

# ESERCIZI DI MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management



**UNIMORE**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI  
MODENA E REGGIO EMILIA

## Fascicolo n. 6 Matematica finanziaria

- *Operazioni finanziarie, capitale, montante*
- *Leggi e regimi finanziari (interesse semplice, composto, anticipato)*
- *Scindibilità*
- *Rendite. Valore di una rendita*
- *Leggi finanziarie a due variabili*
- *Piani di ammortamento (impostazione finanziaria e elementare; ammortamento italiano e francese)*
- *Valore Attuale Netto e Tasso Interno di Rendimento*
- *Esercizi ed applicazioni*

**Carlo Alberto Magni**

[magni@unimore.it](mailto:magni@unimore.it)

**Dario Vezzali**

[dario.vezzali@unimore.it](mailto:dario.vezzali@unimore.it)

**Università di Modena e Reggio Emilia**

## 1. Operazioni finanziarie, capitale, montante

### Esercizio 1.1

Data la legge finanziaria di capitalizzazione  $f(t) = 3^t$  e dato il capitale iniziale  $C_0 = 10$ , determinare il montante in  $t = 2$  e l'interesse.

#### Soluzione.

Andiamo a rappresentare l'operazione finanziaria lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 10$  e che il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = 3^t$ , possiamo determinare il montante  $C_2$  con la relazione fondamentale, che lega capitale e montante:

$$C_2 = C_0 \cdot f(2) = 10 \cdot 3^2 = 10 \cdot 9 = 90.$$

Inoltre, per la definizione di interesse, otteniamo

$$I_2 = C_2 - C_0 = 90 - 10 = 80.$$

### Esercizio 1.2

Data la legge finanziaria di attualizzazione  $\Phi(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  e dato il valore nominale di 100 in  $t = 3$ , determinare il valore attuale e lo sconto.

#### Soluzione.

Andiamo a rappresentare l'operazione finanziaria lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Sapendo che il valore nominale è  $C_3 = 100$  e che il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ , possiamo determinare il valore attuale  $C_0$  con la relazione fondamentale:

$$C_0 = C_3 \cdot \Phi(3) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12,5.$$

Inoltre, per la definizione di sconto, otteniamo

$$D_3 = C_3 - C_0 = 100 - 12,5 = 87,5.$$

### Esercizio 1.3

Stabilire se la funzione  $f(t) = t^2 - 2t + 1$  è una legge finanziaria di capitalizzazione.

Soluzione.

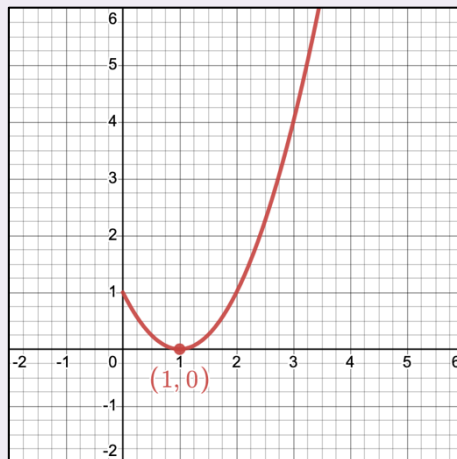
Per verificare se la funzione  $f(t)$  è una legge finanziaria di capitalizzazione, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- 1)  $f(0) = 1$ ;
- 2) Sia  $t_2 > t_1 > 0$ , allora  $f(t_2) > f(t_1)$  per ogni  $t_1, t_2$ . In altre parole,  $f(t)$  è crescente su  $[0, +\infty)$ ;
- 3)  $f(t)$  è derivabile su  $[0, +\infty)$ .

La prima condizione risulta soddisfatta poiché  $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ . Per verificare la seconda e terza condizione, studiamo il segno della derivata prima  $f'(t) = 2t - 2$ :

$$f'(t) = 2t - 2 \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad t \geq 1.$$

Pertanto, la funzione è strettamente decrescente e derivabile nell'intervallo  $(0, 1)$  e strettamente crescente e derivabile nell'intervallo  $(1, +\infty)$ . Ne consegue che la seconda condizione non è soddisfatta e  $f(t)$  non è una legge finanziaria di capitalizzazione, come si può anche evincere dal grafico di  $f(t)$  rappresentato qui sotto:



### Esercizio 1.4

Stabilire se la funzione  $f(t) = 5^t$  è una legge finanziaria di capitalizzazione.

#### Soluzione.

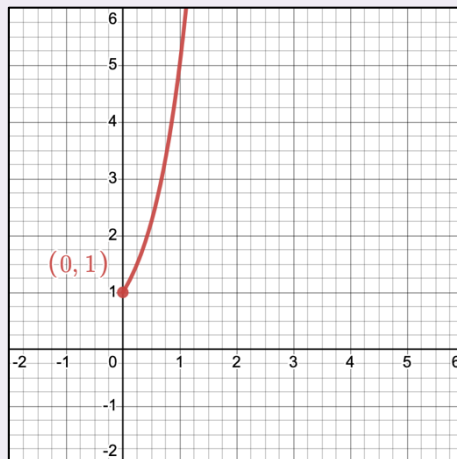
Per verificare se la funzione  $f(t)$  è una legge finanziaria di capitalizzazione, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- 1)  $f(0) = 1$ ;
- 2) Sia  $t_2 > t_1 > 0$ , allora  $f(t_2) > f(t_1)$  per ogni  $t_1, t_2$ . In altre parole,  $f(t)$  è crescente su  $[0, +\infty)$ ;
- 3)  $f(t)$  è derivabile su  $[0, +\infty)$ .

La prima condizione risulta soddisfatta poiché  $f(0) = 5^0 = 1$ . Per verificare la seconda e terza condizione, studiamo il segno della derivata prima,  $f'(t) = 5^t \cdot \ln 5$ :

$$f'(t) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad 5^t \cdot \ln 5 \geq 0.$$

La condizione  $5^t \cdot \ln 5 \geq 0$  risulta verificata per ogni  $t \in [0, +\infty)$ . Pertanto, la funzione è strettamente crescente e derivabile nell'intervallo  $(0, +\infty)$ . Ne consegue che  $f(t)$  è una legge finanziaria di capitalizzazione, come si può anche evincere dal grafico di  $f(t)$  rappresentato qui sotto:



### Esercizio 1.5

Possono le seguenti funzioni determinare leggi finanziarie di capitalizzazione?

- A.  $f_A(t) = t \cdot 3^t \cdot \ln(1 + i)$  con  $i > 0$
- B.  $f_B(t) = t + 3^t \cdot \ln(1 + i)$  con  $i > 0$
- C.  $f_C(t) = t \cdot \ln(1 + i) + 3^t$  con  $i > 0$

### Soluzione.

Per verificare se le funzioni date sono leggi finanziarie di capitalizzazione, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- 1)  $f(0) = 1$ ;
- 2) Sia  $t_2 > t_1 > 0$ , allora  $f(t_2) > f(t_1)$  per ogni  $t_1, t_2$ . In altre parole,  $f(t)$  è crescente su  $[0, +\infty)$ ;
- 3)  $f(t)$  è derivabile su  $[0, +\infty)$ .

La funzione  $f_A(t)$  non può essere una legge finanziaria di capitalizzazione perché non è soddisfatta la prima condizione. Infatti,  $f_A(0) = 0 \cdot 3^0 \cdot \ln(1 + i) = 0 \neq 1$ .

La funzione  $f_B(t)$  può essere una legge finanziaria di capitalizzazione soltanto se  $i = e - 1$ . Infatti, per  $t = 0$  risulta

$$f_B(0) = 0 + 3^0 \cdot \ln(1 + i) = \ln(1 + i)$$

Si ha  $f_B(0) = 1$  se e solo se  $i = e - 1$ . Per verificare la seconda e terza condizione, andiamo a studiare il segno della derivata prima  $f'_B(t) = 1 + 3^t \cdot \ln(3) \cdot \ln(1 + i)$ :

$$f'_B(t) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad 1 + 3^t \cdot \ln(3) \cdot \ln(1 + i) \geq 0.$$

Essendo necessariamente  $i = e - 1$ , allora  $f'_B(t) = 1 + 3^t \cdot \ln(3) > 0$  per ogni  $t \in [0, +\infty)$ . Pertanto, la funzione è strettamente crescente e derivabile nell'intervallo  $(0, +\infty)$ . Ne consegue che  $f_B(t)$  può essere una legge di capitalizzazione soltanto se  $i = e - 1$ .

La funzione  $f_C(t)$  può essere una legge finanziaria di capitalizzazione indipendentemente dal valore assunto da  $i$ . Infatti, per  $t = 0$  risulta

$$f_C(0) = 0 \cdot \ln(1 + i) + 3^0 = 1.$$

Per verificare la seconda e terza condizione, andiamo a studiare il segno della derivata prima  $f'_C(t) = \ln(1 + i) + 3^t \cdot \ln(3)$ , ovvero

$$f'_C(t) \geq 0, \quad \text{da cui} \quad \ln(1 + i) + 3^t \cdot \ln(3) \geq 0$$

La condizione risulta verificata per ogni  $t \in [0, +\infty)$ . Pertanto, la funzione è strettamente crescente e derivabile nell'intervallo  $(0, +\infty)$ . Ne consegue che  $f_C(t)$  può essere una legge finanziaria di capitalizzazione.

## 2. Leggi e regimi finanziari (interesse semplice, composto, anticipato)

### Esercizio 2.1

*Determinare il montante di un capitale pari a 1.508€ investito per 3 anni al 3,2% semplice.*

#### Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 1.508\text{€}$ , il tasso di interesse è  $i = 3,2\%$  (in regime di interesse semplice) e la durata dell'operazione è  $t = 3$  anni, possiamo determinare il montante  $C_3$  con la relazione fondamentale:

$$C_3 = C_0 \cdot (1 + i \cdot 3) = 1.508 \cdot (1 + 0,032 \cdot 3) = 1.652,77\text{€}.$$

Inoltre, l'interesse maturato nel corso dell'operazione è pari a

$$I = C_3 - C_0 = 1.652,77 - 1.508 = 144,77\text{€}$$

o, in modo equivalente,

$$i \cdot C_0 \cdot 3 = 3,2\% \cdot 1.652,77 = 144,77\text{€}.$$

### Esercizio 2.2

Si calcoli il montante di un investimento quadriennale di 4.260€ nelle seguenti ipotesi:

- 1) tasso di interesse composto al 3,5%;
- 2) tasso di interesse semplice al 2,8%;
- 3) tasso di interesse anticipato (sconto commerciale) al 1,9%.

### Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Nella prima ipotesi, sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 4.260\text{€}$ , il tasso di interesse è  $i = 3,5\%$  (in regime di interesse

composto), e la durata dell'operazione è  $t = 4$  anni, possiamo determinare il montante  $C_4$  con la relazione fondamentale:

$$C_4 = C_0 \cdot (1 + i)^4 = 4.260 \cdot (1 + 0,035)^4 = 4.888,48\text{€}.$$

L'interesse maturato nel corso dell'operazione è pari a

$$I = C_4 - C_0 = 628,48\text{€}.$$

Nella seconda ipotesi, sapendo che il tasso di interesse  $i = 2,8\%$  (in regime di interesse semplice), possiamo determinare il montante  $C_4$  con la relazione fondamentale:

$$C_4 = C_0 \cdot (1 + i \cdot 4) = 4.260 \cdot (1 + 0,028 \cdot 4) = 4.737,12\text{€}.$$

L'interesse maturato nel corso dell'operazione è pari a

$$I = C_4 - C_0 = i \cdot C_0 \cdot 4 = 477,12\text{€}.$$

Nella terza ipotesi, è soddisfatta la condizione  $d \cdot t = 0,019 \cdot 4 = 0,076 < 1$  che garantisce la significatività finanziaria della legge di capitalizzazione (in particolare, garantisce che  $C_4$  sia positivo). Possiamo allora determinare il montante  $C_4$  con la relazione fondamentale:

$$C_4 = \frac{C_0}{1 - d \cdot 4} = \frac{4.260}{1 - 0,019 \cdot 4}$$

Lo sconto maturato nel corso dell'operazione è pari a

$$D = C_4 - C_0 = 4.610,39 - 4.260 = 350,39\text{€}$$

o, in modo equivalente,

$$d \cdot C_4 \cdot 4 = 0,019 \cdot 4.610,39 \cdot 4 = 350,39\text{€}.$$

### Esercizio 2.3

Il montante di un investimento triennale è pari a 1.000€. Si calcoli il capitale investito in  $t = 0$  nelle seguenti ipotesi:

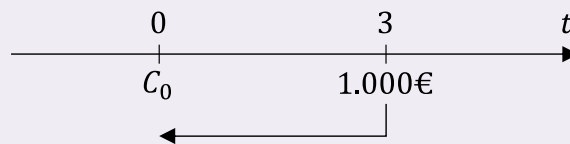
- 1) tasso di interesse semplice al 2,2%;



- 2) *tasso di interesse composto al 3%*;  
 3) *tasso di interesse anticipato (sconto commerciale) al 4,4%*.

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Nella prima ipotesi, sapendo che il montante (o valore nominale) è  $C_3 = 1.000€$ , il tasso di interesse è  $i = 2,2\%$  (in regime di interesse semplice) e la durata dell'operazione è  $t = 3$  anni, possiamo determinare il capitale investito (o valore attuale)  $C_0$  con la relazione

$$C_0 = \frac{C_3}{1 + i \cdot 3} = \frac{1.000}{1 + 0,022 \cdot 3} = 938,07€.$$

Nella seconda ipotesi, sapendo che il tasso di interesse è  $i = 3\%$  (in regime di interesse composto), possiamo determinare il capitale investito  $C_0$  con la relazione

$$C_0 = \frac{C_3}{(1 + i)^3} = \frac{1.000}{(1 + 0,03)^3} = 915,14€.$$

Nella terza ipotesi è soddisfatta la condizione  $d \cdot t = 0,044 \cdot 3 = 0,132 < 1$ , che garantisce la significatività della legge finanziaria (in particolare, garantisce che  $C_0$  sia positivo).

Possiamo allora determinare il capitale investito  $C_0$  con la relazione

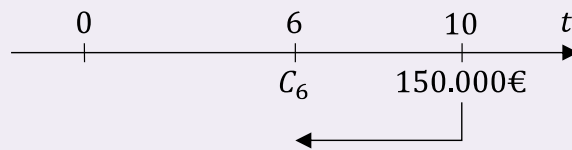
$$C_0 = C_3 \cdot (1 - d \cdot 3) = 1.000 \cdot (1 - 0,044 \cdot 3) = 868,00€.$$

**Esercizio 2.4**

Si calcoli il valore in  $t = 6$  di  $150.000€$  scadenti in  $t = 10$  in regime di interesse semplice, con tasso di interesse  $i = 10\%$ .

Soluzione.

L'operazione finanziaria può essere rappresentata come un'operazione di sconto:



Utilizzando la relazione fondamentale, che lega valore attuale e valore nominale, si ricava

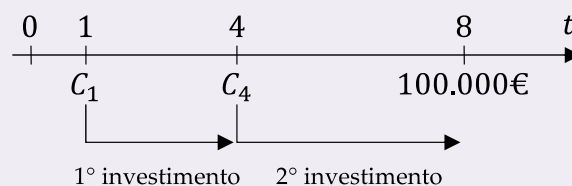
$$C_6 = C_{10} \cdot \Phi(4) = \frac{150.000}{1 + 0,1 \cdot 4} = 107.142,86\text{€}$$

**Esercizio 2.5**

Si vuole costruire un capitale di 100.000€ con due investimenti consecutivi: il primo ha inizio fra un anno, dura 3 anni ed è stipulato con tasso di interesse semplice  $i = 10\%$ , il secondo dura 4 anni ed è stipulato con tasso di interesse anticipato (tasso di sconto commerciale)  $d = 5\%$ . Si determini il capitale investito in  $t = 1$ .

