

ESERCIZI DI MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2024-25

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management



UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Fascicolo n. 5

Elementi di teoria dell'integrazione

- *Integrale indefinito*
 - *Integrazione diretta (primitive immediate e primitive quasi immediate)*
 - *Integrazione per sostituzione e integrazione per parti*
 - *Integrazione di funzioni razionali fratte (radici reali e radici complesse)*
 - *Esercizi vari*
- *Integrale definito*
 - *Teorema fondamentale del calcolo integrale*
 - *Calcolo di aree*
 - *Calcolo approssimato di aree mediante somma di Riemann*

Carlo Alberto Magni

magni@unimore.it

Dario Vezzali

dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Integrazione elementare

Esercizio 10.1, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int x^5 dx$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, si tratta di un integrale elementare. Applicando la formula generale

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$ della Tabella 1 otteniamo

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$$

III) $\int \frac{x^4 - 8x^3 + 7}{x^4} dx$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha lo stesso grado del denominatore. Applicando semplicemente la proprietà di omogeneità dell'integrale (ovvero "portando fuori" le costanti moltiplicative) e la proprietà di additività dell'integrale (ovvero "spezzando" il calcolo della primitiva di una somma di funzioni nel calcolo della somma di due o più primitive) otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 8x^3 + 7}{x^4} dx &= \int dx - 8 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int \frac{1}{x^4} dx \\ &= x - 8 \ln |x| + 7 \cdot \left(\frac{x^{-3}}{-3} \right) + c \\ &= x - 8 \ln |x| - \frac{7}{3x^3} + c \end{aligned}$$

$$IV) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Dopo aver riscritto l'integrale nella forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

applicando alla formula generale $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con $n \neq -1$, otteniamo

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$V) \int (e^x + 1) dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Applicando semplicemente la proprietà di additività dell'integrale, otteniamo

$$\int (e^x + 1) dx = \int e^x dx + \int dx = e^x + x + c$$

Esercizio 10.2, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$I) \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui numeratore è la derivata prima del denominatore. Applicando semplicemente il Teorema 1 (ovvero

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \text{ otteniamo}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln|x^2+x| + c$$

$$II) \int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore non è esattamente la derivata prima del denominatore. Tuttavia, possiamo moltiplicare e dividere per 2 al fine di applicare il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx &= \frac{2}{2} \cdot \int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+11} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+8x+11| + c \end{aligned}$$

$$III) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, sapendo che la derivata prima di $f(x) = \ln x$ è $f'(x) = \frac{1}{x}$, possiamo applicare direttamente il Teorema 1. Otteniamo

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$$

$$IV) \quad \int \frac{e^x}{3-e^x} dx$$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore non è esattamente la derivata prima del denominatore. Tuttavia, possiamo moltiplicare e dividere per (-1) al fine di applicare il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{3-e^x} dx &= \frac{(-1)}{(-1)} \cdot \int \frac{e^x}{3-e^x} dx \\ &= - \int \frac{-e^x}{3-e^x} dx \\ &= - \ln|3-e^x| + c \end{aligned}$$

$$VI) \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx$$

Soluzione.

In questo caso, possiamo aggiungere e sottrarre e^x a numeratore e applicare poi la proprietà di additività dell'integrale al fine di applicare, successivamente, il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx \\ &= \int \frac{1+e^x}{1+e^x} dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\
 &= x - \ln(1+e^x) + c
 \end{aligned}$$

Si noti che possiamo scrivere $\ln(1+e^x)$ utilizzando le parentesi tonde anziché il valore assoluto in quanto l'argomento del logaritmo è positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10.2, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\text{III) } \int e^{-x+3} dx$$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per (-1) al fine di applicare il Teorema 4 (ovvero $\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$). Otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int e^{-x+3} dx &= \frac{(-1)}{(-1)} \cdot \int e^{-x+3} dx \\
 &= - \int (-1) \cdot e^{-x+3} dx \\
 &= -e^{-x+3} + c
 \end{aligned}$$

$$\text{IV) } \int (2x+4)^6 dx$$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 2 al fine di applicare il Teorema 2. Otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int (2x+4)^6 dx &= \frac{2}{2} \cdot \int (2x+4)^6 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int 2(2x+4)^6 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+4)^7}{7} + c \\
 &= \frac{(2x+4)^7}{14} + c
 \end{aligned}$$

$$V) \int \sqrt{3x+1} \, dx$$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 3 al fine di applicare il Teorema 2.

Otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{3x+1} \, dx &= \frac{3}{3} \cdot \int \sqrt{3x+1} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int 3\sqrt{3x+1} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int 3(3x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{2}{9} \sqrt{(3x+1)^3} + c
 \end{aligned}$$

$$VI) \int \frac{1}{\sqrt{3x-7}} \, dx$$

Soluzione.

Anche in questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 3 al fine di applicare il

Teorema 2. Otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{3x-7}} \, dx &= \frac{3}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{3x-7}} \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int 3(3x-7)^{-\frac{1}{2}} \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3x-7} + c \end{aligned}$$

$$\text{VIII) } \int \frac{\ln^4 x}{x} dx$$

Soluzione.

