioni del second'ordine.**

$$f_{xx}(x, y) = 2y, \quad f_{xy}(x, y) = 2(x - 1)$$

$$f_{yx}(x, y) = 2(x - 1), \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

$H(x, y) = -4(x - 1)^2 \Rightarrow H(1, y) = 0$ . Non si può dire nulla della natura dei punti stazionari.

## MASSIMI E MINIMI VINCOLATI (O CONDIZIONATI)

Talvolta si presenta il problema di trovare il massimo e il minimo di una funzione  $f(x, y)$  le cui **variabili indipendenti sono legate tra loro da certe condizioni (o vincoli)**. Noi tratteremo solo casi in cui il vincolo è espresso da una equazione, ossia le variabili indipendenti  $x$  e  $y$  devono verificare una equazione  $g(x; y) = 0$ .

*Si vuole produrre 1 tonnellata di pane combinando farina di farro e farina di grano in modo da massimizzare il profitto. La funzione del profitto è data da  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$ , e con  $x$  tonnellate di farina di farro e  $y$  tonnellate di farina di grano si producono  $g(x, y) = x + y$  tonnellate di pane.*

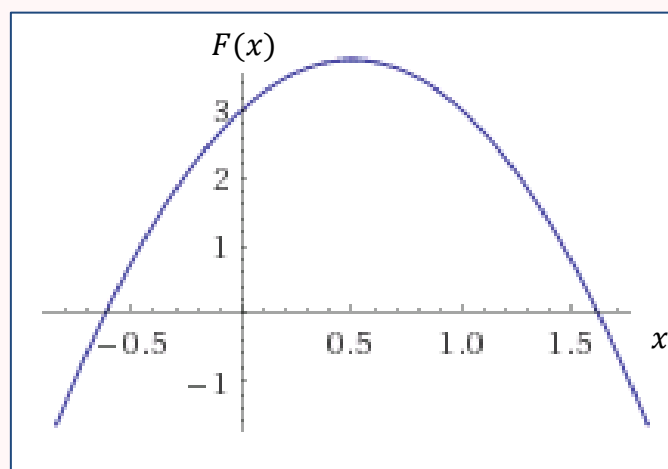
Il problema è quello di determinare il massimo della funzione  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$  subordinatamente al vincolo  $x + y = 1$ , cioè  $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ .

### SOLUZIONE:

Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando  $y$  in funzione di  $x$ , si ha  $y = 1 - x$ , da cui

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x, 1 - x) = x(1 - x) - x^2 - (1 - x)^2 + 4 \\ &= x - 2x^2 - (1 - x)^2 + 4 \\ &= x - 2x^2 - (1 + x^2 - 2x) + 4 \\ &= -3x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

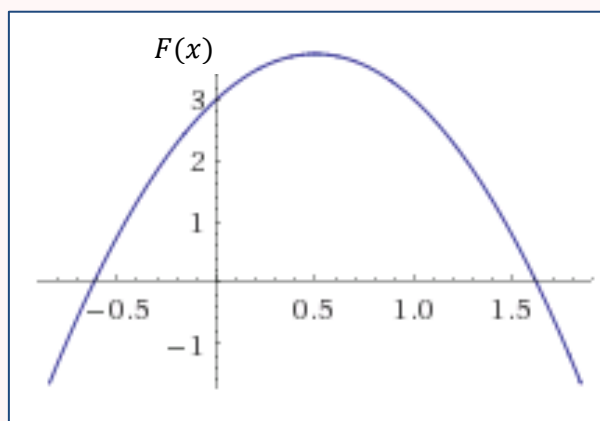
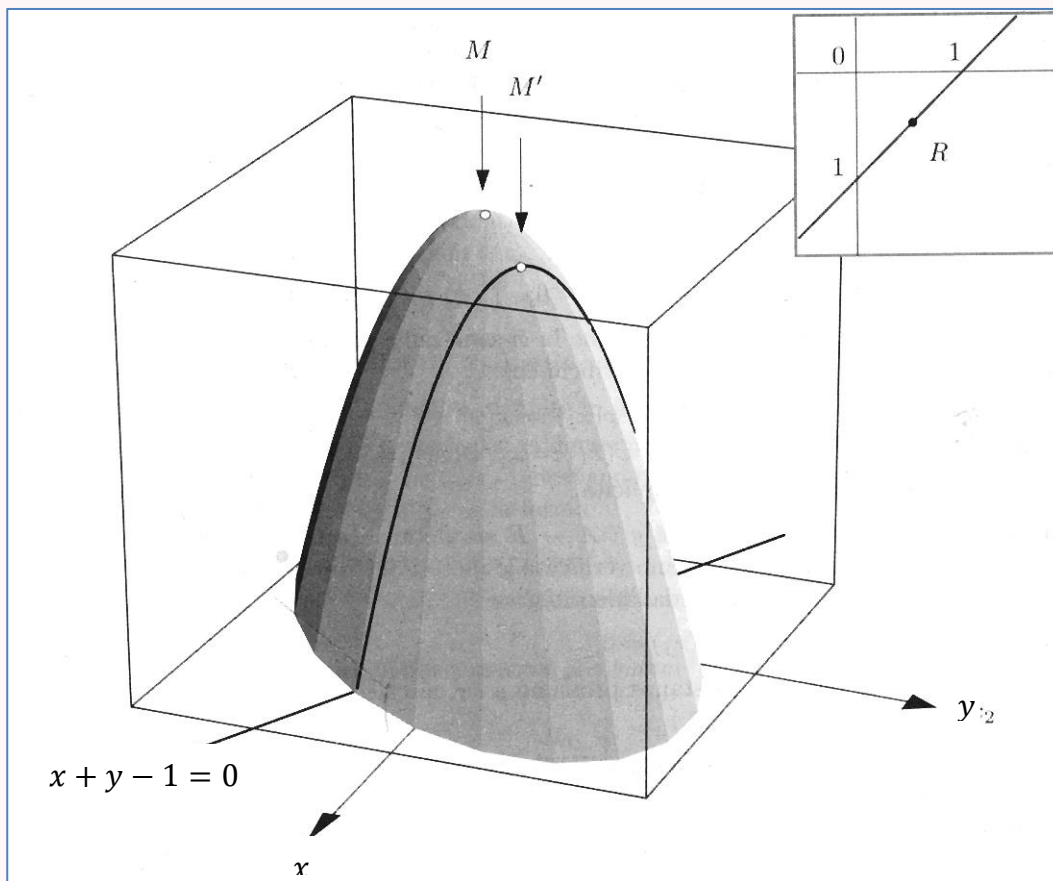
Quindi  $F'(x) = -6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$  che è un punto di massimo perché  $F''(1/2) = -6 < 0$ .