Soluzione.

Possiamo alternativamente ragionare in una prospettiva di capitalizzazione o di attualizzazione. Seguendo la prima, possiamo rappresentare la strategia di investimento lungo l'asse dei tempi come segue:



Il montante  $C_4$  ottenuto dal primo investimento sarà uguale a

$$C_4 = C_0 \cdot (1 + 0,1 \cdot 3).$$

Questo montante è reinvestito per 4 anni al tasso di sconto commerciale  $d = 5\%$ . Il montante in  $t = 8$  sarà allora dato da

$$C_8 = \frac{C_4}{1 - 0,05 \cdot 4} = \frac{C_0(1 + 0,1 \cdot 3)}{1 - 0,05 \cdot 4}$$

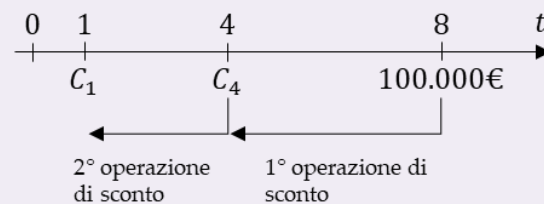
Essendo  $C_8 = 100.000$ , si ha

$$100.000\text{€} = \frac{C_0(1 + 0,1 \cdot 3)}{1 - 0,05 \cdot 4}$$

Risolvendo per  $C_0$ ,

$$C_0 = \frac{100.000(1 - 0,05 \cdot 4)}{(1 + 0,1 \cdot 3)} = 61.538,46\text{€}$$

Ragionando invece in un'ottica di attualizzazione, possiamo rappresentare l'operazione finanziaria come segue:



Determiniamo prima il valore scontato in  $t = 4$  di  $100.000\text{€}$  disponibili in  $t = 8$ , utilizzando il tasso di sconto  $d = 5\%$ :

$$C_4 = C_8 \cdot (1 - d \cdot 4) = 100.000 \cdot (1 - 0,05 \cdot 4) = 80.000\text{€}$$

Ora, sapendo che il valore nominale del primo investimento è  $C_4 = 80.000\text{€}$ , possiamo determinare il valore scontato in  $t = 1$  di  $80.000\text{€}$  disponibili in  $t = 4$ , utilizzando il tasso di interesse semplice  $i = 10\%$ :

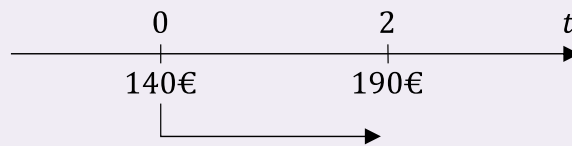
$$C_0 = \frac{C_3}{1 + i \cdot 3} = \frac{80.000}{1 + 0,1 \cdot 3} = 61.538,46\text{€}$$

### Esercizio 2.6

Si ricavi il tasso di sconto implicito in un finanziamento di  $140\text{€}$  rimborsabile tra 2 anni con una rata pari a  $190\text{€}$  (regime di interesse anticipato/sconto commerciale).

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Utilizziamo la relazione fondamentale, ricordando che il fattore di sconto nel regime di interesse anticipato è  $\Phi(t) = 1 - dt$ :

$$190 \cdot (1 - d \cdot 2) = 140$$

(ottica di sconto) o, equivalentemente,

$$\frac{140}{1 - d \cdot 2} = 190$$

(ottica di capitalizzazione). Risolvendo per  $d$ , si ottiene

$$d = \frac{190 - 140}{190} \cdot \frac{1}{2} = 0,1316$$

cioè  $d = 13,16\%$ .

**Esercizio 2.7**

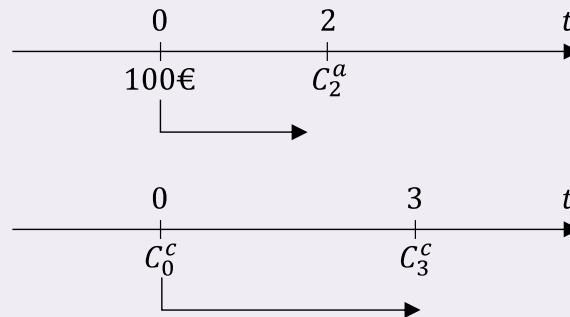
*Si calcoli quanto deve essere investito in capitalizzazione composta per ottenere nell'arco di tre anni lo stesso montante conseguibile con un investimento biennale pari a 100€ in capitalizzazione anticipata a tasso 1%, assumendo che il tasso composto sia il 2%.*

Soluzione.

Siano

- $C_2^a$  il montante dell'investimento biennale (regime di interesse anticipato)
- $C_0^c$  e  $C_3^c$  il capitale investito e il montante dell'operazione triennale (regime di interesse composto)

L'operazione finanziaria può allora essere rappresentata con il seguente schema:



Il montante dell'investimento biennale, stipulato con regime di interesse anticipato, è

$$C_2^a = \frac{100}{1 - 0,01 \cdot 2} = 102,04\text{€}$$

Il montante dell'investimento triennale, stipulato con regime di interesse composto, è

$$C_3^c = C_0^c(1 + 0,02)^3.$$

Per ipotesi, i due montanti coincidono:  $C_2^a = C_3^c = 102,04$ . Pertanto,

$$102,04 = C_0^c(1 + 0,02)^3$$

e quindi il capitale da investire in questa operazione sarà

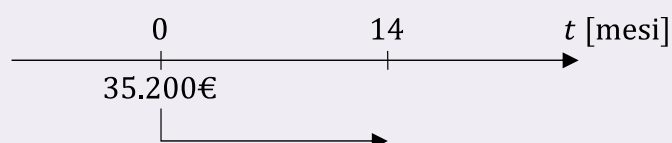
$$C_0^c = \frac{102,04}{(1 + 0,02)^3} = 96,15\text{€}.$$

### Esercizio 2.8

Un risparmiatore versa presso un istituto di credito 35.200€. Si conviene che tale capitale venga remunerato in regime di interesse composto al tasso annuo  $i = 3,4\%$ . Determinare gli interessi maturati dopo 14 mesi.

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Sapendo che 14 mesi corrispondono a  $14/12 = 1,67$  di anno, il montante dell'operazione, remunerata in regime di interesse composto, è

$$C_{1,67} = C_0(1 + i)^{1,67} = 35.200 \cdot (1 + 0,034)^{1,67} = 36.600,19\text{€}.$$

Pertanto, gli interessi maturati dopo 14 mesi (cioè 1,67 anni) valgono

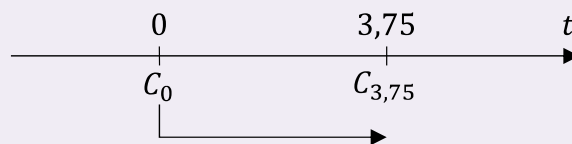
$$I = C_{1,67} - C_0 = 36.600,19 - 35.200 = 1.400,19\text{€}.$$

### Esercizio 2.9

Una banca concede ad un imprenditore un prestito di 154.000€ per 3 anni e 9 mesi concordando una remunerazione in regime di interesse semplice al tasso annuo del 3,6%. Si determini l'importo che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza del contratto.

#### Soluzione.

Sapendo che 3 anni e 9 mesi corrispondono a  $15/4$  di anno, ovvero 3,75 anni, rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Il montante dell'operazione in regime di interesse semplice, corrispondente all'importo che l'imprenditore dovrà restituire alla scadenza del contratto, è

$$C_{3,75} = C_0(1 + i \cdot 3,75) = 154.000 \cdot (1 + 0,036 \cdot 3,75) = 174.790\text{€}.$$

Inoltre, l'interesse maturato nel corso dell'operazione è pari a

$$I = C_{3,75} - C_0 = 174.790 - 154.000 = 20.790\text{€}$$

o, in modo equivalente,

$$I = i \cdot C_0 \cdot 3,75 = 0,036 \cdot 154.000 \cdot 3,75 = 20.790\text{€}.$$

**Esercizio 2.10**

Qual è la durata massima di un prestito in regime di interesse anticipato se il tasso di sconto è  $d = 3,2\%$ ?

Soluzione.

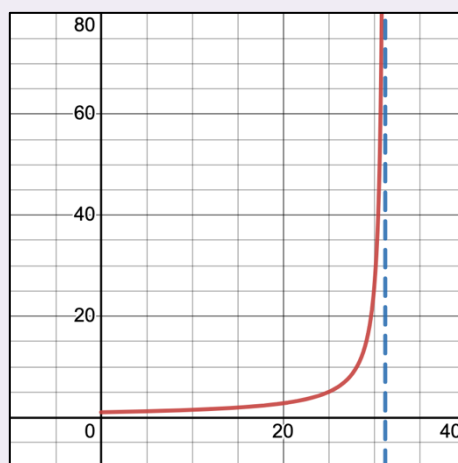
Per garantire la significatività della legge finanziaria, occorre che sia soddisfatta la condizione  $d \cdot t = 0,032 \cdot t < 1$ , da cui

$$t < \frac{1}{0,032}$$

ovvero

$$t < 31,25.$$

Pertanto, la durata massima del prestito deve essere inferiore a 31,25 anni (31 anni e 3 mesi), come si può anche evincere dal grafico del fattore di montante  $f(t) = \frac{1}{1-0,032t}$  dell'operazione finanziaria rappresentato qui sotto:



In particolare, la funzione  $f(t)$  è rappresentata graficamente da un ramo di iperbole equilatera avente come asintoto verticale la retta di equazione  $t = \frac{1}{0,032} = 31,25$ .

**Esercizio 2.11**

Possedete una cambiale attiva scadente fra 6 mesi con valore nominale pari a 132.500€. La Banca sconta la cambiale e vi corrisponde 125.450€. Calcolate lo sconto e il tasso di sconto commerciale annuo implicito nell'operazione.

Soluzione.

L'importo di 125.450€ rappresenta il valore attuale di 132.500€, scontati per 6 mesi. Pertanto, lo sconto implicito nell'operazione è

$$D = 132.500 - 125.450 = 7.050€.$$

Per ricavare il tasso di sconto implicito si può utilizzare la relazione fondamentale, che lega valore attuale e valore nominale, tenendo conto che 6 mesi corrisponde a 6/12 di anno:

$$125.450 = 132.500 \cdot \left(1 - d \cdot \frac{6}{12}\right)$$

da cui  $d = 10,64\%$  (tasso di sconto annuo). Avremmo potuto determinare il tasso di sconto implicito anche utilizzando direttamente l'equazione

$$\frac{D}{7.050} = d \cdot 132.500 \cdot \frac{6}{12}$$

che produce il medesimo risultato.

**3. Tassi effettivi di interesse o sconto****Esercizio 3.1**

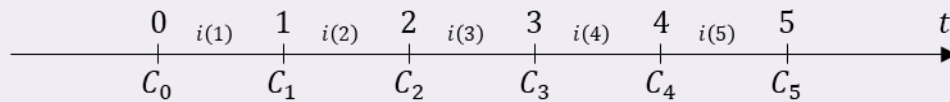
Si calcolino tutti i tassi effettivi di interesse  $i(t)$  per un prestito quinquennale di 10.000€, stipulato al 5% anticipato. Si verifichi inoltre che

$$C_5 = C_0(1 + i(1))(1 + i(2))(1 + i(3))(1 + i(4))(1 + i(5))$$

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:





Possiamo alternativamente procedere calcolando i tassi effettivi di interesse sapendo che, in regime di interesse anticipato/sconto commerciale,  $i(t) = \frac{d}{1-dt} = \frac{0,05}{1-0,05t}$ , oppure utilizzare la definizione di tasso effettivo di interesse,  $i(t) = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$  (dopo aver determinato i capitali alle singole epoche). Seguendo il primo procedimento, otteniamo i seguenti tassi effettivi di interesse:

$t$	$i(t)$
1	0,05263
2	0,05556
3	0,05882
4	0,06250
5	0,06667

Seguendo invece il secondo procedimento e sfruttando la relazione fondamentale  $C_t = \frac{C_0}{1-dt}$ , otteniamo tutti i capitali alle singole epoche (seconda colonna) e, quindi, i tassi effettivi di interesse (terza colonna):

$t$	$C_t$	$i(t)$
0	10.000,00€	-
1	10.526,32€	0,05263
2	11.111,11€	0,05556
3	11.764,71€	0,05882
4	12.500,00€	0,06250
5	13.333,33€	0,06667

In particolare, il montante dell'operazione è ottenuto

$$C_5 = \frac{C_0}{1 - d \cdot 5} = \frac{10.000}{1 - 0,05 \cdot 5} = 13.333,33\text{€}.$$

Possiamo allora verificare che il montante può anche essere ottenuto come

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0(1 + i(1))(1 + i(2))(1 + i(3))(1 + i(4))(1 + i(5)) \\ &= 10.000 \cdot (1 + 0,05263) \cdot (1 + 0,05556) \cdot (1 + 0,05882) \cdot (1 + 0,06250) \cdot (1 + 0,06667) \\ &= 13.333,33\text{€}. \end{aligned}$$

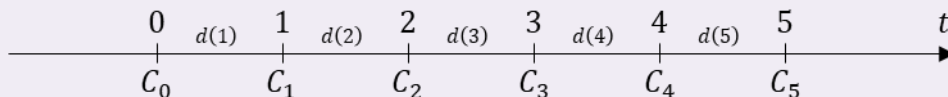
### Esercizio 3.2

Si calcolino tutti i tassi effettivi di sconto  $d(t)$  per un prestito quinquennale di 15.000€, stipulato al 3% composto. Si verifichi inoltre che

$$C_0 = C_5(1 - d(5))(1 - d(4))(1 - d(3))(1 - d(2))(1 - d(1))$$

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Possiamo alternativamente procedere calcolando i tassi effettivi di sconto sapendo che, in regime di interesse composto,  $d(t) = \frac{i}{1+i} = \frac{0,03}{1+0,03}$ , oppure utilizzare la definizione di tasso effettivo di sconto,  $d(t) = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_t}$  (dopo aver determinato i capitali alle singole epoche).

Seguendo il primo procedimento, otteniamo i seguenti tassi effettivi di sconto:

$t$	$d(t)$
1	0,02913
2	0,02913
3	0,02913
4	0,02913
5	0,02913

Si noti che dal momento che il tasso  $d(t) = \frac{i}{1+i}$  è una funzione costante, indipendentemente dal periodo considerato, otteniamo che il tasso effettivo di sconto è  $d(t) = 0,029$  per ogni epoca. Seguendo invece il secondo procedimento e sapendo che  $C_t = C_0(1+i)^t$ , otteniamo tutti i capitali alle singole epoche (seconda colonna) e, quindi, i tassi effettivi di sconto (terza colonna):

$t$	$C_t$	$d(t)$
0	15.000,00€	-
1	15.450,00€	0,02913
2	15.913,50€	0,02913
3	16.390,91€	0,02913
4	16.882,63€	0,02913
5	17.389,11€	0,02913

In particolare, il montante dell'operazione, in regime di interesse composto, è

$$C_5 = C_0(1+i)^5 = 15.000 \cdot (1+0,03)^5 = 17.389,11€.$$

Possiamo così verificare che il valore attuale di questa operazione può anche essere ottenuto come

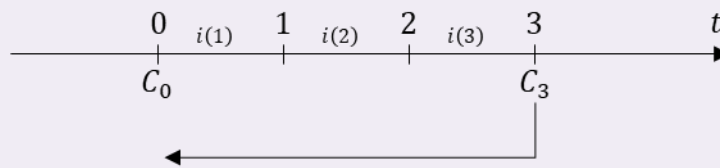
$$\begin{aligned} C_0 &= C_5(1-d(5))(1-d(4))(1-d(3))(1-d(2))(1-d(1)) \\ &= 17.389,11 \cdot (1-0,02913) \cdot (1-0,02913) \cdot (1-0,02913) \cdot (1-0,02913) \cdot (1-0,02913) \\ &= 17.389,11 \cdot (1-0,02913)^5 \\ &= 15.000€. \end{aligned}$$

### Esercizio 3.3

Se in un prestito triennale i tassi effettivi sono  $i(1) = 3\%$ ,  $i(2) = 5\%$  e  $i(3) = 1\%$ , qual è il valore attuale di 50.000€ disponibili fra 3 periodi? Se il prestito fosse stipulato con il regime di interesse semplice, quale sarebbe il tasso di interesse annuo?