In questo caso, essendo $1/x$ la derivata prima di $f(x) = \ln x$, possiamo applicare direttamente il Teorema 2. Otteniamo

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^4 dx = \frac{(\ln x)^5}{5} + c = \frac{\ln^5 x}{5} + c$$

$$\text{XIV) } \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

Soluzione.

Anche in questo caso, essendo $1/x$ la derivata prima di $f(x) = 1 + \ln x$ possiamo applicare direttamente il Teorema 2. Otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \frac{1}{x} (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + c$$

Esercizio. Determinare l'integrale indefinito di

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

[Clicca qui per la soluzione](#)

Integrazione per sostituzione

Esercizio 10.11, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$I) \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^x + 1} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^x + 1} dx &= \int \frac{t^2 + 3t}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{t(t + 3)}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{t + 3}{t + 1} dt \\ &= \int \frac{t}{t + 1} dt + 3 \int \frac{1}{t + 1} dt \end{aligned}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 al numeratore del primo integrale e otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt + 3 \int \frac{1}{t + 1} dt &= \int \frac{t + 1}{t + 1} dt - \int \frac{1}{t + 1} dt + 3 \int \frac{1}{t + 1} dt \\ &= \int dt + 2 \int \frac{1}{t + 1} dt \\ &= t + 2 \ln|t + 1| + c \\ &= e^x + 2 \ln(e^x + 1) + c \end{aligned}$$

Si noti che possiamo scrivere $2 \ln(e^x + 1)$ utilizzando le parentesi tonde anziché il valore assoluto in quanto l'argomento del logaritmo è positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

$$II) \int \frac{2e^{1-x}}{1+e^{-2x}} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Poniamo $e^{-x} = t$, ovvero $x = -\ln t$, da cui $dx = -\frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{2e^{1-x}}{1+e^{-2x}} dx &= \int \frac{2e \cdot e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx \\ &= \int \frac{2e \cdot t}{1+t^2} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\ &= -2e \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -2e \arctan(t) + c \\ &= -2e \arctan(e^{-x}) + c \end{aligned}$$

$$V) \int \frac{2e^x}{(e^x-2)(e^x+1)} dx$$

Soluzione.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{2e^x}{(e^x-2)(e^x+1)} dx &= \int \frac{2t}{(t-2)(t+1)} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dt \end{aligned}$$

A questo punto, dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui il polinomio a denominatore, $P_2(x)$, è di grado 2 ed ha 2 radici distinte, $t = 1$ e $t = 2$.

Otteniamo

$$2 \int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dt = 2 \int \left(\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1} \right) dt$$

In particolare, deve essere

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}$$

da cui

$$A(t+1) + B(t-2) = 1$$

che riscriviamo come uguaglianza tra due polinomi di grado 1:

$$(A+B)t + (A-2B) = 0t + 1.$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$$

Quindi,

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{t+1}$$

e

$$\begin{aligned} 2 \int \left(\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1} \right) dt &= 2 \left(\frac{1}{3} \int \frac{1}{t-2} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} dt \right) \\ &= \frac{2}{3} \ln|t-2| - \frac{2}{3} \ln|t+1| + c \\ &= \frac{2}{3} \ln|e^x - 2| - \frac{2}{3} \ln(e^x + 1) + c \end{aligned}$$

Integrazione per parti

Esercizio 10.9, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int x^2 e^x dx$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo x^2 come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$. Ora, deriviamo $f(x)$ e scegliamo una qualsiasi primitiva di $g'(x) = e^x$. Allora, $f'(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Allora, $f'(x) = 1$ e, di nuovo, $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} x^2 e^x - 2 \int x e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + c \end{aligned}$$

III) $\int x \ln^2 x dx$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo $\ln^2 x$ come fattore finito e x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln^2 x$ e $g'(x) = x$.

Allora $f'(x) = 2 \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int x \ln^2 x \, dx &= \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int 2 \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x \, dx\end{aligned}$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo $\ln x$ come fattore finito e x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = x$. Allora, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + c \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + c\end{aligned}$$

Esercizio 10.10, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

VI) $\int e^x \cos x \, dx$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo $\cos x$ come fattore finito e e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = e^x$.

Allora $f'(x) = -\sin x$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int e^x \cos x \, dx = \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo $\sin x$ come fattore finito e e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = e^x$. Allora $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Portando $-\int e^x \cos x \, dx$ a sinistra del segno di uguaglianza (e sommando la costante c), otteniamo

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x + c$$

da cui, dividendo per 2,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + k, \quad k = c/2$$

Integrazione di funzioni razionali fratte (radici reali)

Esercizio 10.6, pag. 272 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$IV) \quad \int \frac{3x+1}{x^2-5x+6} \, dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è minore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Si ha $P_2(x) = 0$ per $x = 2$ o per $x = 3$, quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte:

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 3)} dx$$

Utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

Si ha

$$A(x - 3) + B(x - 2) = 3x + 1$$

che possiamo riscrivere come uguaglianza tra due polinomi di primo grado:

$$(A + B)x - 3A - 2B = 3x + 1$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -7, B = 10$$

Quindi,

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = -\frac{7}{x - 2} + \frac{10}{x - 3}$$

e

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \right) dx &= -7 \int \frac{1}{x - 2} dx + 10 \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= -7 \ln|x - 2| + 10 \ln|x - 3| + c \end{aligned}$$

Esercizio 10.8, pag. 272 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$I) \int \frac{x^2+7x+14}{x+2} dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$ (per un ripasso del metodo "in linea" per la divisione tra polinomi si rimanda al seguente video del Prof. Magni: [Divisione tra polinomi - Metodo "in linea"](#)). In particolare,

$$\frac{x^2 + 7x + 14}{x + 2} = x + 5 + \frac{4}{x + 2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 7x + 14}{x + 2} dx &= \int (x + 5) dx + \int \frac{4}{x + 2} dx \\ &= \int x dx + 5 \int dx + 4 \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x + 4 \ln|x + 2| + c \end{aligned}$$

$$V) \int \frac{3x^3-50x^2+81x-27}{x^2-16x+15} dx$$

Soluzione.