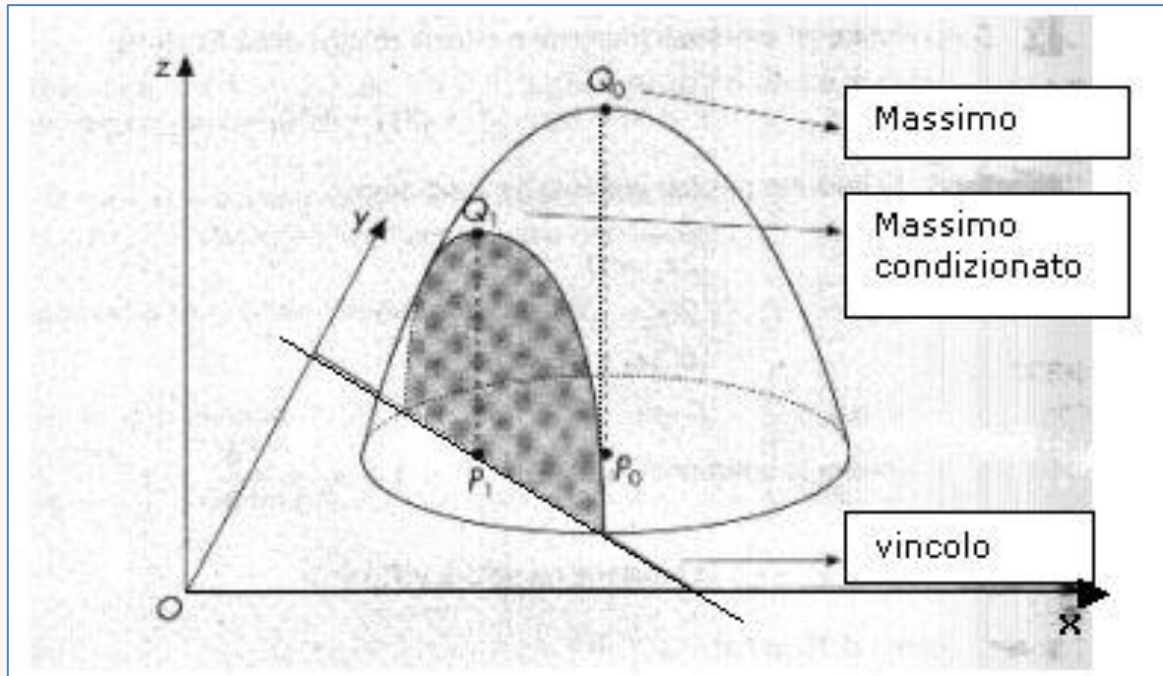


A questo corrisponde  $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Pertanto, il punto di massimo vincolato per  $f(x, y)$  è  $P(1/2, 1/2)$  e il massimo della funzione è  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4} = 3.75.$$

Il massimo è individuato dal punto  $M' \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$





**Esempio 1.** Determinare il minimo della funzione  $f(x; y) = x^2 + y^2$  soggetta al vincolo  $x + y - 1 = 0$  (ossia i punti del dominio della  $f$  sono tutti e soli i punti della retta di equazione  $x + y - 1 = 0$ ).

