ESERCIZI DI
MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2024-25

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

Fascicolo n. 2

Funzioni di una variabile reale

- *Dominio di una funzione*
- *Funzioni continue*
- *Calcolo dei limiti*
- *Asintoti*

Carlo Alberto Magni

magni@unimore.it

Dario Vezzali

dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Dominio di una funzione

Esercizio 1, pag. 17 (Videolibro - Fascicolo n. 2)

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x+1}}$

c) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

e) $f(x) = \ln\left(2 + \sqrt{x-2}\right)$

f) $f(x) = \frac{7}{\ln(4-x)}$

g) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+10x+25}}$

h) $f(x) = \frac{2x-x^2}{\ln(x-10)}$

i) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

l) $f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$

m) $f(x) = \frac{x^2+1}{1-e^x}$

n) $f(x) = \sqrt{|2x-1| - 3}$

p) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$

q) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+4}$

s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-4}}$

v) $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}$

w) $f(x) = \frac{x}{1-2^x}$

z) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}$

Clicca qui per la soluzione video

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

<u>Soluzione</u>.

Per la ricerca del dominio (o campo di esistenza) dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$(x+1) \cdot (x-1) \neq 0$$
$$x \neq \pm 1$$

Ne consegue che

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

b) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x+1}}$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice dispari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$\sqrt[3]{x+1} \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

Ne consegue che

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

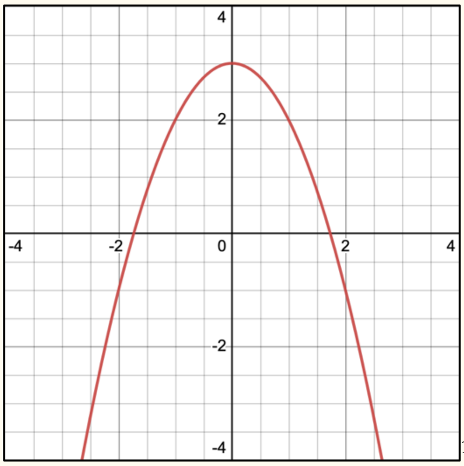
c) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$3 - x^2 \geq 0.$$

Visualizziamo graficamente su un piano cartesiano la parabola (con concavità verso il basso) descritta dalla legge $y = 3 - x^2$:



[1]

Sapendo che $3 - x^2 = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$, ovvero che il grafico della parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$, risulta evidente che la condizione $3 - x^2 \geq 0$ è verificata per

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Ne consegue che

$$\mathrm{Dom}\, f = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right].$$

[1] Il grafico è stato ottenuto utilizzando l'elaboratore grafico *desmos* (https://www.desmos.com/)

d) $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo una funzione esponenziale avente come esponente un radicale con indice della radice pari, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ è sufficiente imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero

$$x - 2 \geq 0$$
$$x \geq 2.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2, +\infty).$$

e) $f(x) = \ln\left(2 + \sqrt{x-2}\right)$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale e, all'interno dell'argomento del logaritmo, un radicale con indice della radice pari. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 + \sqrt{x-2} > 0 \end{cases}$$

Imponendo la prima condizione del sistema, risulta automaticamente verificata anche la seconda. Infatti, se sommiamo una quantità maggiore o uguale a 0 ($x - 2$ e, di conseguenza, $\sqrt{x-2}$) ad una quantità positiva (2), otteniamo sicuramente una quantità positiva. Pertanto, possiamo ridurre il precedente sistema alla verifica della seguente condizione:

$$x - 2 \geq 0$$
$$x \geq 2$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2, +\infty).$$

f) $f(x) = \frac{7}{\ln(4-x)}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(4-x) \neq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln(4-x)} \neq e^0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-x \neq 1 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = (-\infty, 3) \cup (3, 4).$$

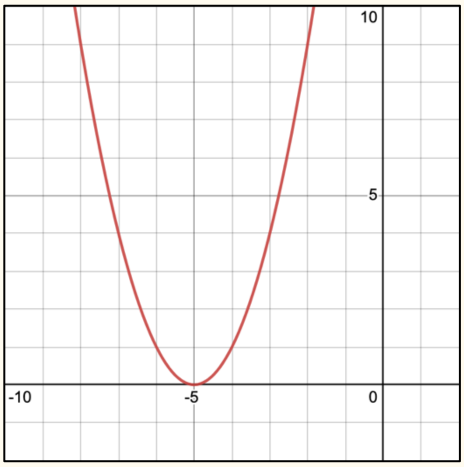
g) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+10x+25}}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che il radicando sia maggiore o uguale a 0. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+10x+25} \neq 0 \\ x^2+10x+25 \geq 0 \end{cases}$$