Anche in questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$. In particolare,

$$\frac{3x^3 - 50x^2 + 81x - 27}{x^2 - 16x + 15} = 3x - 2 + \frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15}$$

e

$$\int \frac{3x^3 - 50x^2 + 81x - 27}{x^2 - 16x + 15} dx = \int 3x dx - \int 2 dx + \int \frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15}$$

I primi integrali sono determinabili direttamente:

$$\int \frac{3x^3 - 50x^2 + 81x - 27}{x^2 - 16x + 15} dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \int \frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15}$$

Concentriamoci ora sul terzo addendo del membro di destra. In esso, il grado del numeratore, $P_1(x) = 4x + 3$, è minore del grado del denominatore, $P_2(x) = x^2 - 16x + 15$. Si ha $P_2(x) = 0$ per $x = 1$ o $x = 15$ quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte. Utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15} = \frac{4x + 3}{(x - 1)(x - 15)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 15}$$

Si ha

$$A(x - 15) + B(x - 1) = 4x + 3$$

che riscriviamo come uguaglianza tra due polinomi di primo grado:

$$(A + B)x - 15A - B = 4x + 3.$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ -15A - B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{9}{2}$$

Quindi,

$$\frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x - 15}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - 2x + \int \frac{4x + 3}{x^2 - 16x + 15} dx &= \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x - 15} dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2} \ln|x - 1| + \frac{9}{2} \ln|x - 15| + c \end{aligned}$$

Esercizio 11.2, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale definito:

$$I) \int_1^5 \frac{3}{x(x+3)} dx$$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è minore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Si ha $P_2(x) = 0$ per $x = 0$ o per $x = 3$, quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte:

$$\int_1^5 \frac{3}{x(x+3)} dx = \int_1^5 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \right) dx$$

Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$A(x + 3) + Bx = 3$$

che riscriviamo come uguaglianza tra polinomi di primo grado:

$$(A + B)x + 3A = 0x + 3$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_1^5 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \right) dx &= \int_1^5 \frac{1}{x} dx - \int_1^5 \frac{1}{x+3} dx \\ &= [\ln|x|]_1^5 - [\ln|x+3|]_1^5 \\ &= \ln 5 - \ln 1 - (\ln 8 - \ln 4) \end{aligned}$$

Applicando alcune proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\ln 5 - \ln 1 - (\ln 8 - \ln 4) = \ln 5 - \ln \frac{8}{4} = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte (radici complesse)

Esercizio.

L'integrale indefinito di $f(x) = \frac{2-x}{7+x^2}$ è

- A. $\ln(x^2 + 7)^{-0.5} + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$
- B. $\frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \ln(x^2 + 7)^{-0.5} + c$
- C. $\ln(x^2 + 7) + \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$
- D. $\ln(x^2 + 7)^{0.5} + \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$

Soluzione.

Notiamo che il polinomio $P_2(x) = 7 + x^2$ non si annulla per nessun valore di x reale: le sue radici sono complesse. Non possiamo dunque applicare il metodo di integrazione dei fratti semplici. Allora, cerchiamo di semplificare l'integrale applicando la proprietà di additività dell'integrale:

$$\int \frac{2-x}{7+x^2} dx = \int \frac{2}{7+x^2} dx - \int \frac{x}{7+x^2} dx$$

Lavoriamo ora separatamente sui due integrali. Il primo integrale è

$$\int \frac{2}{7+x^2} dx.$$

Raccogliamo 7 a fattor comune e applichiamo la proprietà di omogeneità dell'integrale per "portare fuori" le costanti moltiplicative dal primo integrale:

$$\int \frac{2}{7+x^2} dx = \frac{2}{7} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{7}} dx = \frac{2}{7} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} dx$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{1}{\sqrt{7}}$, che è la derivata di $f(x) = x/\sqrt{7}$, al fine di applicare il Teorema 5; otteniamo

$$\frac{2}{7} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} dx = \frac{2}{7} \int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} dx$$

da cui

$$\frac{2}{7} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$$

Ora lavoriamo sul secondo integrale:

$$-\int \frac{x}{7+x^2} dx.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo integrale per 2 al fine di applicare il Teorema 2:

$$-\int \frac{x}{7+x^2} dx = -\int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{7+x^2} dx$$

da cui

$$-\int \frac{x}{7+x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{7+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(7+x^2) + c.$$

Possiamo allora scrivere

$$\int \frac{2-x}{7+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2} \ln(7+x^2) + c$$

Applicando, infine, la proprietà dei logaritmi detta “regola dell’esponente”, ovvero $\log_a(b^c) = c \log_a b$, otteniamo

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2} \ln(7+x^2) + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \ln(7+x^2)^{-0.5} + c$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	B

Esercizio 10.13, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$III) \quad \int \frac{1}{16+x^2} dx$$

Soluzione.