SOLUZIONE:

Dal vincolo possiamo ricavare ad esempio  $x$  in funzione di  $y$ . Si ha  $x = 1 - y$ . Sostituendo in  $f(x, y) = x^2 + y^2$  si ottiene una funzione nella sola  $y$ :

$$\begin{aligned} F(y) &= f(1 - y, y) = (1 - y)^2 + y^2 = 1 + y^2 - 2y + y^2 \\ &= 2y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Basta ora determinare il minimo di questa funzione ad una sola variabile.

$$F'(y) = 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 0.5$$

allora il punto di ascissa  $y = 0.5$  è un punto di minimo relativo poiché

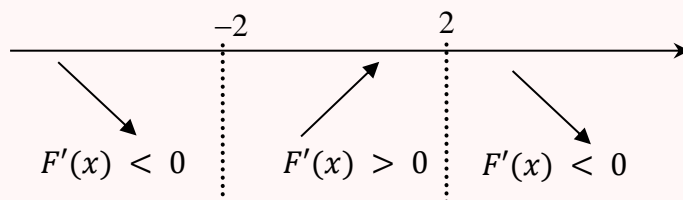
$$F''(y) = 4 > 0 \quad \forall y.$$

Il corrispondente punto sul vincolo è  $P(0.5, 0.5)$ ; in esso la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  assume il valore  $f(0.5, 0.5) = 0.25 + 0.25 = 0.5$ .

**Esempio 2.** Determinare gli estremi relativi della funzione  $f(x, y) = xy$  soggetta al vincolo  $x^2 + y - 12 = 0$ .

SOLUZIONE:

Dal vincolo ricaviamo  $y = -x^2 + 12$  e sostituendo nella funzione otteniamo  $F(x) = -x^3 + 12x$ ; cerchiamo gli estremi relativi di questa funzione studiandone la derivata prima. Risulta  $F'(x) = -3x^2 + 12$ . Si ha  $F'(x) = 0$  per  $x = -2$  e  $x = 2$ ;  $F'(x) > 0$  per  $x \in (-2, 2)$  (in questo intervallo la funzione  $F$  è crescente);  $F'(x) < 0$  per  $x \in (-\infty, -2)$  e  $x \in (2, +\infty)$  (in questi intervalli la funzione  $F$  è decrescente).



Pertanto, il punto  $x = -2$  è un minimo relativo, il punto  $x = 2$  è un massimo relativo. I corrispondenti punti di minimo e massimo relativo della funzione di partenza sul vincolo sono rispettivamente i punti  $P(-2, 8)$  e  $Q(2, 8)$ ; in essi la funzione  $f(x, y)$  assume i valori  $f(P) = -16$ ,  $f(Q) = 16$ .

**Esempio 3.** Determinare gli estremi relativi della funzione  $f(x; y) = xy + x^2$  soggetta al vincolo  $x + 2y - 4 = 0$ .

SOLUZIONE: dal vincolo ricaviamo  $x = -2y + 4$  e sostituendo nella funzione otteniamo

$F(y) = 2y^2 - 12y + 16$ , cerchiamo gli estremi relativi di questa funzione studiandone la derivata prima. Risulta  $F'(y) = 4y - 12$ .

$F'(y) = 0$  per  $y = 3$ ,  $F(y) > 0$  per  $y > 3$  (funzione crescente),  $F'(y) < 0$  per  $y < 3$

(funzione decrescente). Pertanto, il punto  $y = 3$  è un minimo relativo; il corrispondente

punto sul vincolo è  $P(-2; 3)$  e in esso la funzione assume il valore minimo  $f(P) = -2$ .

### Applicazione (geometria)

Un filo metallico lungo 12 cm è tagliato in due pezzi, uno dei quali viene curvato per formare un cerchio e l'altro per formare un quadrato. Indicando con  $x$  il perimetro della circonferenza e con  $y$  il perimetro del quadrato, si trovi in quale modo deve essere tagliato il filo affinché la somma delle aree così formata sia

- massima
- minima

SOLUZIONE:

è necessario esprimere formalmente le aree della circonferenza e del quadrato.

Come noto, l'area della circonferenza è  $\pi \cdot r^2$  (dove  $r$  denota il raggio).

Esprimiamo il raggio  $r$  in termini della variabile  $x$ :

$$2\pi \cdot r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

L'area della circonferenza è allora  $\pi \cdot r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$ .

Come noto, l'area del quadrato è  $l^2$  (dove  $l$  è il lato). Esprimiamo il lato  $l$  in termini della variabile  $y$ :  $y = 4l \Rightarrow l = \frac{y}{4}$ . L'area del quadrato è allora  $l^2 = \frac{y^2}{16} = \frac{y^2}{16}$ .

Massimizzare la somma delle aree vuole dire massimizzare la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} \quad \text{sotto il vincolo } x + y = 12.$$

Il vincolo implica  $y = 12 - x$ , che rappresenta il perimetro del quadrato. Sostituendo nell'espressione della funzione, si ottiene  $f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(12-x)^2}{16}$ .