La prima condizione è soddisfatta per $x^2+10x+25 \neq 0$. Questo implica che il sistema è risolto per tutti gli x tali che $x^2+10x+25 \neq 0$. Visualizziamo graficamente su un piano cartesiano la parabola (con concavità verso l'alto) descritta dalla legge $y = x^2+10x+25$:



Poiché $x^2+10x+25 = 0$ per $x = 5$, risulta evidente che la parabola è strettamente positiva e tangente all'asse delle ascisse in corrispondenza del punto $(-5,0)$. Ne consegue che

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty).$$

h) $f(x) = \frac{2x-x^2}{\ln(x-10)}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(x-10) \neq 0 \\ x-10 > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln(x-10)} \neq e^0 \\ x > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-10 \neq 1 \\ x > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 11 \\ x > 10 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\mathrm{Dom}\, f = (10, 11) \cup (11, +\infty).$$

i) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale e, all'interno dell'argomento del logaritmo, una frazione. Per la ricerca del dominio della funzione dobbiamo, quindi, imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-4} > 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$$

Consideriamo singolarmente la disequazione fratta $\frac{x+1}{x-4} > 0$. La prima cosa da fare è studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D).

(N) $x + 1 > 0; x > -1;$

(D) $x - 4 > 0; x > 4.$

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 4)$	$(4, +\infty)$
(N)	$(-)$	$(+)$	$(+)$
(D)	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La disequazione $\frac{x+1}{x-4} > 0$ è verificata per $x < -1$ e per $x > 4$. Possiamo, quindi, riscrivere il precedente sistema nella forma

$$\begin{cases} x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 4 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \text{oppure} \quad x > 4 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty).$$

1) $f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, abbiamo due radicali con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando di entrambi sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

da cui

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

m) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{1 - e^x}$

Soluzione.

In questo caso, per la ricerca del dominio dobbiamo semplicemente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$1 - e^x \neq 0$$
$$e^x \neq 1$$

Applicando la funzione logaritmo naturale ad entrambi i membri, otteniamo

$$\ln e^x \neq \ln 1$$
$$x \neq 0$$

Ne consegue che

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

n) $f(x) = \sqrt{|2x-1|-3}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$|2x-1|-3 \geq 0$$
$$|2x-1| \geq 3$$

Quando incontriamo una disequazione in cui è presente un valore assoluto, del tipo $|f(x)| \geq k$, la sua soluzione è data dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni $f(x) \leq -k$ e $f(x) \geq k$. Di conseguenza, la soluzione della disequazione $|2x-1| \geq 3$ è data dall'unione delle soluzioni $2x-1 \leq -3$ e $2x-1 \geq 3$.

$$2x-1 \leq -3 \quad \text{oppure} \quad 2x-1 \geq 3$$
$$2x \leq -2 \quad \text{oppure} \quad 2x \geq 4$$
$$x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 2$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty).$$

p) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$

Soluzione.

In questo caso, dobbiamo semplicemente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$x^2 - 9 \neq 0$$
$$x^2 \neq 9$$
$$x \neq \pm 3$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

q) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+4}$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, la legge individua un numero reale per ogni $x \in \mathbb{R}$, Infatti, il numeratore non richiede nessuna condizione particolare di esistenza e il denominatore non si annulla mai:

$$2x^2 + 4 \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-4}}$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice dispari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0 (e non necessariamente positivo), ovvero

$$\sqrt[5]{x^2-4} \neq 0$$
$$x^2 - 4 \neq 0$$
$$x^2 \neq 4$$
$$x \neq \pm 2$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

v) $f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo una funzione esponenziale avente come base 2 e come esponente una frazione. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ è sufficiente imporre che il denominatore della frazione sia diverso da 0, ovvero:

$$x - 1 \neq 0$$
$$x \neq 1$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

w) $f(x) = \frac{x}{1-2^x}$

Soluzione.