Prima di tutto, raccogliamo 16 a fattor comune:

$$\int \frac{1}{16+x^2} dx = \int \frac{1}{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} dx.$$

Ora possiamo procedere in due modi alternativi:

1. risolvendo l'integrale così ottenuto per sostituzione
2. applicando il Teorema 5, ovvero $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + c$.

Integrazione per sostituzione

Poniamo $\frac{x}{4} = t$, ovvero $x = 4t$, da cui $dx = 4dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\frac{1}{16} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{1 + t^2} \cdot 4dt = \frac{1}{4} \arctan(t) + c = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

Teorema 5

Moltiplichiamo e dividiamo per $1/4$, che è la derivata di $f(x) = x/4$, al fine di applicare il Teorema 5. Otteniamo

$$\frac{1}{16} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} dx = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} dx = \frac{4}{16} \int \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

Esercizi vari

Esercizio. Si determini la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = 2x^3$ tale che

- $F(0) = 4$
- $F(1) = 2$.

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Esercizio 10.14, pag. 274 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ passante per il punto $P(0, 2)$.

Soluzione.

Determiniamo innanzi tutto l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx.$$

Poniamo $\sqrt[3]{1-x^3} = t$, ovvero $x = \sqrt[3]{1-t^3} = (1-t^3)^{\frac{1}{3}}$, da cui

$$dx = \frac{1}{3} (1-t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3t^2) = -\frac{t^2}{(\sqrt[3]{1-t^3})^2} dt.$$

Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx &= \int \frac{(\sqrt[3]{1-t^3})^2}{t} \cdot \left(-\frac{t^2}{(\sqrt[3]{1-t^3})^2} \right) dt \\ &= -\int t dt \\ &= -\frac{t^2}{2} + c \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{1-x^3})^2 + c \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-x^3)^2} + c \end{aligned}$$

Tra tutte le funzioni del tipo $-\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-x^3)^2} + c$, dobbiamo identificare quell'unica $F(x)$ tale che assume il valore 2 in $x = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} F(0) &= -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-0^3)^2} + c = 2 \\ &-\frac{1}{2} + c = 2 \\ &c = 2 + \frac{1}{2} \\ &c = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Pertanto, la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P(0, 2)$ è data da

$$F(x) = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \frac{5}{2}.$$

Esercizio 6, prova finale MGF del 14/06/2022

Sia $f(x) = \ln x + x$, allora una sua primitiva è

- A. $F(x) = x \ln x + x^2$
- B. $F(x) = x + \ln x^2$
- C. $F(x) = x \ln x - x + 0.5x^2$
- D. $F(x) = x - \ln x - 0.5x^2$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Applicando inizialmente la proprietà di additività dell'integrale otteniamo

$$\int (\ln x + x) dx = \int \ln x dx + \int x dx$$

Ora integriamo per parti il primo integrale prendendo $\ln x$ come fattore finito ed 1 come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$. Allora $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int \ln x dx + \int x dx &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx + \int x dx \\ &= x \ln x - \int dx + \int x dx \\ &= x \ln x - x + \frac{x^2}{2} + c \\ &= x \ln x - x + 0.5x^2 + c \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	C	...

Esercizio 6, prova finale MGF del 30/06/2022

Sia $f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x}}$. Si determini l'integrale indefinito:

- A. $-2x^{\frac{1}{2}} + 0.4x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{1.5} + c$
 B. $0.4x^{2.5} - \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c$
 C. $0.4x^{2.5} - \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c$
 D. $\frac{2}{3}x^{1.5} + 0.4x^{2.5} - 2x^{0.5} + c$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Applicando inizialmente le proprietà di omogeneità e additività dell'integrale otteniamo

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Successivamente, applicando alcune proprietà delle potenze, otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{(2-\frac{1}{2})} dx + \int x^{(1-\frac{1}{2})} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c \\ &= 0.4x^{2.5} + \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	D	...

Esercizio 3, prova MGF del 17/01/2023

Si determini l'integrale indefinito di $f(x) = xe^x$:

- A. $x(e^x + 1) + c$
- B. $e^x(x + 1) + c$
- C. $e^x(x - 1) + c$
- D. $x(e^x - 1) + c$

Soluzione.

$$\int xe^x dx$$

Integriamo per parti il primo integrale prendendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Allora $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c \\ &= e^x(x - 1) + c \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	C

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Esercizio 11.1, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$I) \int_{-1}^1 (x^5 - x) dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Applicando la proprietà di additività dell'integrale (Proprietà 4), ovvero

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^5 - x) dx &= \int_{-1}^1 x^5 dx - \int_{-1}^1 x dx \\ &= \left[\frac{x^6}{6} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$II) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln(2x) dx$$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo $\ln(2x)$ come fattore finito ed x^2 come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln(2x)$ e $g'(x) = x^2$. Allora $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3}{3}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln(2x) dx &= \left[\ln(2x) \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 \cdot \ln(2 \cdot 1) - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \overbrace{\ln \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right)}^{=0} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{7}{72} \end{aligned}$$

$$V) \int_0^1 (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx$$

Soluzione.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione e, successivamente, la proprietà di additività dell'integrale (Proprietà 4) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx &= \int (t + t^{-1} + t^2) \cdot \frac{1}{t} dt \\
 &= \int \left(1 + \frac{1}{t^2} + t\right) dt \\
 &= t - \frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} + c
 \end{aligned}$$