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Sapendo che vale la seguente relazione:

$$1 + i(t) = \frac{1}{1 - d(t)}$$

possiamo ricavare i tassi effettivi di sconto,  $d(1)$ ,  $d(2)$  e  $d(3)$ , a partire dai tassi effettivi di interesse  $i(1)$ ,  $i(2)$  e  $i(3)$ . In particolare,

$t$	$i(t)$	$d(t)$
1	0,03	0,0291
2	0,05	0,0476
3	0,01	0,0099

A questo punto, non resta che attualizzare il valore nominale (o montante)  $C_3 = 50.000\text{€}$  determinando così il valore attuale (o capitale iniziale), come segue:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_3(1 - d(3))(1 - d(2))(1 - d(1)) \\ &= 50.000 \cdot (1 - 0,0099) \cdot (1 - 0,0476) \cdot (1 - 0,0291) \\ &= 45.776,54\text{€}. \end{aligned}$$

Se il prestito fosse stipulato con il regime dell'interesse semplice, varrebbe la relazione fondamentale

$$C_3 = C_0(1 + i \cdot 3)$$

da cui

$$i = \frac{1}{3} \left( \frac{C_3}{C_0} - 1 \right)$$

ovvero

$$i = \frac{1}{3} \left( \frac{50.000}{45.776,54} - 1 \right) = 0,0308.$$

Pertanto, il tasso di interesse annuo implicito nell'operazione (se il prestito fosse stipulato con il regime dell'interesse semplice) sarebbe  $i = 3,08\%$ .

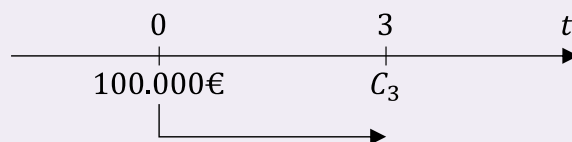
### Prova totale MGF/MMF del 14/06/2022 – Esercizio 7

Si consideri un prestito di 100.000€ con un interesse pari a 3.500€. Il prestito è stipulato con una legge finanziaria composta e dura 3 anni. Questo implica che il tasso annuo effettivo  $i$  è

- A.  $1,20\% < i < 1,21\%$
- B.  $1,16\% < i < 1,17\%$
- C.  $1,05\% < i < 1,15\%$
- D.  $1,15\% < i < 1,16\%$

Soluzione.

Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione e rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Per la definizione di interesse, otteniamo

$$C_3 = C_0 + I$$

da cui

$$C_3 = 100.000 + 3.500 = 103.500€.$$

Sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 100.000€$ , il montante è  $C_3 = 103.500€$  e la durata dell'operazione è  $t = 3$  anni, possiamo determinare il tasso di interesse  $i$  con la relazione fondamentale:

$$C_3 = C_0(1 + i)^3$$

da cui

$$i = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{103.500}{100.000}} - 1 = 0,01153 = 1,153\%.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	D

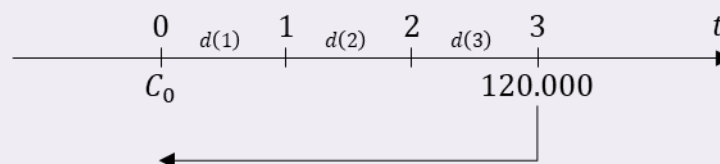
### Prova MGF/MMF del 30/06/2022 – Esercizio 3

I tassi effettivi di sconto per un contratto di prestito stipulato con capitalizzazione semplice sono  $d(1) = 1\%$ ,  $d(2) = 3\%$ ,  $d(3) = 4\%$ . Se il montante è 120.000 €, l'ammontare del prestito erogato oggi,  $C_0$ , è

- A.  $110.623,9 < C_0 < 110.624,7$
- B.  $110.624,7 < C_0 < 110.625,5$
- C.  $110.625,5 < C_0 < 110.626,1$
- D.  $110.626,1 < C_0 < 110.626,8$

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Conoscendo i tassi effettivi di sconto,  $d(1)$ ,  $d(2)$  e  $d(3)$ , possiamo attualizzare il valore nominale (o montante)  $C_3 = 120.000\text{€}$  determinando così il valore attuale (o capitale iniziale), come segue:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= C_3(1 - d(3))(1 - d(2))(1 - d(1)) \\
 &= 120.000 \cdot (1 - 0,04) \cdot (1 - 0,03) \cdot (1 - 0,01) \\
 &= 110.626,6\text{€}.
 \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	D	...	...	...	...

## 4. Equivalenza tra leggi finanziarie

### Esercizio 4.1

Convertire il tasso trimestrale composto  $i^{(4)} = 15\%$  in tasso quadrimestrale.

Soluzione.

Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione, imponendo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria trimestrale composta e della legge finanziaria quadrimestrale composta. In particolare,

$$(1 + i^{(4)})^4 = (1 + i^{(3)})^3$$

da cui

$$i^{(3)} = (1 + i^{(4)})^{\frac{4}{3}} - 1$$

ovvero

$$i^{(3)} = (1 + 0,15)^{\frac{4}{3}} - 1 = 0,2048 = 20,48\%.$$

### Esercizio 4.2

Si converta il 3% trimestrale anticipato in tasso quadrimestrale.

Soluzione.

Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione, imponendo l'uguaglianza tra i fattori di sconto della legge finanziaria trimestrale anticipata e della legge finanziaria quadrimestrale anticipata. In particolare,

$$1 - d^{(4)} \cdot 4 = 1 - d^{(3)} \cdot 3$$

da cui

$$d^{(3)} = \frac{4}{3} \cdot d^{(4)}$$

ovvero

$$d^{(3)} = \frac{4}{3} \cdot 0,03 = 0,04 = 4\%.$$

### Esercizio 4.3

*Si consideri un tasso composto quadrimestrale pari 4%. Si ricavi il tasso annuo nominale convertibile 3 volte l'anno e il tasso annuo effettivo equivalenti e si verifichi che il primo è minore del secondo.*

Soluzione.

Per la definizione di tasso annuo nominale, otteniamo

$$j_3 = i^{(3)} \cdot 3$$

da cui

$$j_3 = 0,04 \cdot 3 = 0,12 = 12\%.$$

Inoltre, determiniamo il tasso annuo equivalente al tasso quadrimestrale, imponendo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria quadrimestrale composta e della legge finanziaria annuale composta. In particolare,

$$(1 + i^{(3)})^3 = 1 + i$$

da cui

$$i = (1 + i^{(3)})^3 - 1$$

ovvero

$$i = (1 + 0,04)^3 - 1 = 0,1249 = 12,49\%.$$



Abbiamo così verificato che il tasso annuo equivalente al tasso quadrimestrale è maggiore del tasso annuo nominale convertibile 3 volte l'anno.

#### Esercizio 4.4

Eeguire la seguente conversione: dal 9% settimanale composto al tasso orario equivalente.

#### Soluzione.

Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione, sapendo che 1 anno è composto da 52 settimane e 8.760 ore. Imponendo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria settimanale composta e della legge finanziaria oraria composta, otteniamo

$$(1 + i^{(52)})^{52} = (1 + i^{(8.760)})^{8.760}$$

da cui

$$i^{(8.760)} = (1 + i^{(52)})^{\frac{52}{8.760}} - 1$$

ovvero

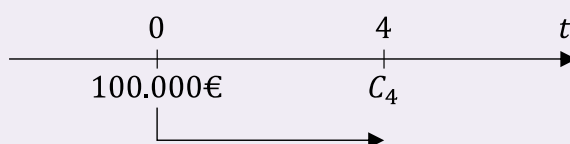
$$i^{(8.760)} = (1 + 0,09)^{\frac{52}{8.760}} - 1 = 0,000512 = 0,0512\%.$$

#### Esercizio 4.5

Si consideri un prestito di 100.000€ con un interesse pari a 2.000€. Il prestito è stipulato con una legge finanziaria composta e dura 4 anni. Si determini il tasso annuo (effettivo) e il tasso bimestrale equivalente.

#### Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Per la definizione di interesse, otteniamo

$$C_4 = C_0 + I$$

da cui

$$C_4 = 100.000 + 2.000 = 102.000\text{€}.$$

Sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 100.000\text{€}$ , il montante è  $C_4 = 102.000\text{€}$  e la durata dell'operazione è  $t = 4$  anni, possiamo determinare il tasso di interesse  $i$  con la relazione fondamentale:

$$C_4 = C_0(1 + i)^4$$

da cui

$$i = \sqrt[4]{\frac{C_4}{C_0}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{102.000}{100.000}} - 1 = 0,004963 = 0,4963\%.$$

Si noti che in regime composto il tasso annuo  $i$  coincide con il tasso effettivo. Pertanto,  $i = i(1) = i(2) = i(3) = i(4)$ . Ora, imponiamo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria annuale composta e della legge finanziaria bimestrale composta. In particolare,

$$1 + i = (1 + i^{(6)})^6$$

da cui

$$i^{(6)} = (1 + i)^{\frac{1}{6}} - 1$$

ovvero

$$i^{(6)} = (1 + 0,004963)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,000825 = 0,0825\%.$$

#### **Esercizio 4.6**

*Si determini il tasso di interesse annuo nominale convertibile 2 volte l'anno,  $j_2$ , equivalente all'intensità istantanea di interesse  $\delta = 10\%$ .*

Soluzione.

Imponiamo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria composta con capitalizzazione continua e della legge finanziaria semestrale composta:

$$e^{\delta} = (1 + i^{(2)})^2$$

da cui

$$i^{(2)} = e^{\frac{\delta}{2}} - 1$$

ovvero

$$i^{(2)} = e^{\frac{0,1}{2}} - 1 = 0,0513 = 5,13\%.$$

Per la definizione di tasso annuo nominale, otteniamo

$$j_2 = i^{(2)} \cdot 2$$

da cui

$$j_2 = 0,0513 \cdot 2 = 0,1025 = 10,25\%.$$

## 5. Equivalenza tra leggi finanziarie di regimi diversi

### Esercizio 5.1

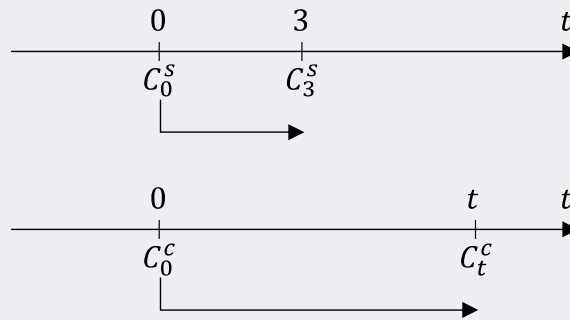
*Si consideri un prestito triennale stipulato con legge finanziaria semplice al 5%. Quanto tempo è necessario per ottenere, a parità di capitale, lo stesso montante con legge finanziaria composta del 2%?*

Soluzione.

Siano

- $C_0^s$  e  $C_3^s$  il capitale investito e il montante del prestito triennale (regime di interesse semplice)
- $C_0^c$  e  $C_t^c$  il capitale investito e il montante dell'operazione di cui dobbiamo determinare la durata (regime di interesse composto)

L'operazione finanziaria può allora essere rappresentata con il seguente schema:



Imponiamo l'uguaglianza tra i montanti  $C_3^s$  e  $C_t^c$ :

$$C_3^s = C_t^c$$

da cui

$$C_0^s(1 + i^s \cdot 3) = C_0^c(1 + i^c)^t.$$

Sapendo che  $C_0^s = C_0^c$ , semplifichiamo e otteniamo

$$1 + i^s \cdot 3 = (1 + i^c)^t$$

ovvero

$$1 + 0,05 \cdot 3 = (1 + 0,02)^t$$

$$1,15 = 1,02^t$$

da cui

$$\ln 1,15 = \ln 1,02^t \Rightarrow \ln 1,15 = t \ln 1,02$$

e quindi

$$t = \frac{\ln 1,15}{\ln 1,02} = 7,06.$$

Pertanto, a parità di capitale, sono necessari 7,06 anni (7 anni e 21 giorni circa) per ottenere lo stesso montante con legge finanziaria composta del 2%.

### Esercizio 5.2

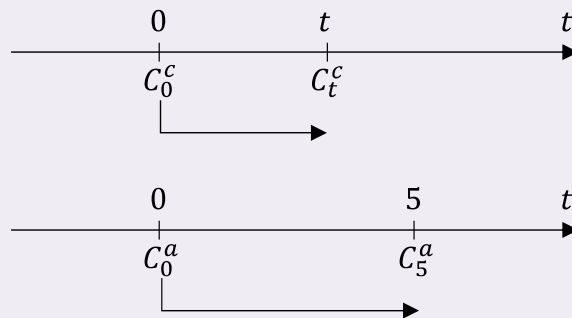
*Quanto tempo è necessario per ottenere con una legge finanziaria al 5% composto lo stesso interesse di un investimento quinquennale al 3% anticipato, a parità di capitale investito?*

Soluzione.

Siano

- $C_0^c$  e  $C_t^c$  il capitale investito e il montante dell'operazione di cui dobbiamo determinare la durata (regime di interesse composto)
- $C_0^a$  e  $C_5^a$  il capitale investito e il montante dell'investimento quinquennale (regime di interesse anticipato)

L'operazione finanziaria può allora essere rappresentata con il seguente schema:



Imponiamo l'uguaglianza tra gli interessi generati dai due investimenti, denotati con  $I^c$  e  $I^a$ :

$$I^c = I^a$$

da cui, per la definizione di interesse, otteniamo

$$C_t^c - C_0^c = C_5^a - C_0^a.$$

Sapendo che  $C_t^c = C_0^a$ , semplifichiamo e otteniamo

$$\begin{aligned} C_t^c &= C_5^a \\ C_0^c(1 + i^c)^t &= \frac{C_0^a}{1 - d^a \cdot 5} \\ (1 + i^c)^t &= \frac{1}{1 - d^a \cdot 5} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} (1 + 0,05)^t &= \frac{1}{1 - 0,03 \cdot 5} \\ 1,05^t &= \frac{1}{0,85} \end{aligned}$$

da cui

$$\ln 1,05^t = \ln\left(\frac{1}{0,85}\right) \Rightarrow t \ln 1,05 = \ln\left(\frac{1}{0,85}\right)$$

e quindi

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{0,85}\right)}{\ln 1,05} = 3,33.$$

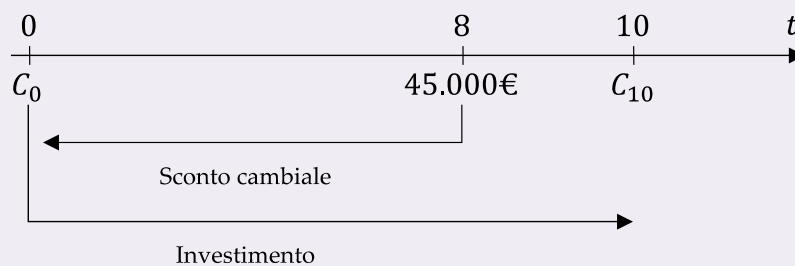
Pertanto, a parità di capitale, sono necessari 3,33 anni (3 anni e circa 4 mesi) per ottenere lo stesso interesse con legge finanziaria al 5% composto.