Si tratta di una funzione il cui dominio è  $Domf = [0, 12]$ . Condizione necessaria per l'esistenza di estremanti:  $f'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2x}{4\pi} + \frac{2(12-x)(-1)}{16} \\
 &= \frac{x}{2\pi} + \frac{-12+x}{8} \\
 &= \frac{8x - 24\pi + 2\pi x}{16\pi} \\
 &= \frac{4x - 12\pi + \pi x}{8\pi} = 0 \Rightarrow x(4 + \pi) = 12\pi \Rightarrow x = \frac{12\pi}{4 + \pi} = 5.279 \\
 f'(x) &> 0 \text{ se e solo se } x > 5.279,
 \end{aligned}$$

quindi la funzione  $f(x)$  è (strettamente) crescente per  $x > 5.279$  e (strettamente) decrescente per  $x < 5.279$ . Il punto  $x = 5.279$  è dunque un punto di minimo per la funzione. La funzione assume valore minimo quando la circonferenza ha perimetro  $x = 5.279$  e il quadrato ha perimetro  $y = 12 - x = 12 - 5.279 = 6.721$ .

La somma delle aree è in questo caso

$$f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(12-x)^2}{16} = 5.279^2 \cdot \frac{1}{12.566} + 6.271^2 \cdot \frac{1}{16} = 4.675.$$

Tale somma è invece massima agli estremi del dominio, vista l'analisi di crescita della funzione.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{(12)^2}{16} = 9 \\
 f(12) &= \frac{144}{4\pi} = 11.46
 \end{aligned}$$

Il punto  $x=0$  è un punto di massimo relativo (locale), il punto  $x=12$  è un punto di massimo assoluto, L'area è massima quando si utilizza tutto il filo per la circonferenza.  $(x,y)=(12,0)$  è punto di massimo assoluto.

---

**Il vincolo può essere espresso nella forma  $g(x, y) < 0$**

Si procede come per i problemi di massimizzazione/minimizzazione libera e poi si escludono i punti che non soddisfano il vincolo. In sostanza, questo problema equivale al problema di determinazione di massimi e minimi liberi dove il dominio naturale della funzione viene ristretto:

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) < 0\}$$

**Esempio.** Calcolare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2y + yx$$

subordinatamente al vincolo  $g(x, y) = x + y < 0$ .

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy + y = 0 \\ f_y(x, y) &= x^2 + x = 0 \end{aligned}$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava  $x = 0$  o  $x = -1$ . Sostituendo nella prima si ottiene  $y = 0$  in entrambi i casi. Pertanto, si ottengono due punti stazionari:  $P(0,0), Q(-1,0)$ .  $P$  non è accettabile perché  $0 + 0 = 0$ ,  $Q$  è accettabile perché  $-1 + 0 < 0$ .

**Condizioni del second'ordine**

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y & f_{xy} &= 2x + 1 \\ f_{yx} &= 2x + 1 & f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= 2y \cdot 0 - (2x + 1)^2 = -(2x + 1)^2 \\ H(-1, 0) &= -(-2 + 1)^2 = -1 < 0 \end{aligned}$$

$Q$  è un punto a sella.

## E se il vincolo è del tipo $g(x, y) \leq 0$ ?

Si divide il problema in due sottoproblemi:

$$1) \quad g(x, y) < 0$$

$$2) \quad g(x, y) = 0$$

e si cercano separatamente gli eventuali massimi/minimi interni (caso 1) e di frontiera (caso 2)

**Esempio.** Determinare gli estremi della funzione  $f(x, y) = x^2 + xy - x^4 + y^2$  subordinatamente al vincolo  $y \leq x^2$

SOLUZIONE:

$$1) \quad g(x, y) = y - x^2 < 0$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + y - 4x^3 = 0 \\ f_y(x, y) &= x + 2y = 0 \end{aligned}$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} 2x + y - 4x^3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

da cui  $y = -x/2$  e, sostituendo nella seconda equazione,  $x = 0$  o  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$ . Pertanto, si trovano i punti stazionari  $P_1(0,0), P_2\left(\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\right), P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$ . Solo  $P_2$  e  $P_3$  soddisfano il vincolo, quindi sono accettabili.

**Condizioni del second'ordine**

$$f_{xx} = 2 - 12x^2, \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 2$$

$$H(x, y) = 3 - 24x^2$$

$$H(P_2) = 3 - 24 \cdot \frac{3}{8} = -6 < 0$$

$$H(P_3) = 3 - 24 \cdot \frac{3}{8} = -6 < 0$$

$P_2$  e  $P_3$  sono punti di sella. Il valore assunto da  $f(x, y)$  nei due punti di sella è  $f(P_2) = f(P_3) = \frac{9}{64} = 0.1406$ .

$$2) \quad g(x, y) = y - x^2 = 0$$

$$f(x, y) = F(x) = x^3 + x^2 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2/3.$$

$F''(x) = 6x + 2$ ,  $F''(0) = 2 > 0$  e  $F''(-\frac{2}{3}) = -2 < 0$ . Allora  $x = 0$  è punto di minimo per  $F$  e  $x = -2/3$  è punto di massimo per  $F$ . Inoltre, essendo

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0, \quad x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{9}$$

il punto  $Q_1(0,0)$  è punto di minimo per  $f$  e il punto  $Q_2(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}) = (-0.6666, 0.4444)$  è punto di massimo per  $f$ . I corrispondenti minimo e massimo sono, rispettivamente,  $F(Q_1) = 0, F(Q_2) = 0.148148$ .