In questo caso, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$1 - 2^x \neq 0$$
$$2^x \neq 1$$

Applicando ad entrambi i membri la funzione logaritmo naturale, otteniamo:

$$\ln 2^x \neq \ln 1$$
$$x \ln 2 \neq 0$$
$$x \neq 0$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

z) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Inoltre, avendo un radicale a numeratore, dobbiamo imporre anche che il radicando sia maggiore o uguale a 0. Otteniamo, quindi, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 - \ln x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che la seconda condizione è più stringente della terza. Di conseguenza, la terza condizione può essere ignorata. Pertanto, possiamo ridurre il precedente sistema alla verifica delle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 - \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln x} \neq e^1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq e \\ x > 0 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom} f = (0, e) \cup (e, +\infty).$$

Da notare che il numero di Nepero e lo possiamo approssimare al valore 2.718282, perciò identifica una quantità maggiore di 0.

Esercizio 6, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno A

Il dominio di $f(x) = \sqrt{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ *è*

A. $(2, +\infty)$

B. $[-1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$

Clicca qui per la soluzione video (Prof. Carlo Alberto Magni)
Clicca qui per la soluzione video (Dott.ssa Giulia Caselli)

Soluzione.

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

La terza condizione può essere omessa perché, se è soddisfatta la seconda, allora lo è anche la terza (se fosse $x - 2 \neq 0$, allora $\frac{x}{x-2}$ non sarebbe neppure definita):

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-2} > 0 \end{cases}$$

Consideriamo singolarmente la disequazione fratta $\frac{x}{x-2} > 0$. La prima cosa da fare è studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D).

(N) $x > 0;$

(D) $x - 2 > 0; x > 2.$

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
(N)	$(-)$	$(+)$	$(+)$
(D)	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{(\mathrm{N})}{(\mathrm{D})}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La disequazione fratta $\frac{x}{x-2} > 0$ è verificata per $x < 0$ e per $x > 2$. Possiamo, quindi, riscrivere il precedente sistema nella forma

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \quad \text{oppure} \quad x > 2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

Risulta evidente che il primo sistema è risolto da tutti gli x tali che $-1 \leq x < 0$ e il secondo sistema è risolto da tutti gli x tali che $x > 2$.

Ne consegue che

$$\mathrm{Dom}\, f = [-1, 0) \cup (2, +\infty).$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	D	…

Esercizio 6, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno B

Il dominio di $f(x) = \sqrt{x-2} + \ln(x-1) + \frac{1}{x-3}$ *è*

A. $(1,3) \cup (3,+\infty)$

B. $(1,2) \cup [2,+\infty)$

C. $(2,3) \cup (3,+\infty)$

D. $[2,3) \cup (3,+\infty)$

Clicca qui per la soluzione video (Prof. Carlo Alberto Magni)
Clicca qui per la soluzione video (Dott.ssa Giulia Caselli)

Soluzione.

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

La seconda condizione è soddisfatta se è soddisfatta la prima, quindi può essere omessa:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2,3) \cup (3,+\infty).$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	D	…

Esercizio 2, prova totale MGF/MMF del 30/06/2022

Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\ln(x-4)}$$

è

A. *nessuna delle seguenti*

B. $[4,5)$

C. $(4,5]$

D. $(4,5)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ \ln(x-4) \neq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della seconda condizione, otteniamo

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ e^{\ln(x-4)} \neq e^0 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x-4 \neq 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \neq 5 \\ x > 4 \end{cases}$$

Le prime due condizioni posso essere riassunte nella seguente condizione: $x < 5$. Pertanto, il sistema diventa

$$\begin{cases} x < 5 \\ x > 4 \end{cases}$$

che è soddisfatto da tutti gli x tali che $4 < x < 5$. Ne consegue che

$$\mathrm{Dom}\, f = (4, 5)$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	D	…	…	…	…	…

Funzioni continue

Esercizio 6, prova totale MGF/MMF del 14/07/2022

Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ che rende continua su tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 + a, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A. $a = 0$

B. $a = 1$

C. $a = -1$

D. *la funzione è discontinua in $\mathbb{R}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.*

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua per $x \neq 0$ ed è continua nel punto $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Per verificare l'esistenza di tale limite, occorre verificare innanzi tutto se esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} e^{ax} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} x^3 + a = a.$$

Quindi, il limite esiste se $a = 1$ e risulta $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Inoltre, $f(0) = e^0 = 1$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $a = 1$.