### Esercizio 5.3

*Il rag. Fanti si reca in banca con una cambiale attiva del valore nominale di 45.000€, scadente in  $t = 8$ , e chiede alla banca di anticipare l'importo. La banca sconta la cambiale con regime di sconto commerciale, al tasso dell'1,6%. Il rag. Fanti investe l'importo ottenuto per 10 anni al 2% composto. È vero che, complessivamente, questa operazione di sconto più investimento produce gli stessi flussi di cassa di un prestito biennale di 45.000€ (erogato fra 8 anni) in regime di interesse semplice al 3,148%?*

Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria di sconto della cambiale più investimento con il seguente schema:



Determiniamo prima il valore attuale della cambiale (ovvero l'importo ricevuto dal rag. Fanti), sapendo che la banca la sconta con regime di sconto commerciale, al tasso dell'1,6%. In particolare,

$$C_0 = C_8(1 - d \cdot 8)$$

ovvero

$$C_0 = 45.000 \cdot (1 - 0,016 \cdot 8) = 39.240\text{€}.$$

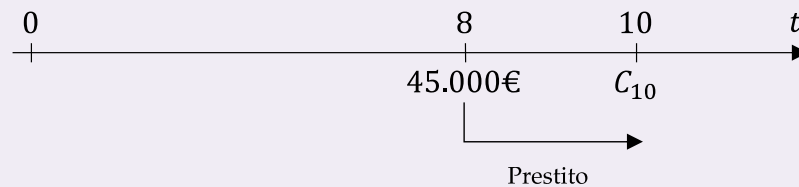
Tale somma viene subito reinvestita dal rag. Fanti per 10 anni al 2% composto. Determiniamo quindi il montante di tale investimento. In particolare,

$$C_{10} = C_0(1 + i^c)^{10}$$

ovvero

$$C_{10} = 39.240 \cdot (1 + 0,02)^{10} = 47.833\text{€}.$$

Rappresentiamo ora l'operazione finanziaria di prestito con il seguente schema:



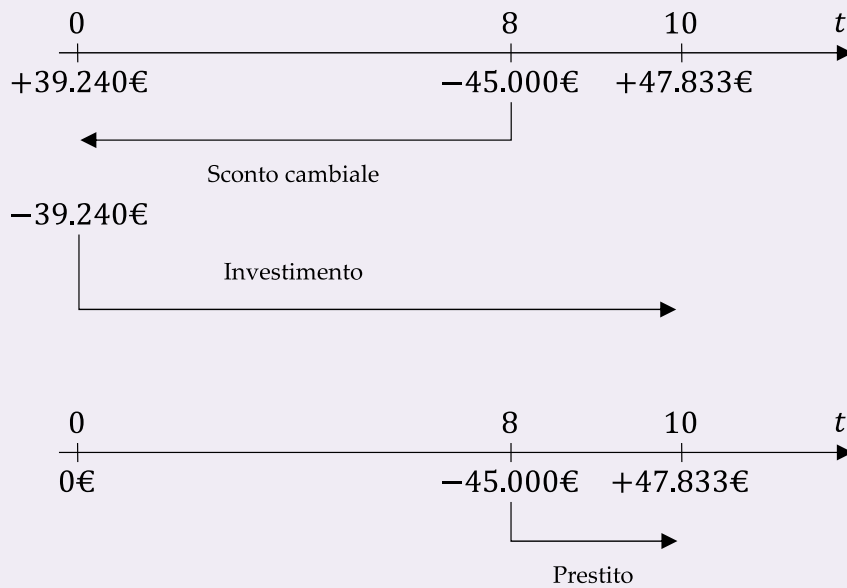
Determiniamo il montante di tale operazione, sapendo che il tasso di interesse è  $i^s = 3,148\%$  (in regime di interesse semplice) e la durata dell'operazione è  $t = 2$  anni. In particolare,

$$C_{10} = C_8(1 + i^s \cdot 2)$$

ovvero

$$C_{10} = 45.000 \cdot (1 + 0,03148 \cdot 2) = 47.833\text{€}.$$

Rappresentiamo qui sotto i flussi di cassa delle due operazioni. Si noti che nel primo schema il flusso di cassa  $F_8 = -45.000\text{€}$  corrisponde alla somma di denaro futura a cui rinuncia il rag. Fanti chiedendo alla banca di anticipare l'importo. Inoltre, si noti che il secondo schema rappresenta i flussi di cassa relativi al prestito biennale dal punto di vista dell'ente creditizio.



Possiamo così concludere che complessivamente l'operazione di sconto più investimento produce gli stessi flussi di cassa dell'operazione di prestito biennale.

## 6. Scindibilità

### Esercizio 6.1

Si verifichi l'eventuale scindibilità della seguente legge finanziaria:

$$f(t) = e^t + \ln(1 + 0,2t)$$

Soluzione.

Per definizione, una legge finanziaria è scindibile se viene soddisfatta la seguente condizione:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) \quad \text{per ogni } x, y \geq 0.$$

Verifichiamo quindi se la legge finanziaria data è scindibile. In particolare,

$$f(x) = e^x + \ln(1 + 0,2x) \quad \text{e} \quad f(y) = e^y + \ln(1 + 0,2y)$$

da cui

$$f(x) \cdot f(y) = e^{x+y} + e^x \ln(1 + 0,2y) + e^y \ln(1 + 0,2x) + \ln(1 + 0,2x) \cdot \ln(1 + 0,2y).$$



Inoltre,

$$f(x + y) = e^{x+y} + \ln(1 + 0,2(x + y)).$$

Pertanto, risulta evidente che la legge finanziaria data non è scindibile dal momento che

$$f(x) \cdot f(y) \neq f(x + y).$$

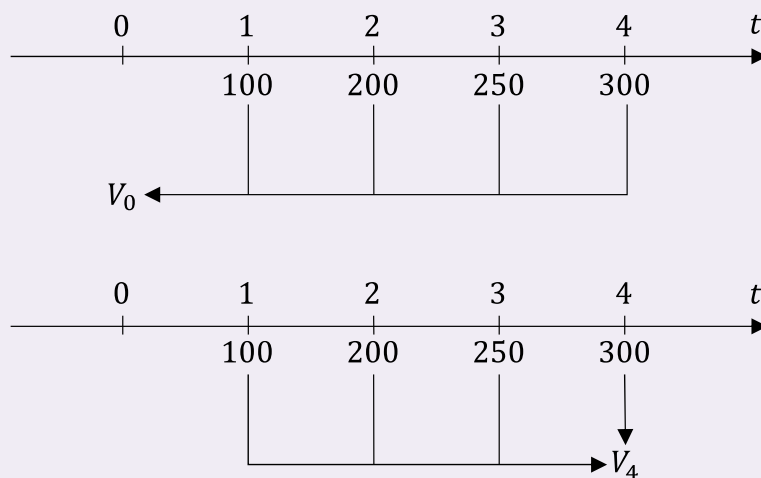
## 7. Rendite

### Esercizio 7.1

Si consideri la rendita di 4 rate  $R_1 = 100\text{€}$ ,  $R_2 = 200\text{€}$ ,  $R_3 = 250\text{€}$  e  $R_4 = 300\text{€}$ . Determinare il valore attuale della rendita  $V_0$  e il montante  $V_4$  con tasso di valutazione semplice  $i = 5\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente (doppio) schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Conoscendo il valore delle singole rate e sapendo che in regime di interesse semplice il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \frac{1}{1+it}$ , possiamo determinare il valore attuale della rendita  $V_0$  con la relazione fondamentale:

$$V_0 = \sum_{t=1}^4 R_t \cdot \Phi(t) = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{1+i \cdot 2} + \frac{R_3}{1+i \cdot 3} + \frac{R_4}{1+i \cdot 4}$$

ovvero

$$V_0 = \frac{100}{1 + 0,05} + \frac{200}{1 + 0,05 \cdot 2} + \frac{250}{1 + 0,05 \cdot 3} + \frac{300}{1 + 0,05 \cdot 4} = 744,45\text{€}.$$

Ora, ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Conoscendo il valore delle singole rate e sapendo che in regime di interesse semplice il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = 1 + it$ , possiamo determinare il montante della rendita  $V_4$  con la relazione fondamentale:

$$V_4 = \sum_{t=1}^4 R_t \cdot f(4 - t) = R_1 \cdot f(4 - 1) + R_2 \cdot f(4 - 2) + R_3 \cdot f(4 - 3) + R_4$$

ovvero

$$V_4 = 100 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) + 200 \cdot (1 + 0,05 \cdot 2) + 250 \cdot (1 + 0,05) + 300 = 897,50\text{€}.$$

Si noti che, poiché una qualsiasi legge finanziaria semplice non è scindibile, se attualizziamo il montante  $V_4$  non otteniamo il valore attuale ottenuto precedentemente. Infatti,

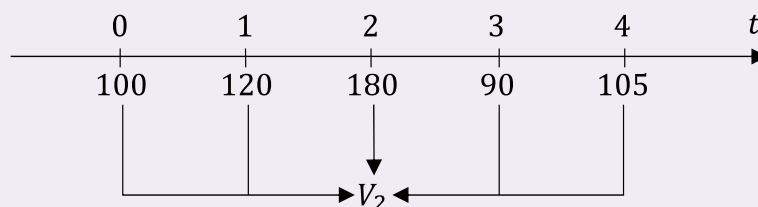
$$\frac{V_4}{1 + i \cdot 4} = \frac{897,50}{1 + 0,05 \cdot 4} = 747,92 \neq 744,45.$$

### Esercizio 7.2

Si valuti, all'epoca  $t = 2$ , una rendita di cinque termini con rate  $F_0 = 100\text{€}$ ,  $F_1 = 120\text{€}$ ,  $F_2 = 180\text{€}$ ,  $F_3 = 90\text{€}$ ,  $F_4 = 105\text{€}$ , rispettivamente, e tasso di valutazione composto  $i = 10\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione per le rate versate precedentemente all'epoca  $t = 2$  e in una prospettiva di sconto per le rate versate successivamente all'epoca  $t = 2$ . Conoscendo l'importo delle singole rate e sapendo che in regime di interesse

composto il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = (1 + i)^t$  e il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = (1 + i)^{-t}$  (o, in maniera equivalente,  $\Phi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ ), possiamo determinare il valore attuale della rendita all'epoca  $t = 2$  con la relazione fondamentale:

$$\begin{aligned} V_2 &= \sum_{t=0}^2 F_t \cdot f(2-t) + \sum_{t=3}^4 F_t \cdot \Phi(t-2) \\ &= F_0 \cdot (1+i)^2 + F_1 \cdot (1+i) + F_2 + \frac{F_3}{1+i} + \frac{F_4}{(1+i)^2} \end{aligned}$$

ovvero

$$V_2 = 100 \cdot (1 + 0,1)^2 + 120 \cdot (1 + 0,1) + 80 + \frac{90}{1 + 0,1} + \frac{105}{(1 + 0,1)^2} = 501,60\text{€}.$$

Poiché una qualsiasi legge finanziaria composta è scindibile, in modo equivalente avremmo potuto calcolare il valore attuale della rendita  $V_0$  e successivamente capitalizzare di 2 periodi per determinare il valore della rendita all'epoca  $t = 2$ , come segue:

$$V_0 = \sum_{t=0}^4 F_t \cdot \Phi(t) = F_0 + \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4}$$

ovvero

$$V_0 = 100 + \frac{120}{1 + 0,1} + \frac{80}{(1 + 0,1)^2} + \frac{90}{(1 + 0,1)^3} + \frac{105}{(1 + 0,1)^4} = 414,54\text{€}$$

da cui

$$V_2 = V_0 \cdot f(2) = V_0 \cdot (1+i)^2 = 414,54 \cdot (1 + 0,1)^2 = 501,60\text{€}.$$

In modo altrettanto equivalente avremmo potuto calcolare il montante della rendita  $V_4$  e successivamente scontarne il valore di 2 periodi per determinare il valore della rendita all'epoca  $t = 2$ , come segue:

$$V_4 = \sum_{t=0}^4 F_t \cdot f(4-t) = F_0 \cdot (1+i)^4 + F_1 \cdot (1+i)^3 + F_2 \cdot (1+i)^2 + F_3 \cdot (1+i) + F_4$$

ovvero

$$V_4 = 100 \cdot (1 + 0,1)^4 + 120 \cdot (1 + 0,1)^3 + 80 \cdot (1 + 0,1)^2 + 90 \cdot (1 + 0,1) + 105 = 606,93\text{€}$$

da cui

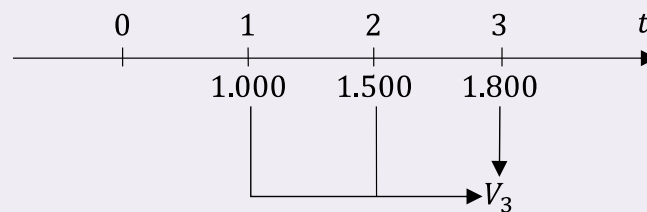
$$V_2 = V_4 \cdot \Phi(2) = \frac{V_4}{(1+i)^2} = \frac{606,93}{(1+0,1)^2} = 501,60\text{€}.$$

### Esercizio 7.3

Si calcoli il montante  $V_3$  di una rendita di 3 termini, con  $F_1 = 1.000\text{€}$ ,  $F_2 = 1.500\text{€}$  e  $F_3 = 1.800\text{€}$ , rispettivamente, e tasso di valutazione anticipato  $d = 7\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Conoscendo il valore delle singole rate e sapendo che in regime di interesse semplice il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = \frac{1}{1-dt}$ , possiamo determinare il montante della rendita  $V_3$  con la relazione fondamentale:

$$V_3 = \sum_{t=1}^3 F_t \cdot f(3-t) = \frac{F_1}{1-d \cdot 2} + \frac{F_2}{1-d} + F_3$$

ovvero

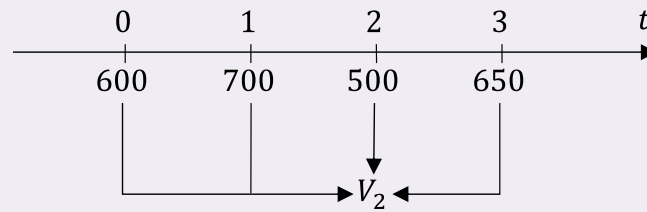
$$V_4 = \frac{1.000}{1-0,07 \cdot 2} + \frac{1.500}{1-0,07} + 1.800 = 4.575,69\text{€}.$$