Sostituendo e^x a t ,

$$\int (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx = e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{2} + c$$

Considerando gli estremi di integrazione,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx &= \left[e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\
 &= [e^x]_0^1 - \left[\frac{1}{e^x} \right]_0^1 + \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\
 &= (e^1 - e^0) - \left(\frac{1}{e^1} - \left(\frac{1}{e^0} \right) \right) + \frac{e^{2 \cdot 1}}{2} - \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} \\
 &= e - 1 - \frac{1}{e} + 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= e - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{VI) } \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx$$

Soluzione.

Al fine di applicare il Teorema 2, moltiplichiamo e dividiamo per 2, che è la derivata di $f(x) = 2x + 1$; otteniamo

$$\int_0^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 2\sqrt{2x+1} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{(2 \cdot 2 + 1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(2 \cdot 0 + 1)^3} \right) \\
&= \frac{1}{3} (\sqrt{125} - 1) \\
&= \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}$$

Esercizio 11.3, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'integrale definito $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$ essendo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una funzione definita a tratti, per cui sfruttiamo la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, ovvero

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad c \in [a, b]$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 f(x) \, dx &= \int_{-2}^0 (-x + 4) \, dx + \int_0^2 (x + 2) \, dx \\
&= -\int_{-2}^0 x \, dx + 4 \int_{-2}^0 dx + \int_0^2 x \, dx + 2 \int_0^2 dx \\
&= -\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + 4[x]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 2[x]_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + 4 \cdot (0 - (-2)) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 2 \cdot (2 - 0) \\
&= 2 + 8 + 2 + 4 = 16
\end{aligned}$$

Calcolo di aree

Esercizio 11.9, pag. 302 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'area della parte di piano individuata dall'asse x e dalle seguenti curve (negli intervalli a fianco indicati):

$$III) y = \frac{\ln(x+3)}{x+3} \text{ in } \left[-\frac{5}{2}, 0\right]$$

Soluzione.

È innanzi tutto necessario studiare il segno della funzione $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ nell'intervallo indicato. Trattandosi di una funzione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

$$(N) \quad \ln(x+3) > 0 \text{ se } x > -2;$$

$$(D) \quad x+3 > 0 \text{ se } x > -3.$$

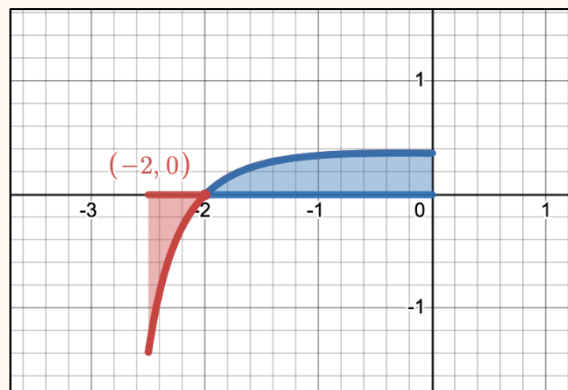
Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
(N)	(-)	(-)	(+)
(D)	(-)	(+)	(+)
$\frac{(N)}{(D)}$	(+)	(-)	(+)

La condizione $\frac{\ln(x+3)}{x+3} > 0$ è verificata per $x < -3$ e per $x > -2$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-2, +\infty)$ e negativa nell'intervallo $(-3, -2)$. In particolare,

- $f(x) < 0$ in $(-\frac{5}{2}, -2)$
- $f(x) > 0$ in $(-2, 0)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare, tenendo conto che la derivata di $g(x) = \ln(x+3)$ è $g'(x) = 1/(x+3)$ e che la funzione integranda può essere riscritta come $g'(x) \cdot g(x)$, possiamo applicare il Teorema 2:

$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= - \int_{-\frac{5}{2}}^{-2} \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx + \int_{-2}^0 \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx \\
 &= - \left[\frac{(\ln(x+3))^2}{2} \right]_{-\frac{5}{2}}^{-2} + \left[\frac{(\ln(x+3))^2}{2} \right]_{-2}^0 \\
 &= - \left[\frac{(\ln(-2+3))^2}{2} - \frac{(\ln(-\frac{5}{2}+3))^2}{2} \right] + \left[\frac{(\ln(0+3))^2}{2} - \frac{(\ln(-2+3))^2}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\ln 3)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 2)^2 + \frac{1}{2} \ln^2 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} \ln^2 3 \\
 &= \frac{1}{2} (\ln^2 2 + \ln^2 3) \approx 0.8437
 \end{aligned}$$

$$V) y = \sqrt{x} - x \text{ in } [0, 2]$$

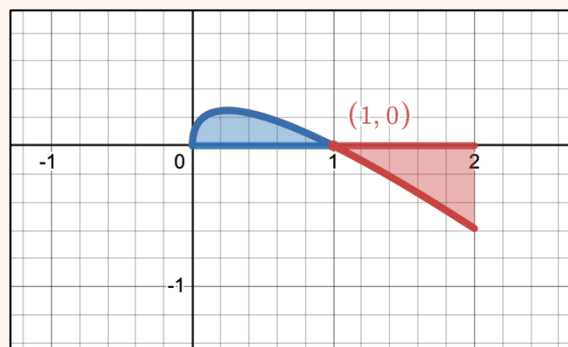
[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