Riassumendo, la funzione  $f$  presenta due punti di sella,  $P_2$  e  $P_3$  (interno al dominio considerato) e due estremanti sulla frontiera: un punto di minimo  $Q_1$  e un punto di massimo  $Q_2$ .

**Applicazione (software).** La Beffa&Burla Software House vende i suoi migliori prodotti, CELIA e CILECCA, realizzando un profitto pari a

$$f(x, y) = 20x + 40y - 0.1(x^2 + y^2)$$

dove  $x$  e  $y$  rappresentano le rispettive quantità vendute dei due programmi. Se è possibile produrre un massimo di 400 copie complessive dei due programmi, quale combinazione condurrà al massimo profitto?

Il vincolo è dato da  $x + y \leq 400$ . In altri termini, consideriamo il dominio costituito dai punti del piano  $(x, y)$  che giacciono al di sotto della retta oppure sulla retta di equazione  $x + y = 400$ .

SOLUZIONE:

$$1) \quad g(x, y) = x + y - 400 < 0$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 20 - 0.2x = 0 \\ f_y(x, y) = 40 - 0.2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases} \quad 100+200 < 400 \quad \text{quindi } (100, 200) \text{ è accettabile}$$

**Condizioni del second'ordine**

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(x, y) = -0.2 & f_{xy}(x, y) = 0 \\ f_{yx}(x, y) = 0 & f_{yy}(x, y) = -0.2 \end{array}$$

$$H(x, y) = (-0.2)^2$$

$$H(100, 200) = (-0.2)^2 > 0$$

Pertanto, poiché  $f_{xx}(100, 200) = -0.2 < 0$ , il punto è di massimo locale. Il valore assunto dalla funzione in  $(100, 200)$  è  $f(100, 200) = 20(100) + 40(200) - 0.1(100^2 + 200^2) = 5000$

**2)  $g(x, y) = x + y - 400 = 0$** 

Si ha  $y = 400 - x$  e quindi

$$\begin{aligned} f(x, y) = F(x) &= 20x + 40(400 - x) - 0.1(x^2 + (400 - x)^2) \\ &= 20x + 16000 - 40x - 0.1(x^2 + 160000 + x^2 - 800x) \end{aligned}$$

$$= 60x - 0.2x^2 \Rightarrow F'(x) = 60 - 0.4x = 0 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow F''(x) = -0.4 < 0$$

$$y = 400 - 150 = 250$$

Il punto stazionario  $(150, 250)$  è di massimo relativo e il valore assunto dalla funzione  $f$  è  $f(150, 250) = 20(150) + 40(250) - 0.1(150^2 + 250^2) = 4500$ .

**E se il vincolo è del tipo  $g(x, y) \geq 0$ ?**

Il problema si risolve come appena visto, dal momento che

equivale a

$$\begin{aligned} g(x, y) &\geq 0 \\ -g(x, y) &\leq 0 \end{aligned}$$

(ad esempio,  $x^2 - y^3 - 7 \geq 0$  si riscrive come  $y^3 - x^2 + 7 \leq 0$ )

## ALTRE APPLICAZIONI ALL'ECONOMIA

### Esempio 1.

Un'impresa vuole produrre 140 pezzi di un dato prodotto e vuole combinare i fattori di produzione,  $x$  e  $y$ , in modo da minimizzare i costi. La funzione costo è data da  $C = 5x^2 + 2xy + 5y^2 + 800$  mentre la funzione di produzione è  $g(x; y) = 4x + 2y$ .

Determinare la produzione di  $x$  e  $y$  in modo da minimizzare i costi.

#### SOLUZIONE:

Si tratta di determinare il minimo della funzione  $C$  sotto il vincolo  $140 = 4x + 2y$ . Dal vincolo ricaviamo  $y = 70 - 2x$  e sostituendo si ottiene

$$C = 5x^2 + 2x(70 - 2x) + 5(70 - 2x)^2 + 800 = 21x^2 - 1260x + 25300$$

ed essendo il suo grafico una parabola convessa, ha il suo minimo nel vertice che ha ascissa  $x = -\frac{-1260}{42} = 30$  da cui segue  $y = 70 - 60 = 10$ . Dunque la funzione costo ha il suo

minimo per una produzione di  $x = 30$  e di  $y = 10$ . Tale costo minimo vale  $C(30; 10) = 6400$ .