### Esercizio 7.4

Si valuti, all'epoca  $t = 2$ , una rendita di 4 rate di importo  $R_0 = 600\text{€}$ ,  $R_1 = 700\text{€}$ ,  $R_2 = 500\text{€}$  e  $R_3 = 650\text{€}$ , rispettivamente, assumendo un'intensità istantanea di interesse pari a  $\delta = 3\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione per le rate versate precedentemente rispetto all'epoca  $t = 2$  e in una prospettiva di sconto per le rate versate successivamente rispetto all'epoca  $t = 2$ . Conoscendo il valore delle singole rate e sapendo che in regime di capitalizzazione continua il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = e^{\delta t}$  e il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = e^{-\delta t}$  (o, in maniera equivalente,  $\Phi(t) = \frac{1}{e^{\delta t}}$ ), possiamo determinare il valore attuale della rendita all'epoca  $t = 2$  con la relazione fondamentale:

$$\begin{aligned} V_2 &= \sum_{t=0}^2 R_t \cdot f(2-t) + R_3 \cdot \Phi(3) \\ &= R_0 \cdot e^{\delta \cdot 2} + R_1 \cdot e^{\delta} + R_2 + \frac{R_3}{e^{\delta}} \end{aligned}$$

ovvero

$$V_2 = 600 \cdot e^{0,03 \cdot 2} + 700 \cdot e^{0,03} + 500 + \frac{650}{e^{0,03}} = 2.489,21\text{€}.$$

Alternativamente, sfruttando la proprietà di scindibilità, calcoliamo il valore attuale,

$$V_0 = 600 + 700e^{0,03} + 500e^{0,03 \cdot 2} + 650e^{0,03 \cdot 3} = 2.344,25$$

e poi capitalizziamo fino a  $t = 2$ :

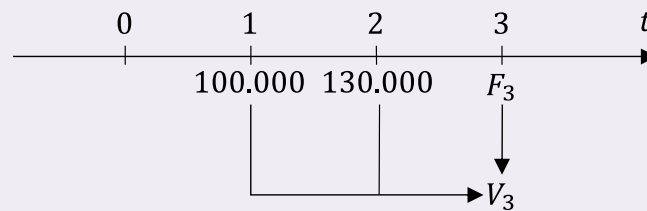
$$V_2 = V_0 \cdot e^{0,03 \cdot 2} = 2.344,25 \cdot e^{0,03 \cdot 2}.$$

### Esercizio 7.5

Si vuole costituire un capitale di 320.000€ in  $t = 3$  mediante 3 versamenti,  $F_1 = 100.000\text{€}$ ,  $F_2 = 130.000\text{€}$  e  $F_3$  in  $t = 1, 2, 3$  rispettivamente, con tasso di interesse anticipato  $d = 7\%$ . Si determini  $F_3$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Conoscendo il valore di due versamenti ( $F_1$  e  $F_2$ ) e il montante  $V_3$  e sapendo che in regime di sconto commerciale il fattore di montante è definito dalla legge  $f(t) = \frac{1}{1-dt}$ , possiamo determinare il valore del terzo versamento  $F_3$  con la relazione fondamentale:

$$V_3 = \sum_{t=1}^3 F_t \cdot f(3-t) = F_1 \cdot f(3-1) + F_2 \cdot f(3-2) + F_3$$

da cui

$$F_3 = V_3 - (F_1 \cdot f(2) + F_2 \cdot f(1))$$

ovvero

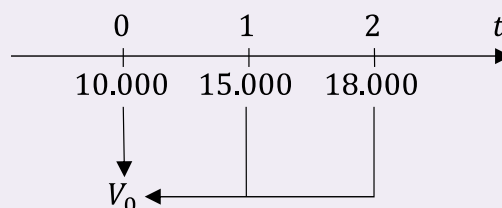
$$F_3 = 320.000 - \left( \frac{100.000}{1 - 0,07 \cdot 2} + \frac{130.000}{1 - 0,07} \right) = 63.935,98\text{€}.$$

### Esercizio 7.6

Il valore attuale di una rendita di 3 rate  $R_0 = 10.000\text{€}$ ,  $R_1 = 15.000\text{€}$  e  $R_2 = 18.000\text{€}$  è pari a  $30.000\text{€}$ . Si determini il tasso di interesse composto  $i$  implicito nell'operazione.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Conoscendo il valore delle singole rate e il valore attuale della rendita  $V_0$  e sapendo che in regime di interesse composto il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ , possiamo determinare il tasso di interesse  $i$  con la relazione fondamentale:

$$V_0 = R_0 + \sum_{t=1}^2 R_t \cdot \Phi(t) = R_0 + R_1 \cdot \Phi(1) + R_2 \cdot \Phi(2)$$

$$V_0 = R_0 + \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2}$$

Moltiplicando a destra e sinistra dell'uguale per la quantità positiva  $(1+i)^2$ , otteniamo

$$V_0(1+i)^2 = R_0(1+i)^2 + R_1(1+i) + R_2$$

ovvero

$$30.000 \cdot (1+i)^2 = 10.000 \cdot (1+i)^2 + 15.000 \cdot (1+i) + 18.000.$$

Risolviamo ora l'equazione di secondo grado rispetto all'incognita  $i$ . In particolare,

$$30.000 + 60.000i + 30.000i^2 = 10.000 + 20.000i + 10.000i^2 + 15.000 + 15.000i + 18.000$$

$$20.000i^2 + 25.000i - 13.000 = 0$$

$$20i^2 + 25i - 13 = 0$$

da cui

$$i_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{1.665}}{40}$$

ovvero

$$i_1 = 0,3951 \quad \text{e} \quad i_2 = -1,6451.$$

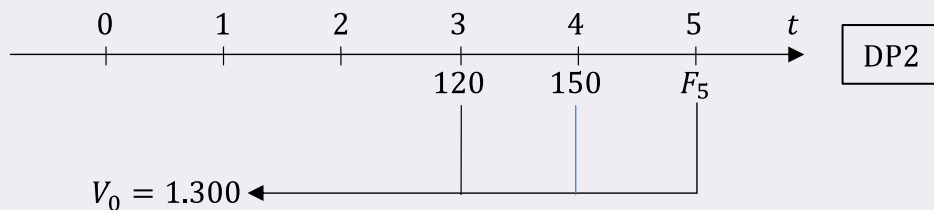
La soluzione  $i_2$  non è finanziariamente accettabile (essendo minore di  $-1$ ). Pertanto, il tasso di interesse composto implicito nell'operazione è  $i = 39,51\%$ .

**Esercizio 7.7**

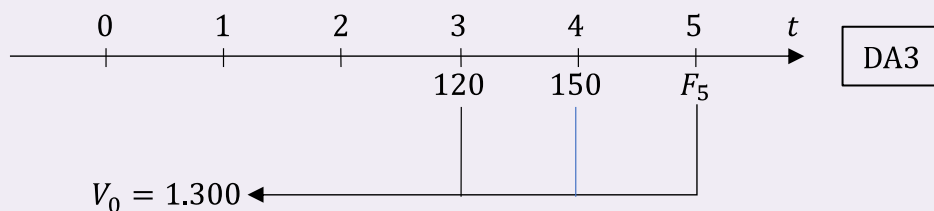
Si consideri una rendita differita di 3 periodi, anticipata, costituita da 3 rate: la prima è pari a 120€, la seconda è pari a 150€. Si ricavi la terza rata sapendo che la legge finanziaria di valutazione è quella dell'interesse composto al 10% e che il valore attuale della rendita è  $V_0 = 1.300\text{€}$ .

Soluzione.

La rendita può essere interpretata come rendita differita di 2 periodi, posticipata (DP2),



oppure come rendita differita di 3 periodi, anticipata (DA3):



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Conoscendo il valore di due rate (120 e 150) e il valore della rendita  $V_0$  (1.300), e sapendo che in regime di interesse composto il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ , possiamo determinare il valore della terza rata  $F_5$  con la relazione fondamentale:

$$V_0 = F_3 \cdot \Phi(3) + F_4 \cdot \Phi(4) + F_5 \cdot \Phi(5)$$

$$V_0 = \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4} + \frac{F_5}{(1+i)^5}$$

da cui

$$F_5 = V_0(1+i)^5 - F_3(1+i)^2 - F_4(1+i)$$

ovvero

$$F_5 = 1.300 \cdot (1 + 0,1)^5 - 120 \cdot (1 + 0,1)^2 - 150 \cdot (1 + 0,1) = 1.783,46\text{€}.$$

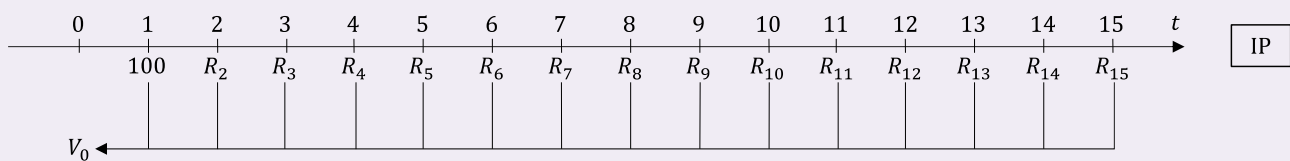


**Esercizio 7.8**

Si calcoli il valore attuale di una rendita a rata annua assumendo che la prima rata sia pari a 100€ e ciascuna rata sia maggiore della precedente del 2%. La legge finanziaria è quella dell'interesse composto al 5%, la rendita è immediata posticipata ed è costituita da 15 termini.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Conoscendo il valore della prima rata  $R_1$  (100) e sapendo che in regime di interesse composto il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ , possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$  con la relazione fondamentale:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{15} R_t \cdot \Phi(t) = \sum_{t=1}^{15} \frac{R_t}{(1+i)^t}$$

ovvero

$$V_0 = \sum_{t=1}^{15} \frac{R_t}{(1+0,05)^t}$$

Prima di procedere con il calcolo del valore della rendita  $V_0$ , è necessario determinare il valore delle singole rate, sapendo che ciascuna rata è maggiore della precedente del 2%. In particolare, la relazione tra due rate consecutive è la seguente:

$$R_t = R_{t-1}(1,05)$$

da cui

$$R_2 = 100 \cdot (1,05)$$

$$R_3 = 100 \cdot (1,05)^2$$

$$R_4 = 100 \cdot (1,05)^3$$

$$R_5 = 100 \cdot (1,05)^4$$

e così via. In tal modo, si determinano gli importi delle singole rate (seconda colonna della tabella sottostante) e, quindi, i valori attuali delle singole rate (terza colonna):

$t$	$R_t$	$\frac{R_t}{(1 + 0,05)^t}$
1	100,00€	95,24€
2	102,00€	92,52€
3	104,04€	89,87€
4	106,12€	87,31€
5	108,24€	84,81€
6	110,41€	82,39€
7	112,62€	80,04€
8	114,87€	77,75€
9	117,17€	75,53€
10	119,51€	73,39€
11	121,90€	71,27€
12	124,34€	69,24€
13	126,82€	67,26€
14	129,36€	65,34€
15	131,95€	63,47€
$\Sigma$	-	<b>1.175,43€</b>

La somma dei valori riportati nella terza colonna costituisce proprio il valore attuale della rendita  $V_0$ :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{15} \frac{R_t}{(1 + 0,05)^t} = 1.175,43€.$$

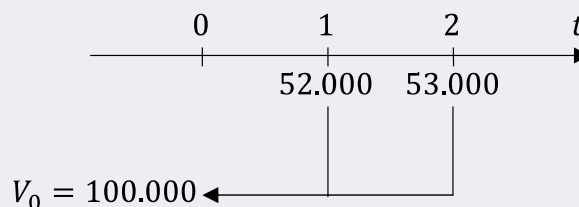
**Prova MGF/MMF del 16/02/2022 – Esercizio 5**

Un finanziamento di 100 mila euro è rimborsato con due rate annue pari a  $R_1 = 52.000$  e  $R_2 = 53.000$  rispettivamente. Il tasso di interesse composto  $i$  implicito nel contratto di finanziamento è soluzione dell'equazione

- A.  $100.000(1+i)^2 - 52.000(1+i) = 53.000$
- B.  $100.000 - 53.000/(1+i)^2 = -52.000/(1+i)$
- C.  $100.000 + 53.000/(1+i)^2 = 52.000/(1+i)$
- D.  $100.000 = 52.000(1+i) + 53.000$

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Conoscendo il valore delle due rate e il valore attuale del finanziamento  $V_0$  (100.000) e sapendo che in regime di interesse composto il fattore di sconto è definito dalla legge  $\Phi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$ , possiamo determinare il tasso di interesse  $i$  con la relazione fondamentale:

$$V_0 = \sum_{t=1}^2 R_t \cdot \Phi(t) = R_1 \cdot \Phi(1) + R_2 \cdot \Phi(2)$$

$$V_0 = \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2}$$

Moltiplicando a destra e sinistra dell'uguale per la quantità positiva  $(1+i)^2$ , otteniamo

$$V_0(1+i)^2 = R_1(1+i) + R_2$$

ovvero

$$100.000 \cdot (1+i)^2 = 52.000 \cdot (1+i) + 53.000.$$

Portando infine a sinistra dell'uguale il termine  $52.000 \cdot (1 + i)$ , otteniamo

$$100.000 \cdot (1 + i)^2 - 52.000 \cdot (1 + i) = 53.000.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la A. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	A	...	...

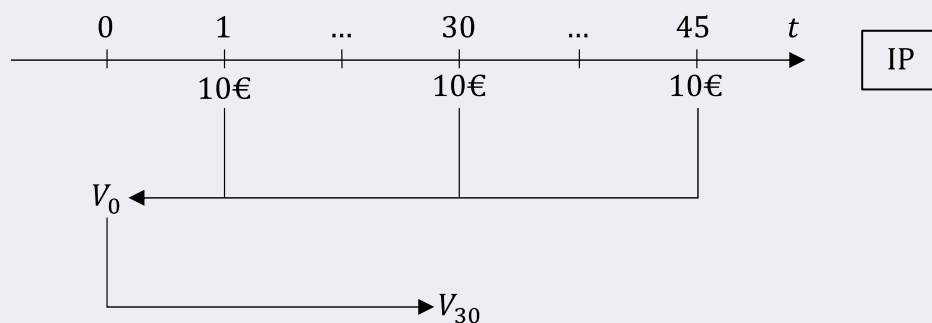
## 8. Rendite a rata costante

### Esercizio 8.1

Si valuti, all'epoca  $t = 30$ , una rendita di 45 termini, immediata posticipata, con rata pari a 10€ e tasso di valutazione composto  $i = 1,3\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione e, successivamente, di capitalizzazione, sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta. Infatti, trattandosi di una rendita immediata posticipata a rata costante, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$  utilizzando la seguente formula:

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - v^n}{i} \quad \text{dove} \quad v = \frac{1}{1 + i}$$

da cui

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

ovvero

$$V_0 = 10 \cdot \frac{1 - (1 + 0,013)^{-45}}{0,013} = 339,07.$$

A questo punto, per calcolare il valore della rendita all'epoca  $t = 30$  è sufficiente capitalizzare il valore attuale della rendita  $V_0$  di 30 periodi. In particolare,

$$V_{30} = V_0(1+i)^{30}$$

ovvero

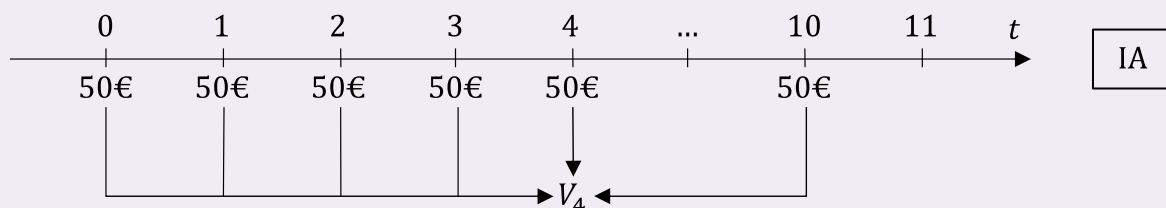
$$V_{30} = 339,07 \cdot (1 + 0,013)^{30} = 499,54.$$