È innanzi tutto necessario studiare il segno della funzione $f(x) = \sqrt{x} - x$ nell'intervallo indicato. Si ha $\sqrt{x} - x > 0$ se e solo se $\sqrt{x} > x$, ossia $x > x^2$, da cui $x - x^2 > 0$. Questo polinomio è positivo per $x \in (0, 1)$. Pertanto,

- $f(x) > 0$ in $(0, 1)$
- $f(x) < 0$ in $(1, 2)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare,

$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx - \int_1^2 (\sqrt{x} - x) dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x dx - \int_1^2 \sqrt{x} dx + \int_1^2 x dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3} + \frac{2}{3}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} \approx 0.4477
\end{aligned}$$

$$\text{VI) } y = \frac{x^2-2x}{x+1} \text{ in } [0, 3]$$

Soluzione.

Prima di procedere con il calcolo dell'area, è necessario studiare il segno della funzione

$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1}$ nell'intervallo indicato. Trattandosi di una funzione fratta, la condizione $f(x) > 0$ è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

$$(N) \quad x^2 - 2x > 0 \text{ se } x < 0 \text{ oppure se } x > 2;$$

$$(D) \quad x + 1 > 0 \text{ se } x > -1.$$

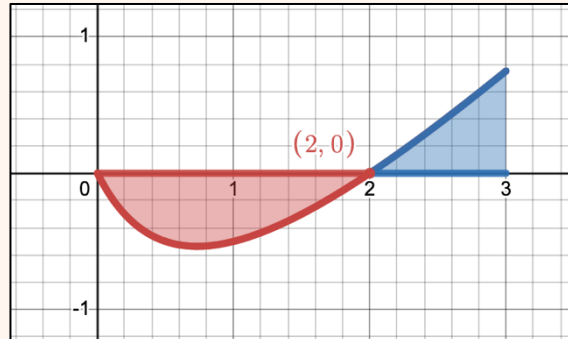
Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
(N)	(+)	(+)	(-)	(+)
(D)	(-)	(+)	(+)	(+)
$\frac{(N)}{(D)}$	(-)	(+)	(-)	(+)

La condizione $\frac{x^2-2x}{x+1} > 0$ è verificata per $-1 < x < 0$ e per $x > 2$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-1, 0)$ e $(2, +\infty)$ e negativa negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, 2)$. In particolare,

- $f(x) < 0$ in $(0, 2)$
- $f(x) > 0$ in $(2, 3)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare,

$$\text{Area} = - \int_0^2 \frac{x^2 - 2x}{x + 1} dx + \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{x + 1} dx$$

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$. In particolare,

$$\frac{x^2 - 2x}{x + 1} = (x - 3) + \frac{3}{x + 1}$$

da cui

$$\begin{aligned} \text{Area} &= - \left(\int_0^2 (x - 3) dx + \int_0^2 \frac{3}{x + 1} dx \right) + \left(\int_2^3 (x - 3) dx + \int_2^3 \frac{3}{x + 1} dx \right) \\ &= - \left(\int_0^2 x dx - 3 \int_0^2 dx + 3 \int_0^2 \frac{1}{x + 1} dx \right) + \left(\int_2^3 x dx - 3 \int_2^3 dx + 3 \int_2^3 \frac{1}{x + 1} dx \right) \\ &= - \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 - 3[x]_0^2 + 3[\ln|x + 1|]_0^2 \right) + \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 - 3[x]_2^3 + 3[\ln|x + 1|]_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} - 3 \cdot (2 - 0) + 3 \cdot (\ln 3 - \ln 1)\right) + \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} - 3 \cdot (3 - 2) + 3 \cdot (\ln 4 - \ln 3) \\
&= -2 + 6 - 3 \ln 3 + \frac{9}{2} - 2 - 3 + 3 \ln 4 - 3 \ln 3 \\
&= \frac{7}{2} + 3 \ln 4 - 6 \ln 3 \\
&= \frac{7}{2} + \ln \frac{4^3}{3^6} \\
&= \frac{7}{2} + \ln \frac{2^6}{3^6} \\
&= \frac{7}{2} + \ln \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\
&= \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{2}{3} \approx 1.0672
\end{aligned}$$

Esercizio 11.10, pag. 302 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = 4x^2$ e il grafico della funzione $g(x) = 8x + 5$ e il primo quadrante del piano cartesiano.

Soluzione.