### Esempio 2.

Un'impresa produce due beni  $x$  e  $y$  venduti, rispettivamente, ai prezzi fissi  $p_1$  e  $p_2$  e le cui leggi di domanda sono espresse da

$$\begin{cases} x = 700 - 2p_1 + p_2 \\ y = 500 + 3p_1 - 4p_2 \end{cases};$$

la funzione costo è data da  $C = 140x + 190y$ . Determinare i valori di  $x$  e  $y$  per i quali il profitto risulta massimo.

#### SOLUZIONE:

Il profitto è dato da  $\pi = R - C$  e poiché il ricavo  $R$  è dato da  $R = p_1x + p_2y$ , ricaviamo  $p_1$  e  $p_2$  in funzione di  $x$  e  $y$ .

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \\ y = 500 + 3p_1 - 4(x - 700 + 2p_1) = 3300 - 4x - 5p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \\ y = 500 + 3p_1 - 4(x - 700 + 2p_1) = 3300 - 4x - 5p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \Rightarrow p_2 = x - 700 + 2(660 - 0.8x - 0.2y) \Rightarrow p_2 = 620 - 0.6x - 0.4y \\ p_1 = 660 - 0.8x - 0.2y \end{cases}$$

La funzione profitto è dunque

$$\pi = R - C = p_1x + p_2y - C = -0,8x^2 - 0,4y^2 - 0,8xy + 520x + 430y.$$

Cerchiamo anzitutto i punti che annullano contemporaneamente le derivate parziali prime di  $\pi$  e poi studiamo tali punti con l'hessiano.

$$\begin{cases} \pi'_x = -1,6x - 0,8y + 520 = 0 \\ \pi'_y = -0,8y - 0,8x + 430 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione  $x = 112,5$ , e  $y = 425$ .

Studiamo il punto  $P(112,5; 425)$ .

$$H = \begin{vmatrix} -1,6 & -0,8 \\ -0,8 & -0,8 \end{vmatrix} = 0,64$$

$H$  risulta costante e quindi anche  $H(P) = 0,64 > 0$ , inoltre  $\pi'_{xx}(P) = -1,6 < 0$  allora si conclude che  $P(112,5; 425)$  è un punto di massimo; in esso la funzione profitto vale  $\pi(112,5; 425) = 120625$ .

### Esempio 3.

Si consideri un'impresa, in regime di monopolio, che produce una merce utilizzando due impianti aventi rispettivamente funzione di costo  $C_1 = 10x$  e  $C_2 = 0,25y^2$ . Sia data la domanda di mercato  $t = 200 - 2p$  (da cui  $p = 100 - 0,5t$ ) con  $t = x + y$ .

Determinare le quantità  $x$  e  $y$  per avere il massimo profitto.

SOLUZIONE:

Il profitto è dato da  $\pi = R - C_1 - C_2$  e  $R = tp = t(100 - 0,5t) = 100t - 0,5t^2$  ossia  $R = 100(x + y) - 0,5(x + y)^2$ .

Si ottiene pertanto:

$$\pi = 100(x + y) - 0,5(x + y)^2 - 10x - 0,25y^2 = -0,5x^2 - 0,75y^2 - xy + 90x + 100y.$$

Cerchiamo i valori di  $x$  e  $y$  che annullano le derivate prime di  $\pi$ :

$$\begin{cases} \pi'_x = -x - y + 90 = 0 \\ \pi'_y = -1,5y - x + 100 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova  $x = 70$  e  $y = 20$ .

Studiamo il punto  $P(70; 20)$  con l'hessiano:  $H = -1(-1,5) - (-1)(-1) = 0,5$

$H$  risulta costante e quindi anche  $H(P) = 0,5 > 0$ , inoltre  $\pi'_{xx}(70; 20) = -1 < 0$  e quindi in corrispondenza dei valori  $x = 70$  e  $y = 20$  la funzione profitto  $\pi$  raggiunge il massimo. La produzione complessiva è dunque  $t = 70 + 20 = 90$  che sarà venduta al prezzo  $p = 100 - 45 = 55$  producendo il profitto massimo di  $\pi(70; 20) = R - C_1 - C_2 = 4150$ .

### Esempio 4.

Massimizzare la funzione di utilità  $U = xy + x + 2y$  con il vincolo di bilancio  $2x + 5y = 51$ .

SOLUZIONE:

Dal vincolo otteniamo  $y = \frac{51 - 2x}{5}$  e sostituendo in  $U$  si ottiene  $U = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{52}{5}x + \frac{102}{5}$

che è una parabola concava verso il basso e quindi ha il suo massimo nel vertice per  $x = 13$ . Dunque la funzione di utilità ha il suo massimo per  $x = 13$  e  $y = 5$  e assume il valore  $U(13; 5) = 88$ .