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	B	…

Esercizio 1, prova totale MGF/MMF del 27/01/2022

La funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & \text{se } x < 0 \\ -x^4 + 3(x^2 + a), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

A. *è continua in* $x = 0$ *per ogni valore di* $a \in \mathbb{R}$

B. *è discontinua in* $x = 0$ *per ogni valore di* $a \in \mathbb{R}$

C. *è continua in* $x = 0$ *se* $a = 1$

D. *è continua in* $x = 0$ *se* $a = 3$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua per $x \neq 0$ ed è continua nel punto $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Per verificare l'esistenza di tale limite, occorre verificare innanzi tutto se esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} -x^4 + 3(x^2 + a) = 3a$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} e^x + 2 = 3.$$

Quindi, il limite esiste se $3a = 3$, cioè $a = 1$, e risulta $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$. Inoltre, $f(0) = -0^4 + 3(0^2 + 1) = 3$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $a = 1$.

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
C	…	…	…	…	…	…

Esercizio 7.7, pag. 169 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 1 \\ a - \dfrac{b}{x}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 5, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua nei punti $x = 1$ e $x = 3$ se $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$, rispettivamente. Per verificare l'esistenza di tali limiti, occorre innanzi tutto verificare se esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$. In particolare, occorre verificare che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 5$. Tali condizioni devono essere verificate contemporaneamente e danno luogo al seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} a - \dfrac{b}{x} = 3 \\ \lim_{x\to 3^-} a - \dfrac{b}{x} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a - \dfrac{1}{3} b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ b + 3 - \dfrac{1}{3} b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ \dfrac{2}{3} b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

Per $a = 6$ e $b = 3$, $\lim_{x \to 1^+} a - \frac{b}{x} = 3$ e $\lim_{x \to 3^-} a - \frac{b}{x} = 5$. Inoltre, $f(1) = 3$ e $f(3) = 6 - \frac{3}{3} = 5$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ per $a = 6$ e $b = 3$.

Calcolo dei limiti

Esercizio 7.19, pag. 170 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare i seguenti limiti:

I) $\lim_{x\to+\infty}(5x-2x^2)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $+\infty-\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(5x-2x^2)=\lim_{x\to+\infty}-x^2\left(\frac{5}{x}+2\right)=-\infty\cdot(0+2)=-\infty$$

Il limite può essere risolto mediante la gerarchia degli infiniti: essendo il termine di secondo grado un infinito di ordine superiore al termine di primo grado, ne consegue che

$$\lim_{x\to+\infty}(5x-2x^2)=\lim_{x\to+\infty}-2x^2=-\infty.$$

II) $\lim_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-2\right)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-2\right)=(+\infty)\cdot(e^0-2)=(+\infty)\cdot(1-2)=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$$

III) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Attraverso semplici operazioni algebriche e applicando le proprietà delle potenze,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=0$$

Il limite può essere risolto anche notando che il numeratore ha grado 3/2 e il denominatore ha grado 2. Il denominatore è dunque un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}=0.$$

IV) $\lim_{x\to0^-}\left(5+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}\right)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

$$\lim_{x\to0^-}\left(5+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}\right)=5+1-(-\infty)=+\infty$$

V) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}+\frac{1}{x}\right)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}+\frac{1}{x}\right)=+\infty+0^+=+\infty$$

VI) $\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}\right)$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}\right)=5+0^+-0^+=5$$

VII) $\lim_{x \to 1}(2+x)^{3x}$

Soluzione.

$$\lim_{x \to 1}(2+x)^{3x} = 3^3 = 27$$

VIII) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)$

Soluzione.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = 0^+ \cdot \left(1 - \frac{2}{-\infty}\right) = 0^+ \cdot (1 - 0^-) = 0^+$$

Esercizio 7.24, pag. 171 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 0}\left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$.

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Si noti che, se $x > 0$, allora $\sqrt{x^2} = |x| = x \geq 0$; se invece $x < 0$, allora $\sqrt{x^2} = |x| = -x \geq 0$.