### Esercizio 8.2

Si consideri la rendita di rata costante pari a 50, immediata anticipata, di 11 termini. Se ne calcoli il valore all'epoca 4 con tasso di sconto annuo (commerciale)  $d = 1\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Poiché una legge finanziaria di sconto commerciale non è scindibile, occorre ragionare sia in una prospettiva di sconto che in una prospettiva di capitalizzazione. In particolare, per calcolare il valore della rendita all'epoca  $t = 4$  occorre capitalizzare le rate versate in epoche precedenti (per  $t = 0, \dots, 3$ ) e scontare le rate versate in epoche successive (per  $t = 5, \dots, 10$ ), come segue:

$$\begin{aligned}
 V_4 &= \frac{R}{1-d \cdot 4} + \frac{R}{1-d \cdot 3} + \frac{R}{1-d \cdot 2} + \frac{R}{1-d} + R + R(1-d) + R(1-d \cdot 2) + R(1-d \cdot 3) \\
 &\quad + R(1-d \cdot 4) + R(1-d \cdot 5) + R(1-d \cdot 6) \\
 &= R \left( \frac{1}{1-d \cdot 4} + \frac{1}{1-d \cdot 3} + \frac{1}{1-d \cdot 2} + \frac{1}{1-d} + 1 + (1-d) + (1-d \cdot 2) + (1-d \cdot 3) \right. \\
 &\quad \left. + (1-d \cdot 4) + (1-d \cdot 5) + (1-d \cdot 6) \right)
 \end{aligned}$$

ovvero

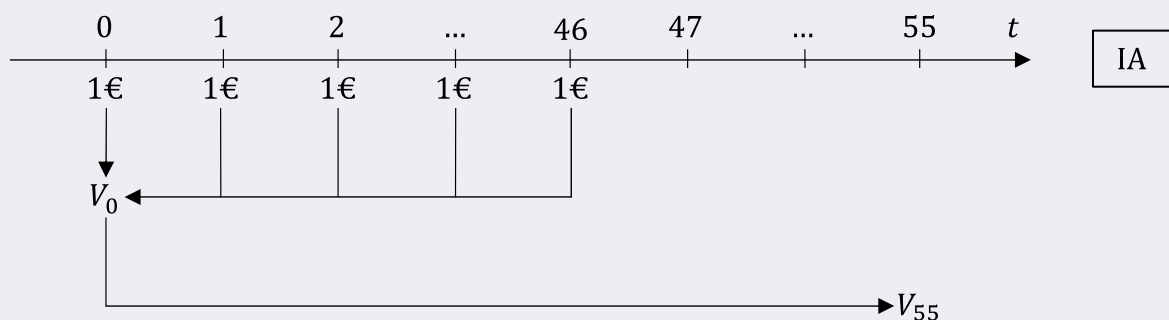
$$\begin{aligned}
 V_4 &= 50 \left( \frac{1}{1-0,01 \cdot 4} + \frac{1}{1-0,01 \cdot 3} + \frac{1}{1-0,01 \cdot 2} + \frac{1}{1-0,01} + 1 + (1-0,01) \right. \\
 &\quad \left. + (1-0,01 \cdot 2) + (1-0,01 \cdot 3) + (1-0,01 \cdot 4) + (1-0,01 \cdot 5) \right. \\
 &\quad \left. + (1-0,01 \cdot 6) \right) = 544,66.
 \end{aligned}$$

### Esercizio 8.3

Si calcoli il montante in  $t = 55$  di una rendita immediata anticipata di rata unitaria, di 47 termini al tasso (composto) del 13%.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione e, successivamente, di capitalizzazione, sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta. Infatti, trattandosi di una rendita immediata anticipata a rata costante unitaria, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$  utilizzando la seguente formula (ricordandoci di capitalizzare di 1 periodo visto che le rate vengono versate in anticipo):

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot (1 + i)$$

ovvero

$$V_0 = 1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,13)^{-47}}{0,13} \cdot (1 + 0,13) = \frac{(1,13) - (1,13)^{-46}}{0,13} = 8,66.$$

A questo punto, per calcolare il valore della rendita all'epoca  $t = 55$ , è sufficiente capitalizzare il valore attuale della rendita  $V_0$  di 55 periodi:

$$V_{55} = V_0(1 + i)^{55}$$

ovvero

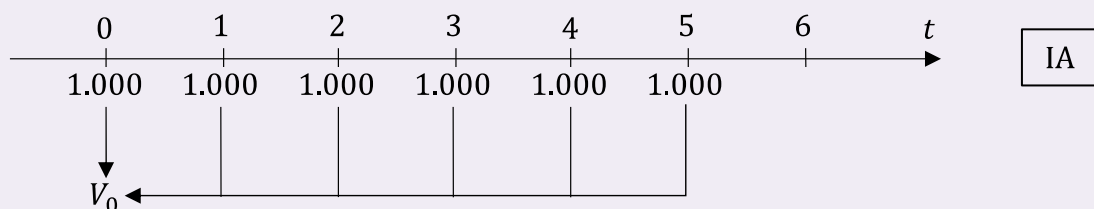
$$V_{55} = 8,66 \cdot (1 + 0,13)^{55} = 7.195,43.$$

#### Esercizio 8.4

Si ricavino gli importi delle rate di una rendita immediata anticipata di 6 termini, il cui valore attuale sia 1.000 e il tasso di valutazione sia il 10% composto.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione, sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta. Infatti, trattandosi di una rendita immediata anticipata a rata costante, possiamo determinare gli importi (costanti) delle rate partendo dalla seguente formula (ricordandoci di capitalizzare di 1 periodo visto che le rate vengono versate in anticipo):

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot (1 + i)$$

da cui

$$R = \frac{V_0 \cdot i}{(1+i) - (1+i)^{-n+1}}$$

ovvero

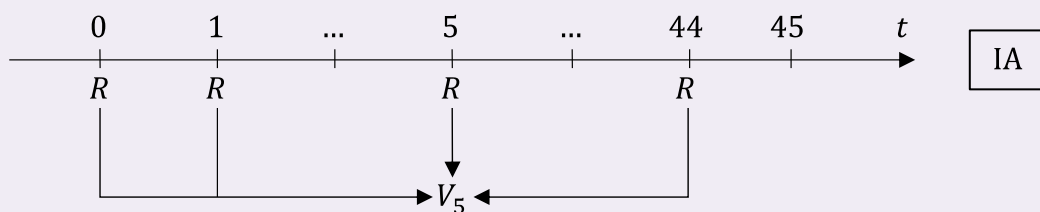
$$R = \frac{1.000 \cdot 0,1}{(1+0,1) - (1+0,1)^{-5}} = 208,73.$$

### Esercizio 8.5

Si fornisca l'espressione, in funzione della rata  $R$ , del valore all'epoca  $t = 5$  di una rendita immediata anticipata di 45 termini. Si consideri una capitalizzazione anticipata a tasso  $d = 1,5\%$ .

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Poiché una legge finanziaria anticipata non è scindibile, occorre ragionare sia in una prospettiva di sconto sia in una prospettiva di capitalizzazione. In particolare, per fornire l'espressione analitica del valore della rendita all'epoca  $t = 5$  occorre capitalizzare le rate versate in epoche precedenti (per  $t = 0, \dots, 4$ ) e scontare le rate versate in epoche successive (per  $t = 6, \dots, 44$ ), come segue:

$$V_5 = \sum_{t=0}^5 \frac{R}{1 - d \cdot (5 - t)} + \sum_{t=6}^{44} R \cdot (1 - d \cdot (t - 5))$$

ovvero

$$V_5 = R \left( \sum_{t=0}^5 \frac{1}{1 - 0,015 \cdot (5 - t)} + 1 + \sum_{t=6}^{44} 1 \cdot (1 - 0,015 \cdot (t - 5)) \right)$$

In alternativa, avremmo potuto comprendere il fattore di valutazione della rata versata all'epoca  $t = 5$  nella seconda sommatoria, ottenendo così la seguente espressione che è equivalente alla precedente:



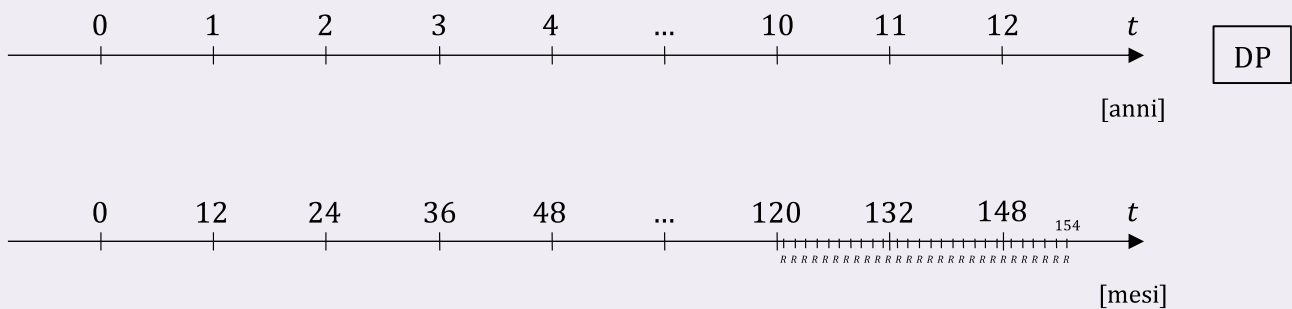
$$V_5 = R \left( \sum_{t=0}^4 \frac{1}{1 - 0,015 \cdot (5 - t)} + \sum_{t=5}^{44} 1 \cdot (1 - 0,015 \cdot (t - 5)) \right)$$

**Esercizio 8.6**

Calcolare la rata costante di una rendita differita di 10 anni, posticipata, di 34 rate mensili, il cui valore all'epoca  $t = 11$  è pari a 1.000 e il cui tasso di valutazione è pari al 10% annuo nominale convertibile 12 volte l'anno.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con i seguenti schemi (prendendo rispettivamente come unità di misura del tempo l'anno e il mese):



La rendita è quindi differita di 120 mesi, posticipata. L'ultima rata scade in  $t = 154$ . Anzitutto, a partire dalla definizione di tasso annuo nominale, ricaviamo il tasso periodale (mensile)

$$i^{(12)} = \frac{j_{12}}{12}$$

ovvero

$$i^{(12)} = \frac{0,1}{12} = 0,0083 = 0,83\%.$$

A questo punto, sappiamo che il valore della rendita all'epoca  $t = 11$  (corrispondente all'epoca  $t = 132$  se ragioniamo su un orizzonte di capitalizzazione mensile degli interessi) è pari a 1.000. Sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta, possiamo determinare la rata costante della rendita partendo dalla seguente formula:

$$\begin{aligned}
 V_{132} &= V_{120} \cdot (1 + i^{(12)})^{12} \\
 &= R \cdot \frac{1 - (1 + i^{(12)})^{-34}}{i^{(12)}} \cdot (1 + i^{(12)})^{12} \\
 &= R \cdot \frac{(1 + i^{(12)})^{12} - (1 + i^{(12)})^{-22}}{i^{(12)}}
 \end{aligned}$$

da cui

$$R = \frac{V_{132} \cdot i^{(12)}}{(1 + i^{(12)})^{12} - (1 + i^{(12)})^{-22}}$$

ovvero

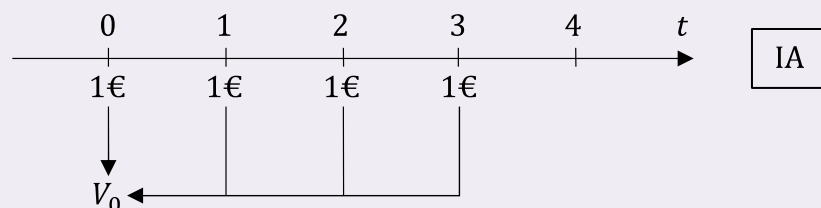
$$R = \frac{1.000 \cdot 0,0083}{(1 + 0,0083)^{12} - (1 + 0,0083)^{-22}} = 30,68.$$

### Esercizio 8.7

Si calcoli il montante di un investimento il cui esborso è pari al valore attuale di una rendita immediata anticipata di 4 rate di importo unitario valutata al 10% semplice. L'investimento è realizzato al 13% anticipato e dura 3 anni.

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione, tenendo presente che una legge finanziaria semplice non è scindibile. Pertanto, il valore della rendita  $V_0$  vale

$$\begin{aligned}
 V_0 &= F \cdot \sum_{t=0}^3 \frac{1}{1 + i \cdot t} \\
 &= F + \frac{F}{1 + i} + \frac{F}{1 + i \cdot 2} + \frac{F}{1 + i \cdot 3}
 \end{aligned}$$

ovvero

$$V_0 = 1 + \frac{1}{1 + 0,1} + \frac{1}{1 + 0,1 \cdot 2} + \frac{1}{1 + 0,1 \cdot 3} = 3,51.$$

Andiamo ora a rappresentare l'investimento lungo l'asse dei tempi, come segue:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione. Sapendo che l'esborso è pari al valore attuale della rendita, il tasso di interesse è  $d = 13\%$  e la durata dell'operazione è  $t = 3$  anni, possiamo determinare il montante  $C_3$  con la relazione fondamentale:

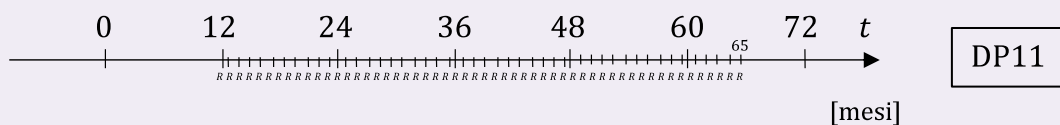
$$C_3 = \frac{C_0}{1 - d \cdot 3} = \frac{3,51}{1 - 0,13 \cdot 3} = 5,75.$$

**Esercizio 8.8**

Si vuole costituire un capitale di 250.000€ versando 54 rate mensili di importo costante su un conto postale, cominciando fra un anno. Qual è l'importo della rata se il tasso di interesse annuo effettivo è  $i(t) = i = 2,3\%$ ?

Soluzione.

Possiamo interpretare la rendita come differita di 11 mesi, posticipata:



(alternativamente, potremmo anche considerarla come differita di 12 mesi, anticipata).

L'ultimo versamento avviene in  $t = 65$ .