I grafici delle due funzioni si intersecano per x tale che $f(x) = g(x)$, cioè

$$4x^2 = 8x + 5 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 5 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{8} = \frac{8 + \sqrt{144}}{8} = \frac{8 + 12}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

e

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{8} = \frac{8 - \sqrt{144}}{8} = \frac{8 - 12}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

a cui corrispondono, rispettivamente, i valori

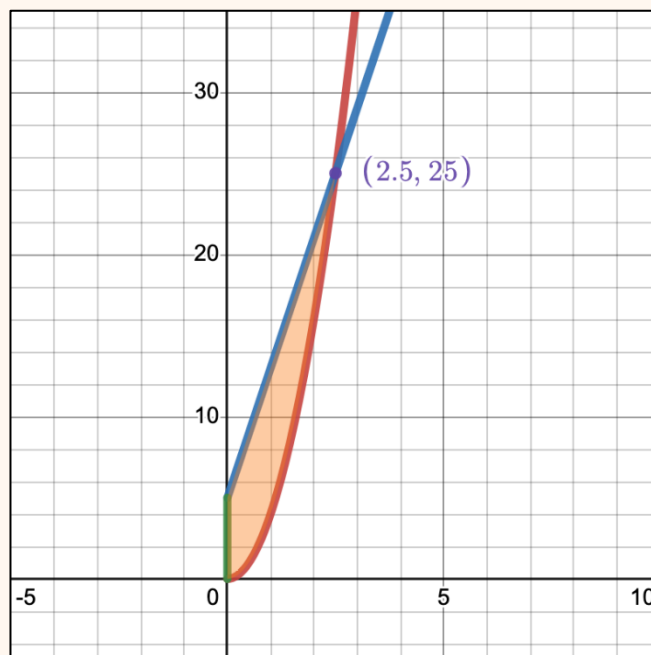
$$f(2.5) = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25$$

e

$$f(-0.5) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Tuttavia, la soluzione $(-0.5, 1)$ non è accettabile perché tale punto non appartiene al primo quadrante del piano cartesiano. Pertanto, l'unica soluzione accettabile è $(2.5, 25)$. Inoltre, $4x^2 - 8x - 5 < 0$ per $x \in (0, 2.5)$, cioè $f(x) < g(x)$ per $x \in (0, 2.5)$, quindi il grafico di $g(x)$ giace al di sopra del grafico di $f(x)$ nell'intervallo considerato. L'area da calcolare è rappresentata nella figura sottostante dalla regione ombreggiata in arancione compresa tra il grafico di $g(x)$ (in blu), il grafico di $f(x)$ (in rosso) e il primo quadrante del piano cartesiano (in verde la porzione di asse y che delimita la regione). In particolare, essa è data dalla differenza

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (8x + 5 - 4x^2) dx.$$



Pertanto,

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{5}{2}} (8x + 5) dx - \int_0^{\frac{5}{2}} 4x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{\frac{5}{2}} x \, dx + 5 \int_0^{\frac{5}{2}} dx - 4 \int_0^{\frac{5}{2}} x^2 \, dx \\
&= 8 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{5}{2}} + 5[x]_0^{\frac{5}{2}} - 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{5}{2}} \\
&= 8 \cdot \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0 \right) - 4 \cdot \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} \right) \\
&= 8 \cdot \frac{25}{8} + \frac{25}{2} - 4 \cdot \frac{125}{24} \\
&= 25 + \frac{25}{2} - \frac{125}{6} \\
&= \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16.67
\end{aligned}$$

Esercizio 4, prova MGF del 16/02/2022

Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ e $g(x) = x^2 + 3$ nell'intervallo $[0, 2]$:

- A. $-\frac{e}{2} + \frac{20}{3}$
- B. $\frac{2}{e} + \frac{20}{3}$
- C. $\frac{2}{e} + \frac{32}{3}$
- D. $-\frac{2}{e} + \frac{32}{3}$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Prima di procedere con il calcolo dell'area, è necessario verificare il posizionamento relativo dei grafici sul piano cartesiano. Si ha

$$g(0) = 3 > 1 = f(0).$$

Inoltre,

- $g'(x) = 2x > 0$ su $(0,2)$
- $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} < 0$ su $(0,2)$

Pertanto, $g(x)$ è strettamente crescente e $f(x)$ è strettamente decrescente su $[0,2]$. Questo implica che $g(x) > f(x)$ nell'intervallo considerato, cioè il grafico di $g(x)$ sta al di sopra del grafico di $f(x)$. L'area delimitata dalle due funzioni è dunque ottenuta come

$$\int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

e, in particolare,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^2 (x^2 + 3) dx - \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx + 3 \int_0^2 dx - \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx + 3 \int_0^2 dx - \frac{2}{2} \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx + 3 \int_0^2 dx + 2 \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 3[x]_0^2 + 2 \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 3 \cdot (2 - 0) + 2 \cdot \left(e^{-\frac{2}{2}} - e^{-\frac{0}{2}}\right) \\ &= \frac{8}{3} + 6 + 2 \cdot (e^{-1} - 1) \\ &= \frac{8}{3} + 6 + \frac{2}{e} - 2 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	B

Esercizio 3, prova MGF/MMF del 14/07/2022

L'integrale definito $\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx$ è

A. $\ln(5 \cdot 3) + \ln 3$

B. $\ln \frac{3}{15}$

C. $\ln 5$

D. $\ln 5 + \ln 3$

[Clicca qui per la soluzione video](#)

Soluzione.

Il numeratore è la derivata del denominatore. Applicando il Teorema 1 otteniamo

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx &= [\ln|x^2+2x|]_1^3 \\ &= \ln|3^2+2 \cdot 3| - \ln|1^2+2 \cdot 1| \\ &= \ln 15 - \ln 3 \\ &= \ln \frac{15}{3} \\ &= \ln 5\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	C

Calcolo approssimato di aree mediante somma di Riemann

Esercizio 2, pag. 51 (Videolibro - Fascicolo n. 5)

Si trovi un'approssimazione per l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = x^5 + e^x$ nell'intervallo $[1, 3]$ utilizzando la somma di Riemann con $n = 5$. Determinare l'errore commesso.