Pertanto, se x tende a zero per valori positivi,

$$\lim_{x \to 0^+}\left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(x + 1 + \frac{x}{x}\right) = 0^+ + 1 + 1 = 2;$$

se x tende a 0 per valori negativi,

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-}\left(x + 1 + \frac{-x}{x}\right) = 0^- + 1 - 1 = 0$$

Abbiamo così verificato che $\lim_{x\to 0^+}\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) \neq \lim_{x\to 0^-}\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$. Ne consegue che

$$\nexists \lim_{x\to 0}\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right).$$

Esercizio 7.25, pag. 171 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare i seguenti limiti:

I) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Prima di giungere a conclusioni affrettate, conviene scomporre (con somma e prodotto) i trinomi di secondo grado a numeratore e denominatore. Determiniamo le radici dei due polinomi. Per il numeratore, l'equazione associata

$$x^2-x-2=0$$

presenta le soluzioni $x=-1$ e $x=2$ e quindi il polinomio a numeratore può essere riscritto come

$$(x+1)(x-2).$$

Per il denominatore, l'equazione associata

$$x^2-5x+6=0$$

presenta le soluzioni $x=2$ e $x=3$ e quindi il polinomio a denominatore può essere riscritto come

$$(x-2)(x-3).$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3}=\frac{3}{-1}=-3$$

II) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Si ha

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}.$$

Per capire se $\frac{1}{0}$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$ è necessario distinguere il caso in cui x tende a 0 da destra dal caso in cui x tende a 0 da sinistra:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{1}{1^+-1}-\frac{1}{1-1^+}=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^-}=+\infty-(-\infty)=+\infty.$$

Se x tende a 0 da sinistra,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{1}{1^--1}-\frac{1}{1-1^-}=\frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^+}=-\infty-\infty=-\infty.$$

III) $\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo scomporre la differenza di quadrati a denominatore (x^2-36) come $(x+6)\cdot(x-6)$ e applicare una tecnica di "razionalizzazione", moltiplicando e dividendo per $2+\sqrt{x-2}$, come segue:

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}=\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{(x+6)\cdot(x-6)}\cdot\frac{2+\sqrt{x-2}}{2+\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{4 - (x - 2)}{(x + 6) \cdot (x - 6) \cdot \left(2 + \sqrt{x - 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{6 - x}{(x + 6) \cdot (x - 6) \cdot \left(2 + \sqrt{x - 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{-(x - 6)}{(x + 6) \cdot (x - 6) \cdot \left(2 + \sqrt{x - 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{-1}{(x + 6) \cdot \left(2 + \sqrt{x - 2}\right)}$$

$$= \frac{-1}{12 \cdot 4} = -\frac{1}{48}$$

Asintoti

Esercizio 7.38, pag. 173 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Verificare che la retta di equazione $y = 9x$ *è asintoto per* $x \to \pm\infty$ *di* $f(x) = \frac{9x^2+1}{x}$.

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Per verificare che la retta di equazione $y = 9x$ è asintoto (obliquo) di $f(x) = \frac{9x^2+1}{x}$ dobbiamo verificare che $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ corrisponda al coefficiente angolare della retta data. In particolare,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{9x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x^2}{x^2} = 9$$

Abbiamo così verificato che $m = 9$ è il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo della funzione $f(x)$. Determiniamo ora il termine noto q, come segue:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x^2+1}{x} - 9x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x^2+1-9x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Pertanto, abbiamo verificato che la retta di equazione $y = 9x$ è asintoto obliquo della funzione $f(x)$.

Esercizio 7.43, pag. 173 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Determinare, se esistono, gli asintoti delle seguenti funzioni:

I) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita o è discontinua. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. Per la determinazione del dominio, dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$e^x - 1 \neq 0$$
$$e^x \neq 1$$

Applicando la funzione logaritmo naturale ad entrambi i membri, otteniamo

$$\ln e^x \neq \ln 1$$
$$x \neq 0$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Calcoliamo di seguito il $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1}$. Se x tende a 0 da destra, allora e^x tende a 1 per valori maggiori di 1 e, di conseguenza, $(e^x - 1)$ tende a 0 per valori positivi. Pertanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Se x tende a 0 per valori negativi, allora e^x tende a 1 per valori minori di 1 e, di conseguenza, $(e^x - 1)$ tende a 0 per valori negativi. Pertanto,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = 0$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \to 0$.