Anzitutto, ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione, imponendo l'uguaglianza tra i fattori di montante della legge finanziaria annuale composta e della legge finanziaria mensile composta. In particolare,

$$(1 + i) = (1 + i^{(12)})^{12}$$

da cui

$$i^{(12)} = (1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1$$

ovvero

$$i^{(12)} = (1 + 0,023)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0019 = 0,19\%.$$

A questo punto, volendo ottenere un valore della rendita all'epoca  $t = 65$  pari a 250.000€ e sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta, possiamo determinare la rata costante della rendita partendo dalla seguente formula:

$$\begin{aligned} V_{65} &= V_{11} \cdot (1 + i^{(12)})^{54} \\ &= F \cdot \frac{1 - (1 + i^{(12)})^{-54}}{i^{(12)}} \cdot (1 + i^{(12)})^{54} \\ &= F \cdot \frac{(1 + i^{(12)})^{54} - 1}{i^{(12)}} \end{aligned}$$

da cui

$$F = \frac{V_{65} \cdot i^{(12)}}{(1 + i^{(12)})^{54} - 1}$$

ovvero

$$F = \frac{250.000 \cdot 0,0019}{(1 + 0,0019)^{54} - 1} = 4.400,58€.$$

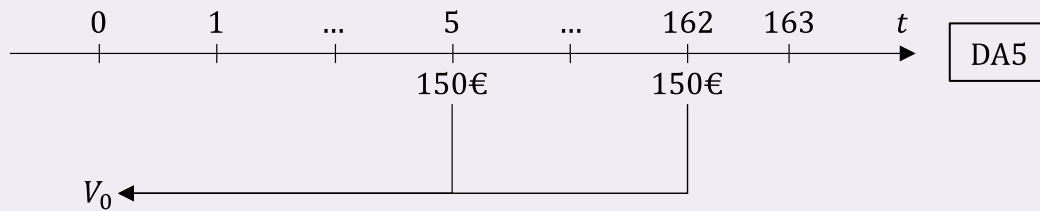
### Prova MGF del 16/02/2022 – Esercizio 7

*Il valore attuale di una rendita di 158 termini, differita di 5 periodi, anticipata, di importo 150€ è ottenuto da*

- A.  $150 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{i(1+i)^5}$
- B.  $150 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{(1+i)^4}$
- C.  $150 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{i(1+i)^4}$
- D.  $150 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{(1+i)^5}$

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



(si noti che potremmo anche considerare questa rendita come differita di 4 periodi, posticipata). Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione, sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta. Infatti, trattandosi di una rendita differita anticipata a rata costante, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$  utilizzando la seguente formula (ricordandoci di capitalizzare di 1 periodo visto che le rate vengono versate in anticipo):

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{V_5}{(1+i)^5} \\ &= R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{i} \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{(1+i)^5} \end{aligned}$$

ovvero

$$V_0 = 150 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-158}}{i(1+i)^4}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	C

### Prova MGF/MMF del 30/06/2022 – Esercizio 7

Il valore all'epoca  $t = 30$  di una rendita immediata posticipata di 45 termini con rata  $R = 15$  e tasso di valutazione composto  $i = 1,5\%$  è

A. 954,21

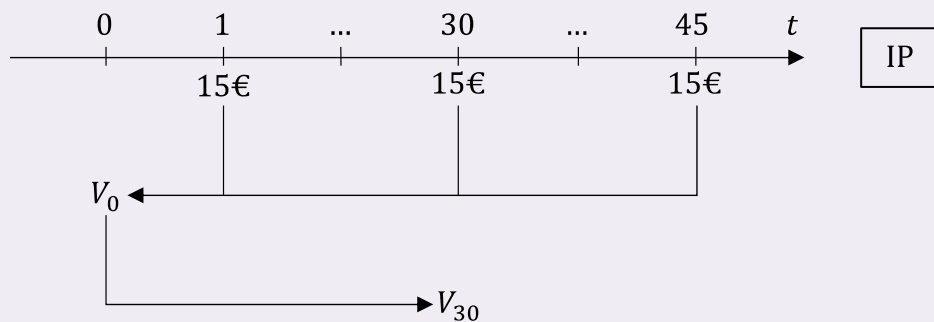
B. 488,29

C. 200,15

D. 763,23

Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione e, successivamente, di capitalizzazione, sfruttando la scindibilità di una legge finanziaria composta. Infatti, trattandosi di una rendita immediata posticipata a rata costante, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$  utilizzando la seguente formula:

$$V_0 = F \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-45}}{i}$$

ovvero

$$V_0 = 15 \cdot \frac{1 - (1 + 0,015)^{-45}}{0,015} = 488,29.$$

A questo punto, per calcolare il valore della rendita all'epoca  $t = 30$  è sufficiente capitalizzare il valore attuale della rendita  $V_0$  di 30 periodi. In particolare,

$$V_{30} = V_0(1 + i)^{30}$$

ovvero

$$V_{30} = 488,29 \cdot (1 + 0,015)^{30} = 763,23.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	D

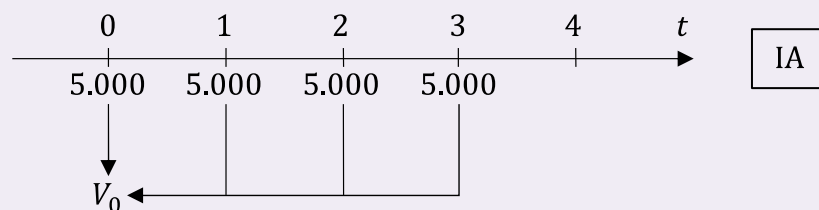
### Prova MGF/MMF del 09/09/2022 – Esercizio 4

Si consideri una rendita immediata anticipata costituita da 4 rate di importo costante e pari a  $R = 5.000\text{€}$ . Se il suo valore attuale è  $19.400\text{€}$  e il regime è quello dell'interesse anticipato/sconto commerciale, allora il tasso di sconto commerciale implicito è

- A.  $d = 1,9\%$
- B.  $d = 2,0\%$
- C.  $d = 2,1\%$
- D.  $d = 2,2\%$

### Soluzione.

Rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione, tenendo presente che una legge finanziaria anticipata non è scindibile. Pertanto, il valore della rendita  $V_0$  vale

$$\begin{aligned}
 V_0 &= R \cdot \sum_{t=0}^3 (1 - d \cdot t) \\
 &= R + R \cdot (1 - d) + R \cdot (1 - d \cdot 2) + R \cdot (1 - d \cdot 3) \\
 &= R \cdot (1 + 1 - d + 1 - 2d + 1 - 3d)
 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{V_0}{R} = 1 + 1 - d + 1 - 2d + 1 - 3d$$

e

$$6d = 4 - \frac{V_0}{R}; \quad d = \frac{1}{6} \cdot \left(4 - \frac{V_0}{R}\right).$$

Sostituendo con i dati forniti, si ottiene

$$d = \frac{1}{6} \cdot \left(4 - \frac{19.400}{5.000}\right) = 0,02 = 2,0\%.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	B	...	...	...

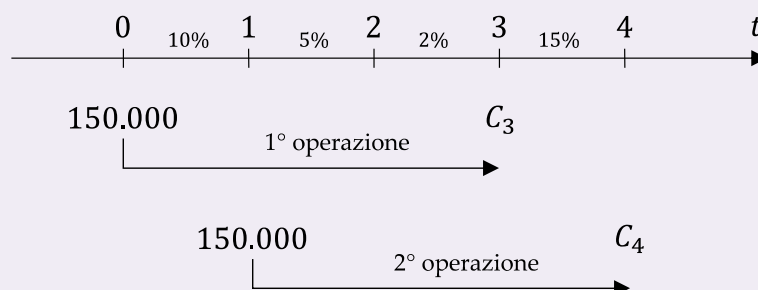
## 9. Leggi finanziarie a due variabili

### Esercizio 9.1

Si calcoli il montante di 150.000€ investiti per 3 anni in capitalizzazione composta a tasso variabile assumendo che il capitale sia investito subito e i tassi di interesse siano i seguenti:  $i_1 = 10\%$ ,  $i_2 = 5\%$ ,  $i_3 = 2\%$  e  $i_4 = 15\%$ . Quale sarebbe il montante se l'operazione iniziasse tra un anno?

Soluzione.

Rappresentiamo le due operazioni finanziarie alternative con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione sia nel caso in cui il capitale sia investito subito sia nel caso in cui l'operazione inizi tra un anno. Nel primo caso, sapendo che il capitale iniziale è  $C_0 = 150.000\text{€}$  e i tassi di interesse dei primi tre anni sono rispettivamente



del 10%, 5% e 2% (in regime di interesse composto), possiamo determinare il montante  $C_3$  con la seguente relazione fondamentale per leggi finanziarie a due variabili:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0 \cdot f(0, 3) = C_0 \cdot \prod_{t=1}^3 (1 + i_t) \\ &= 150.000 \cdot (1 + 0,1) \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,02) = 176.715,00\text{€}. \end{aligned}$$

Nel secondo caso, sapendo che il capitale iniziale è  $C_1 = 150.000\text{€}$  e i tassi di interesse degli ultimi tre anni sono rispettivamente del 5%, 2% e 15% (in regime di interesse composto), possiamo determinare il montante  $C_4$  con la seguente relazione fondamentale per leggi finanziarie a due variabili:

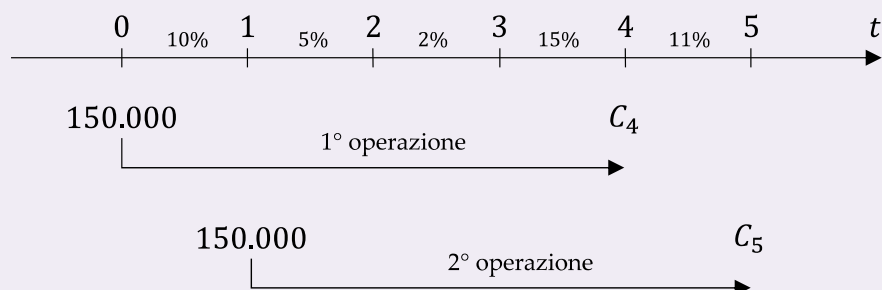
$$\begin{aligned} C_4 &= C_1 \cdot f(1, 4) = C_1 \cdot \prod_{t=2}^4 (1 + i_t) \\ &= 150.000 \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,02) \cdot (1 + 0,15) = 184.747,50\text{€}. \end{aligned}$$

### Esercizio 9.2

Si calcoli il montante di 150.000€ investiti per 4 anni con legge finanziaria semplice a tasso variabile assumendo che il capitale sia investito subito e i tassi di interesse siano i seguenti:  $i_1 = 10\%$ ,  $i_2 = 5\%$ ,  $i_3 = 2\%$ ,  $i_4 = 15\%$ ,  $i_5 = 11\%$ . Quale sarebbe il montante se l'operazione iniziasse tra un anno?

Soluzione.

Rappresentiamo le due operazioni finanziarie alternative con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di capitalizzazione sia nel caso in cui il capitale sia investito subito sia nel caso in cui l'operazione inizi tra un anno. Nel primo caso, sapendo che il

capitale iniziale è  $C_0 = 150.000\text{€}$  e i tassi di interesse dei primi quattro anni sono rispettivamente del 10%, 5%, 2% e 15% (in regime di interesse semplice), possiamo determinare il montante  $C_4$  con la seguente relazione fondamentale per leggi finanziarie a due variabili:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0 \cdot f(0, 4) = C_0 \cdot \left( 1 + \sum_{t=1}^4 i_t \right) \\ &= 150.000 \cdot (1 + 0,1 + 0,05 + 0,02 + 0,15) = 198.000\text{€}. \end{aligned}$$

Nel secondo caso, sapendo che il capitale iniziale è  $C_1 = 150.000\text{€}$  e i tassi di interesse degli ultimi quattro anni sono rispettivamente del 5%, 2%, 15% e 11% (in regime di interesse semplice), possiamo determinare il montante  $C_5$  con la seguente relazione fondamentale per leggi finanziarie a due variabili:

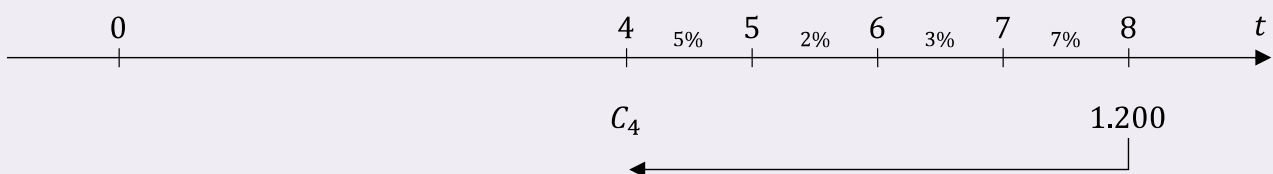
$$\begin{aligned} C_5 &= C_1 \cdot f(1, 5) = C_1 \cdot \left( 1 + \sum_{t=2}^5 i_t \right) \\ &= 150.000 \cdot (1 + 0,05 + 0,02 + 0,15 + 0,11) = 199.500\text{€}. \end{aligned}$$

### Esercizio 9.3

Si calcoli il valore scontato all'epoca  $t = 4$  di  $1.200\text{€}$  scadenti all'epoca  $t = 8$  assumendo una legge finanziaria di sconto commerciale con tassi 5%, 2%, 3%, 7% vigenti rispettivamente nel quinto, sesto, settimo e ottavo periodo.

#### Soluzione.

Rappresentiamo l'operazione finanziaria con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di sconto. Sapendo che il valore nominale è  $C_8 = 1.200\text{€}$  e i tassi di interesse dall'epoca  $t = 8$  all'epoca  $t = 4$  sono rispettivamente del 7%, 3%, 2% e 5%

(in regime di interesse anticipato), possiamo determinare il valore scontato  $C_4$  con la seguente relazione fondamentale per leggi finanziarie a due variabili:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0 \cdot \Phi(8, 4) = C_8 \cdot \left(1 - \sum_{t=5}^8 i_t\right) \\ &= 1.200 \cdot (1 - (0,07 + 0,03 + 0,02 + 0,05)) = 996\text{€}. \end{aligned}$$

#### Esercizio 9.4

Si determinino i fattori di sconto relativi ai seguenti tassi di interesse:  $i_1 = 2\%$ ,  $i_2 = 3\%$ ,  $i_3 = 0,5\%$ ,  $i_4 = 2,5\%$ .

Soluzione.

Il metodo più veloce per determinare i fattori di sconto è il metodo ricorsivo, secondo cui

$$\Phi(t, 0) = \frac{\Phi(t-1, 0)}{1 + i_t}$$

Pertanto,

$$\Phi(0, 0) = 1$$

$$\Phi(1, 0) = \frac{1}{1,02} = 0,980392$$

$$\Phi(2, 0) = \frac{0,980392}{1,03} = 0,951837$$

$$\Phi(3, 0) = \frac{0,951837}{1,005} = 0,947102$$

$$\Phi(4, 0) = \frac{0,947102}{1,025} = 0,924002$$

Alternativamente,

$$\Phi(0, 0) = 1$$

$$\Phi(1, 0) = \frac{1}{1,02} = 0,980392$$

$$\Phi(2, 0) = \frac{1}{1,02 \cdot 1,03} = 0,951837$$

$$\Phi(3,0) = \frac{1}{1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.005} = 0,947102$$

$$\Phi(4,0) = \frac{1}{1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.005 \cdot 1.025} = 0,924002$$

## 10. Piani di ammortamento

### Esercizio 10.1

Il debito residuo di un finanziamento all'epoca  $t = 6$  è 500. Qual è il debito residuo all'epoca  $t = 4$  se la quinta e la sesta rata sono pari a 110 e 130, rispettivamente, e il tasso contrattuale è il 10%?