([Cliccare qui per il video](#))

Soluzione.

Essendo

- $f(1) = 1 + e > 0$
- $f'(x) = 5x^4 + e^x > 0$ per ogni $x \in [1, 3]$

la funzione $f(x)$ risulta positiva su $[1, 3]$. Pertanto, l'area da calcolare può essere ottenuta dall'integrale definito

$$\int_1^3 (x^5 + e^x) dx.$$

Utilizzando una somma di Riemann, possiamo calcolarne un'approssimazione. Con $n = 5$,

si ha $\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0.4$ e $x_k = x_{k-1} + 0.4$ con $x_0 = 1$ Pertanto,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \sum_{k=0}^4 f(x_k) \cdot \Delta x \\ &= \sum_{k=0}^4 f(x_k) \cdot 0.4 \\ &= f(1) \cdot 0.4 + f(1.4) \cdot 0.4 + f(1.8) \cdot 0.4 + f(2.2) \cdot 0.4 + f(2.6) \cdot 0.4 \\ &= 3.72 \cdot 0.4 + 9.43 \cdot 0.4 + 24.95 \cdot 0.4 + 60.56 \cdot 0.4 + 132.28 \cdot 0.4 \approx 92.37 \end{aligned}$$

L'errore commesso è pari a

$$\begin{aligned}
 E &= \left| \int_1^3 (x^5 + e^x) dx - \sum_{k=0}^4 (f(x_k) \cdot 0.4) \right| \\
 &= \left| \left[\frac{x^6}{6} + e^x \right]_1^3 - 92.37 \right| \\
 &= \left| \left(\frac{3^6}{6} + e^6 - \frac{1^6}{6} - e^1 \right) - 92.37 \right| \\
 &= |138.70 - 92.37| \approx 46.33
 \end{aligned}$$

In termini percentuali, l'errore commesso è pari a

$$E(\%) = \frac{46.33}{138.70} \approx 33.40\%$$

Esercizio.

Si trovi un'approssimazione per l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ nell'intervallo $[2, 5]$ utilizzando la somma di Riemann con $n = 6$. Determinare l'errore commesso.

[\(Cliccare qui per il video\)](#)

Soluzione.

Essendo

- $f(2) = \ln 3 > 0$
- $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} > 0$ per ogni $x \in [2, 5]$

la funzione risulta positiva su $[2, 5]$ e quindi l'area da calcolare può essere ottenuta come

$$\int_2^5 \ln(x^2 + 1) dx.$$

Utilizzando una somma di Riemann, possiamo calcolarne un'approssimazione. Con $n = 6$, si ha $\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$ e $x_k = x_{k-1} + 0.5$ con $x_0 = 2$ Pertanto,

$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \sum_{k=0}^5 f(x_k) \cdot \Delta x \\
 &= \sum_{k=0}^5 f(x_k) \cdot 0.5 \\
 &= f(2) \cdot 0.5 + f(2.5) \cdot 0.5 + f(3) \cdot 0.5 + f(3.5) \cdot 0.5 + f(4) \cdot 0.5 + f(4.5) \cdot 0.5 \\
 &= 1.609 \cdot 0.5 + 1.981 \cdot 0.5 + 2.303 \cdot 0.5 + 2.584 \cdot 0.5 + 2.833 \cdot 0.5 + 3.056 \cdot 0.5 \approx 7.183
 \end{aligned}$$

Per determinare l'errore commesso, è necessario risolvere l'integrale

$$\int_2^5 \ln(x^2 + 1) dx.$$

A tal fine, si procede integrando per parti, scegliendo $g'(x) = 1$ come fattore differenziale:

$$\int_2^5 \ln(x^2 + 1) dx = [x \ln(x^2 + 1)]_2^5 - 2 \int_2^5 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

Effettuando la divisione tra polinomi,

$$[x \ln(x^2 + 1)]_2^5 - 2 \int_2^5 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = [x \ln(x^2 + 1)]_2^5 - 2 \int_2^5 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

e, per integrazione diretta,

$$\begin{aligned}
 [x \ln(x^2 + 1)]_2^5 - 2 \int_2^5 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx &= [x \ln(x^2 + 1)]_2^5 - 2[(x - \arctan x)]_2^5 \\
 &= [5 \ln 26 - 2 \ln 5] - 2[5 - \arctan 5 - (2 - \arctan 2)] \\
 &= \ln 26^5 - \ln 5^2 - 2(3 - \arctan 5 + \arctan 2) \\
 &\approx 7.6041
 \end{aligned}$$

L'errore commesso è pari a

$$\begin{aligned}
 E &= \left| \int_2^5 \ln(x^2 + 1) dx - \sum_{k=0}^5 f(x_k) \cdot 0.5 \right| \\
 &= |7.6041 - 7.183| \\
 &= 0.4211
 \end{aligned}$$

In termini percentuali, l'errore commesso è pari a

$$E(\%) = \frac{0.421}{7.6041} \approx 5.54\%.$$