## GEOMETRICAMENTE:

Si può ritrovare geometricamente lo stesso risultato disegnando nel piano le curve (dette di indifferenza)

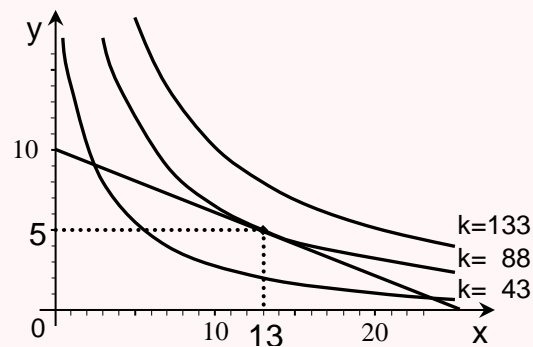
$$1. \quad xy + x + 2y = k$$

che sono iperboli equilateri di equazione  $y = \frac{-x+k}{x+2}$  e disegnando la curva di bilancio espressa dal vincolo

$$2. \quad 2x + 5y = 51 .$$

Il massimo di utilità si ha per i valori di  $k$  che rendono la (1) tangente alla (2) che esprime il vincolo. Le coordinate dei punti di tangenza sono i valori di  $x$  e  $y$  che rendono massima la funzione utilità.

Nel grafico sono riportate le curve relative a tre diversi valori di  $k$ . ( $k = 43$  ;  $k = 88$  ;  $k = 133$  )



**ESERCIZI DA SVOLGERE**

1. Trovare i massimi e i minimi relativi delle seguenti funzioni a due variabili:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$

b)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + x$

c)  $f(x, y) = x - x^2 - 2y^3 - 4xy$

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$

e)  $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy + x$

f)  $f(x, y) = xy(2x + y - 2)$

g)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

h)  $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

i)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

l)  $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

2. Trovare i massimi e i minimi vincolati delle seguenti funzioni a due variabili, col vincolo a fianco indicato:

a)  $f(x, y) = xy$

$2x + 3y - 5 = 0$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

c)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

$x - y + 2 = 0$

d)  $f(x, y) = xy^2$

$x + 2y = 1$

e)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$

$x + y + 3 \leq 0$

f)  $f(x, y) = x + 2y$

$x^2 + y = 5$

g)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$4x^2 - 2y = 0$

**Soluzione esercizio e)**

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$$

$$1) \quad g(x, y) = x + y + 3 < 0$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} f_x = 2x - y + 1 = 0 \\ f_y = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2(2x + 1) - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$g(-1, -1) = -1 - 1 + 3 > 0 \Rightarrow$  il punto stazionario non è accettabile.

$$2) \quad g(x, y) = x + y + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x + y + 3 = 0 &\Rightarrow y = -x - 3 \\ \Rightarrow f(x, y) = F(x) &= x^2 + (-x - 3)^2 - x(-x - 3) + x - x - 3 - 4 \end{aligned}$$

$$F(x) = x^2 + (-x - 3)^2 + x^2 + 3x - 7 = 3x^2 + 9x + 2$$

$$F'(x) = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3/2$$

$$F''(x) = 6 > 0 \Rightarrow F''(-3/2) = 6 > 0$$

Il punto stazionario è di minimo per  $F(x)$ .

$$y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

Il punto  $P(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$  è di minimo per la funzione  $f(x, y)$ .

## METODO DI LAGRANGE

Per la determinazione dei massimi e minimi vincolati esiste anche un **metodo generale** applicabile anche se il vincolo non è esplicitabile rispetto ad una delle variabili: è il cosiddetto

### metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Data la funzione  $f(x, y)$  soggetta al vincolo  $g(x, y) = 0$ , si costruisce la funzione ausiliaria, detta *funzione lagrangiana*:

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si determinano successivamente le soluzioni  $(\lambda; x; y)$  del sistema

$$\begin{cases} L'_\lambda = 0 \\ L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Gli eventuali punti  $(x_0, y_0)$  di massimo o di minimo della funzione  $f(x, y)$  soggetta al vincolo  $g(x, y) = 0$  si trovano fra le soluzioni di tale sistema. Per ognuna di queste soluzioni  $(\lambda_0, x_0, y_0)$  si calcola il determinante hessiano:<sup>1</sup>

$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} L_{\lambda,\lambda} & L_{\lambda,x} & L_{\lambda,y} \\ L_{x,\lambda} & L_{x,x} & L_{x,y} \\ L_{y,\lambda} & L_{y,x} & L_{y,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L_{x,x} & L_{x,y} \\ g'_y & L_{y,x} & L_{y,y} \end{vmatrix}$$

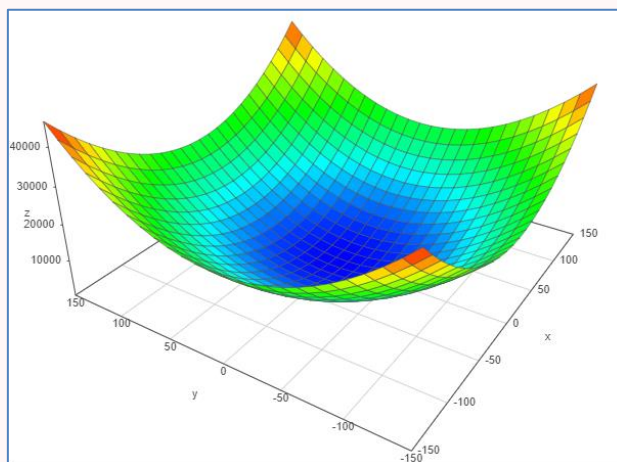
$H$  è anche detto "hessiano orlato".