Verifichiamo ora la presenza di eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

Ne consegue che le rette orizzontali di equazione $y = 1$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali della funzione $f(x)$, rispettivamente per $x \to +\infty$ (asintoto orizzontale destro) e per $x \to -\infty$ (asintoto orizzontale sinistro). Essendo presenti asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$, possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui.

II) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 2}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. Per la determinazione del dominio, non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che gli argomenti dei logaritmi a numeratore e denominatore siano strettamente positivi. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 2 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della seconda condizione, otteniamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{\ln x} \neq e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom} f = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty).$$

Calcoliamo di seguito $\lim_{x \to e^{2^+}} \frac{\ln x}{\ln x - 2}$ e $\lim_{x \to e^{2^-}} \frac{\ln x}{\ln x - 2}$. Se x tende a e^2 per valori maggiori di e^2, allora $\ln x$ tende a 2 per valori maggiori di 2. Pertanto,

$$\lim_{x\to e^{2^+}} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \frac{2}{2^+ - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Se x tende a e^2 per valori minori di e^2, allora $\ln x$ tende a 2 per valori negativi. Pertanto,

$$\lim_{x\to e^{2^-}} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \frac{2}{2^- - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = e^2$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \to e^2$.

Calcoliamo il limite anche in corrispondenza dell'estremo di sinistra del dominio, per verificare se la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale (destro):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{2}{\ln x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 1.$$

Il limite è finito, ne consegue che la retta verticale di equazione $x = 0$ non è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \to 0^+$.

Verifichiamo ora la presenza di un eventuale asintoto orizzontale destro:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{\ln x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 1$$

Ne consegue che la retta orizzontale di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale della funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$ (asintoto orizzontale destro). Essendo presente un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui.

III) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln(x+1)$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. In questo caso, abbiamo un radicale, con indice della radice dispari, e un logaritmo. Di conseguenza, per la determinazione del dominio è sufficiente imporre che l'argomento del logaritmo sia maggiore di 0, ovvero

$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = (-1, +\infty).$$

La retta verticale di equazione $x = -1$, in corrispondenza dell'estremo di sinistra del dominio, è l'unica candidata ad essere asintoto verticale della funzione per $x \to -1^+$. Calcoliamo, quindi, $\lim_{x\to -1^+} \sqrt[3]{x} + \ln(x+1)$:

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt[3]{x} + \ln(x+1) = -1 + \ln 0^+ = -\infty$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = -1$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \to -1^+$ (asintoto verticale destro).

Verifichiamo ora la presenza di un eventuale asintoto orizzontale destro:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x} + \ln(x+1) = +\infty + \ln +\infty = +\infty$$

Ne consegue che non abbiamo alcun asintoto orizzontale destro. Verifichiamo, allora, la presenza di un eventuale asintoto obliquo. Ricordando che x è un infinito superiore a $\ln x$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1}{+\infty}+0=0$$

Ne consegue che non abbiamo nemmeno un asintoto obliquo.

Esercizio 6, prova totale MGF/MMF del 09/09/2022

La retta $y=2$ è

A. *asintoto orizzontale per* $f(x)=\frac{x^3+5x}{2x^3+3}$

B. *asintoto orizzontale per* $f(x)=\frac{2x^4+2x}{0{,}5x^4+4}$

C. *asintoto orizzontale per* $f(x)=\frac{x^4+2x}{0{,}5x^4+4}$

D. *asintoto orizzontale per* $f(x)=\frac{x^2+2x}{0{,}5x^3+4}$

Clicca qui per la soluzione video

Soluzione.

Affinché la retta orizzontale di equazione $y=2$ sia asintoto orizzontale per $f(x)$, occorre che $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$. Pertanto, escludiamo sicuramente la risposta D perché, per ottenere un limite finito, a numeratore e denominatore della funzione dobbiamo avere infiniti dello stesso ordine. Verifichiamo di seguito i restanti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{2x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+2x}{0{,}5x^4+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{0{,}5x^4} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x}{0{,}5x^4+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{0{,}5x^4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	C	…