- Se  $H(\lambda_0, x_0, y_0) > 0$  allora in  $P(x_0; y_0)$  si ha un massimo;
- Se  $H(\lambda_0, x_0, y_0) < 0$  allora in  $P(x_0; y_0)$  si ha un minimo;
- Se  $H(\lambda_0, x_0, y_0) = 0$  allora non si può dire nulla (occorrono ulteriori indagini).

---

<sup>1</sup> Per determinare il valore del determinante si ricorda che:  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$ .

**Esempio 1.** Determinare massimi e minimi di  $f(x, y) = (x - 4)^2 + y^2$  subordinatamente al vincolo  $x^2 = y^2 + 4$ .



SOLUZIONE:

Il lagrangiano è

$$L(\lambda, x, y) = (x - 4)^2 + y^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 4)$$

**Condizioni del prim'ordine**

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ L'_x = 2(x - 4) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ L'_x = 2(x - 4) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

La terza equazione fornisce  $\lambda = 1$  o  $y = 0$

$$(A) \begin{cases} x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ 2(x - 4) + 2\lambda x = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B) \begin{cases} x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ 2(x - 4) + 2\lambda x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(A) \begin{cases} x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ 2(x - 4) + 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B) \begin{cases} x = \pm 2 \\ 2(x - 4) + 2\lambda x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(A) \begin{cases} -y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B1) \begin{cases} x = 2 \\ -4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(B2) \begin{cases} x = -2 \\ -12 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di (A) e (B1) coincidono. I punti stazionari sono allora due:  $P_1 = (2,0)$  e  $P_2 = (-2,0)$ , i quali sono candidati ad essere punti di massimo o minimo per  $f(x, y)$ .

### Condizioni del second'ordine

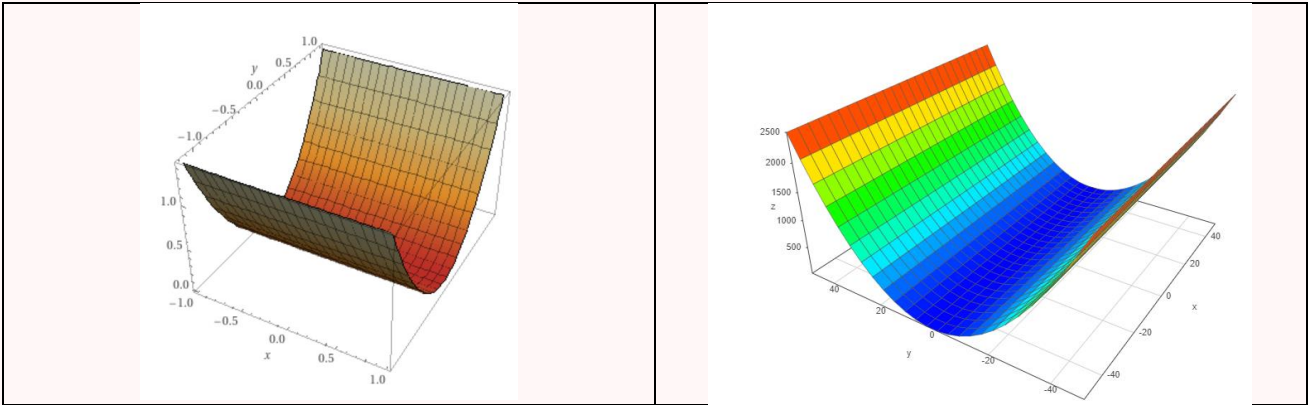
$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & -2y \\ 2x & 2 + 2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = -(4y^2(2 + 2\lambda) + 4x^2(2 - 2\lambda))$$

$H(1,2,0) = 0$  non si può dire nulla di  $P_1$

$H(-3,-2,0) = -128 < 0$   $P_2$  è un punto di minimo.

### Esempio 2.

Determinare i massimi e minimi della funzione  $f(x; y) = y^2$  soggetta al vincolo  $x^2 + y^2 - 1 = 0$



### SOLUZIONE:

La funzione Lagrangiana è  $L(\lambda; x; y) = y^2 + \lambda (x^2 + y^2 - 1)$ . Gli eventuali punti di massimo e minimo vanno cercati fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

Si ottengono quattro soluzioni:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$P(1,0)$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$Q(-1,0)$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$R(0,1)$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$S(0,-1)$

Calcoliamo l'hessiano:

$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2 + 2\lambda \end{vmatrix} = -8x^2 - 8\lambda x^2 - 8\lambda y^2 .$$

$H(P) = -8 < 0$  allora  $P$  è punto di minimo;

$H(Q) = -8 < 0$  allora  $Q$  è punto di minimo;

$H(R) = 8 > 0$  allora  $R$  è punto di massimo;

$H(S) = 8 > 0$  allora  $S$  è punto di massimo.