#### Soluzione.

Utilizziamo la relazione fondamentale per calcolare il debito residuo all'epoca  $t = 5$ . In particolare,

$$\begin{aligned} C_6 &= C_5 + \overset{I_5}{iC_5} - F_6 \\ &= C_5(1 + i) - F_6 \end{aligned}$$

da cui

$$C_5 = \frac{C_6 + F_6}{1 + i}$$

ovvero

$$C_5 = \frac{500 + 130}{1 + 0,1} = 572,73.$$

Ora, procedendo in maniera analoga, utilizziamo la relazione fondamentale per calcolare il debito residuo all'epoca  $t = 4$ . In particolare,

$$\begin{aligned} C_5 &= C_4 + I_5 - F_5 \\ &= C_4 + iC_4 - F_5 \\ &= C_4(1 + i) - F_5 \end{aligned}$$

da cui

$$C_4 = \frac{C_5 + F_5}{1 + i}$$

ovvero

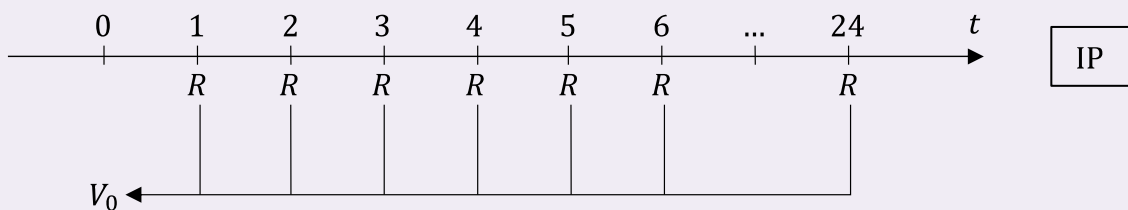
$$C_5 = \frac{572,73 + 110}{1 + 0,1} = 620,66.$$

### Esercizio 10.2

Si calcoli il debito residuo all'epoca  $t = 6$  di un finanziamento rimborsabile con una rendita di 24 rate immediate posticipate costanti con tasso contrattuale  $i = 10\%$ . L'importo della rata è  $R = 4.325$ .

Soluzione.

Anzitutto rappresentiamo la rendita con il seguente schema:



Ragioniamo in una prospettiva di attualizzazione. Infatti, trattandosi di una rendita immediata posticipata a rata costante, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$ , coincidente con l'ammontare finanziato  $C_0$ , utilizzando la seguente formula:

$$V_0 = C_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

ovvero

$$V_0 = C_0 = 4.325 \cdot \frac{1 - (1 + 0,1)^{-24}}{0,1} = 38.859,02.$$

Utilizziamo ora la relazione "retrospettiva" del debito residuo per determinare il debito residuo all'epoca  $t = 6$ :

$$\begin{aligned} C_6 &= C_0(1 + i)^6 - (R(1 + i)^5 + R(1 + i)^4 + R(1 + i)^3 + R(1 + i)^2 + R(1 + i) + R) \\ &= C_0(1 + i)^6 - R \sum_{t=0}^5 (1 + i)^t \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
C_6 &= 38.859,02 \cdot 1,1^6 - 4.325 \cdot (1,1^0 + 1,1^1 + 1,1^2 + 1,1^3 + 1,1^4 + 1,1^5) \\
&= 38.859,02 \cdot 1,1^6 - 4.325 \cdot \frac{1 - 1,1^{-6}}{0,1} \cdot (1,1) \\
&= 35.471,11.
\end{aligned}$$

In maniera equivalente, avremmo potuto utilizzare la relazione “prospettiva” del debito residuo per determinare il debito residuo all’epoca  $t = 6$ :

$$C_6 = R \cdot \sum_{t=7}^{24} \frac{1}{(1+i)^{t-6}}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
C_6 &= 4.325 \cdot \left( \frac{1}{1,1^1} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{1,1^3} + \frac{1}{1,1^4} + \frac{1}{1,1^5} + \frac{1}{1,1^6} + \frac{1}{1,1^7} + \frac{1}{1,1^8} + \frac{1}{1,1^9} + \frac{1}{1,1^{10}} + \frac{1}{1,1^{11}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1,1^{12}} + \frac{1}{1,1^{13}} + \frac{1}{1,1^{14}} + \frac{1}{1,1^{15}} + \frac{1}{1,1^{16}} + \frac{1}{1,1^{17}} + \frac{1}{1,1^{18}} \right) \\
&= 4.325 \cdot \frac{1 - 1,1^{-18}}{0,1} \\
&= 35.471,11.
\end{aligned}$$

### Esercizio 10.3

Si costruisca un piano d’ammortamento per l’operazione finanziaria che paga la somma 100 a fronte di un esborso pari a 70. Le scadenze sono  $t = 0$  e  $t = 3$  rispettivamente.

Soluzione.

Poiché le scadenze dei flussi di cassa non nulli sono  $t = 0$  e  $t = 3$ , allora in  $t = 1$  e  $t = 2$  non viene pagata alcuna somma di denaro. Pertanto, le rate sono  $R_1 = R_2 = 0$ ,  $R_3 = 100$ . La condizione di chiusura finanziaria iniziale impone

$$C_0 = \sum_{t=1}^3 \frac{R_t}{(1+i)^t} = \frac{R_1}{(1+i)^1} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3}$$

ovvero

$$70 = \frac{0}{(1+i)^1} + \frac{0}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3}$$

da cui deduciamo il tasso di interesse implicito in questo finanziamento:

$$i = \sqrt[3]{\frac{100}{70}} - 1 = 0,1262 = 12,62\%.$$

Conoscendo il tasso di interesse, possiamo applicare la relazione fondamentale per determinare tutti i debiti residui:

$$C_0 = 70$$

$$C_1 = C_0 \cdot (1 + i) - R_1 = 70 \cdot (1 + 12,62\%) - 0 = 78,84$$

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + i) - R_2 = 78,84 \cdot (1 + 12,62\%) - 0 = 88,79$$

$$C_3 = C_2 \cdot (1 + i) - R_3 = 88,79 \cdot (1 + 12,62\%) - 100 = 0$$

(l'ultima relazione conferma che il finanziamento è interamente ammortizzato in  $t = 3$ ).

Questo implica che le quote di interesse sono

$$I_1 = iC_0 = 0,1262 \cdot 70 = 8,84$$

$$I_2 = iC_1 = 0,1262 \cdot 78,84 = 9,95$$

$$I_3 = iC_2 = 0,1262 \cdot 88,79 = 11,21.$$

Pertanto, le quote di capitale sono

$$K_1 = R_1 - I_1 = 0 - 8,84 = -8,84$$

$$K_2 = R_2 - I_2 = 0 - 9,95 = -9,95$$

$$K_3 = R_3 - I_3 = 100 - 11,21 = 88,79.$$

Si noti che, in presenza di una rata nulla, la quota di capitale è negativa. Quindi, dal punto di vista finanziario, ci troviamo in una situazione in cui il debitore contrae un debito aggiuntivo, il che giustifica la successione crescente dei debiti residui calcolata poc' anzi.

Contestualmente, risulta verificata anche la condizione di chiusura elementare. Infatti,

$$K_1 + K_2 + K_3 = C_0$$

ovvero

$$-8,84 - 9,95 + 88,79 = 70.$$

I debiti estinti sono allora

$$E_0 = C_0 - C_0 = 70 - 70 = 0$$

$$E_1 = C_0 - C_1 = 70 - 78,84 = -8,84$$

$$E_2 = C_0 - C_2 = 70 - 88,79 = -18,79$$

$$E_3 = C_0 - C_3 = 70 - 0 = 70.$$

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	70	–	–	–70	0
1	78,84	8,84	–8,84	0	–8,84
2	88,79	9,95	–9,95	0	–18,79
3	0	11,21	88,79	100	70

#### Esercizio 10.4

Si consideri un finanziamento da ammortizzare in 3 anni, del quale si hanno le seguenti informazioni:

- Il debito residuo all'epoca  $t = 1$  è 70
- La quota di interesse relativa al secondo periodo è 8,4
- Il debito estinto all'epoca  $t = 2$  è 90
- L'ultima quota di capitale è 30

#### Soluzione.

Partendo dalle informazioni fornite, costruiamo il piano di ammortamento sistemando i dati noti nelle rispettive celle:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0		–	–		
1	70				
2		8,4			90
3			30		

Conoscendo il debito residuo all'epoca  $t = 1$  e la quota di interesse all'epoca  $t = 2$ , determiniamo anzitutto il tasso di interesse  $i$ :

$$I_2 = iC_1$$



da cui

$$i = \frac{I_2}{C_1}$$

ovvero

$$i = \frac{8,4}{70} = 0,12 = 12\%.$$

Inoltre, dalla condizione di chiusura (finanziaria) finale, si ha

$$C_3 = 0.$$

Ora, conoscendo il debito residuo e la quota di capitale all'epoca  $t = 3$  e sapendo che la quota di capitale coincide con la variazione del debito residuo tra inizio e fine periodo, possiamo determinare il debito residuo all'epoca  $t = 2$ :

$$K_3 = C_2 - C_3$$

da cui

$$C_2 = K_3 + C_3$$

ovvero

$$C_2 = 30 + 0 = 30.$$

Possiamo quindi calcolare la quota di interesse all'epoca  $t = 3$ :

$$I_3 = iC_2$$

ovvero

$$I_3 = 0,12 \cdot 30 = 3,6.$$

Conoscendo la quota di interesse e la quota di capitale all'epoca  $t = 3$ , possiamo determinare il flusso di cassa all'epoca  $t = 3$ . In particolare,

$$F_3 = I_3 + K_3$$

ovvero

$$F_3 = 3,6 + 30 = 33,6.$$

Possiamo allora allocare questi dati nelle rispettive celle del piano di ammortamento:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0		–	–		
1	70				
2	30	8,4			90
3	0	3,6	30	33,6	

Ora, conoscendo il debito estinto e il debito residuo all'epoca  $t = 2$ , possiamo determinare l'ammontare finanziato:

$$C_0 = E_2 + C_2$$

ovvero

$$C_0 = 90 + 30 = 120.$$

Inoltre,  $F_0 = C_0 = -120$  e  $E_0 = C_0 = 120$ . Possiamo ora calcolare la quota di interesse all'epoca  $t = 1$ :

$$I_1 = iC_0$$

ovvero

$$I_1 = 0,12 \cdot 120 = 14,4.$$

Sapendo che la quota di capitale coincide con la variazione del debito residuo tra inizio e fine periodo, possiamo determinare la quota di capitale all'epoca  $t = 1$ :

$$K_1 = C_0 - C_1$$

ovvero

$$K_1 = 120 - 70 = 50.$$

Conoscendo la quota di interesse e la quota di capitale all'epoca  $t = 1$ , possiamo determinare la somma versata all'epoca  $t = 1$ . In particolare,

$$F_1 = I_1 + K_1$$

ovvero

$$F_1 = 14,4 + 50 = 64,4.$$

Inoltre,

$$E_1 = K_1 = C_0 - C_1 = 50.$$

In maniera analoga, sapendo che la quota di capitale coincide con la variazione del debito residuo tra inizio e fine periodo, possiamo determinare la quota di capitale all'epoca  $t = 2$ :

$$K_2 = C_1 - C_2$$

ovvero

$$K_2 = 70 - 30 = 40.$$

Il piano di ammortamento si arricchisce dunque ulteriormente come segue:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	120	–	–	–120	120
1	70	14,4	50	64,4	50
2	30	8,4	40		90
3	0	3,6	30	33,6	

Conoscendo la quota di interesse e la quota di capitale all'epoca  $t = 2$ , possiamo determinare la somma versata all'epoca  $t = 2$ . In particolare,

$$F_2 = I_2 + K_2$$

ovvero

$$F_2 = 8,4 + 40 = 48,4.$$

Infine,

$$E_3 = K_1 + K_2 + K_3 = C_0 - C_3 = 50 + 40 + 30 = 120.$$

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	120	–	–	–120	120
1	70	14,4	50	64,4	50
2	30	8,4	40	48,4	90
3	0	3,6	30	33,6	120

Contestualmente, risulta verificata anche la condizione di chiusura elementare. Infatti,

$$K_1 + K_2 + K_3 = C_0$$

ovvero

$$50 + 40 + 30 = 120.$$

Inoltre, risulta verificata anche la condizione di chiusura (finanziaria) iniziale. Infatti,

$$C_0 = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3}$$

ovvero

$$C_0 = \frac{64,4}{1+0,12} + \frac{48,4}{(1+0,12)^2} + \frac{33,6}{(1+0,12)^3} = 120.$$

### Esercizio 10.5

Si consideri un prestito di durata  $n = 3$ , con quote di capitale  $K_1 = 100$ ,  $K_2 = 50$ ,  $K_3 = 25$  e tasso di interesse costante  $i = 6,5\%$ . Costruire il piano di ammortamento.

#### Soluzione.

Partendo dalle informazioni fornite, costruiamo il piano di ammortamento ad impostazione elementare (di cui conosciamo il tasso contrattuale e le quote di capitale) per colonne.

Conoscendo le quote di capitale (e quindi avendo a disposizione la terza colonna del piano di ammortamento), possiamo calcolare i debiti residui come somma delle quote di capitale da versare in futuro e i debiti estinti come somma delle quote di capitale già versate:

$$C_0 = K_1 + K_2 + K_3 = 100 + 50 + 25 = 175$$

$$C_1 = K_2 + K_3 = 50 + 25 = 75$$

$$C_2 = K_3 = 25$$

$$C_3 = 0$$

e

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = K_1 = 100$$

$$E_2 = K_1 + K_2 = 100 + 50 = 150$$

$$E_3 = K_1 + K_2 + K_3 = 100 + 50 + 25 = 175.$$

Abbiamo così determinato la prima colonna e l'ultima colonna del piano di ammortamento:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	175	–	–		0
1	75		100		100
2	25		50		150
3	0		25		175

Dai debiti residui, determiniamo le quote di interesse:

$$I_1 = iC_0 = 0,065 \cdot 175 = 11,38$$

$$I_2 = iC_1 = 0,065 \cdot 75 = 4,88$$

$$I_3 = iC_2 = 0,065 \cdot 25 = 1,63.$$

La seconda colonna è dunque determinata:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	175	–	–		0
1	75	11,38	100		100
2	25	4,88	50		150
3	0	1,63	25		175

Infine, determiniamo la colonna dei flussi di cassa. A tal fine, possiamo utilizzare

$$F_t = K_t + I_t$$

o, che è lo stesso,

$$F_t = C_{t-1} + I_t - C_t$$

Seguendo la prima,

$$F_0 = -175$$

$$F_1 = 100 + 11,38 = 111,38$$

$$F_2 = 50 + 4,88 = 54,88$$

$$F_3 = 25 + 1,63 = 26,63.$$

Contestualmente risulta verificata anche la condizione di chiusura (finanziaria) iniziale.

Infatti,

$$C_0 = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3}$$

ovvero

$$C_0 = \frac{111,38}{1+0,065} + \frac{54,88}{(1+0,065)^2} + \frac{26,63}{(1+0,065)^3} = 175.$$

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	175	–	–	–175	0
1	75	11,38	100	111,38	100
2	25	4,88	50	54,88	150
3	0	1,63	25	26,63	175

### Esercizio 10.6

Si consideri il piano di rimborso di un finanziamento, costituito da una rendita di 20 rate immediate posticipate costanti. Si determini il debito residuo all'epoca  $t = 8$  nel caso in cui l'ammontare finanziato sia pari a 100 milioni e il tasso di interesse (composto) sia pari al 10%.

Soluzione.

Si determina innanzi tutto l'importo della rata sfruttando la condizione (finanziaria) iniziale:

$$C_0 = \sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{-t}$$

ovvero, tenendo conto che  $R_t = R$  per ogni  $t = 1, 2, \dots, 20$ ,

$$\begin{aligned} 100.000.000 &= \sum_{t=1}^{20} R (1+0,1)^{-t} \\ &= R \sum_{t=1}^{20} (1+0,1)^{-t} = R \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-20}}{0,1} \end{aligned}$$

da cui

$$R = \frac{100.000.000 \cdot 0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-20}} = 11.745.962,48.$$

Utilizziamo allora la relazione prospettiva del debito residuo:

$$C_t = \sum_{j=t+1}^n R_j (1+i)^{t-j}.$$

Nel nostro caso,

$$\begin{aligned} C_8 &= \sum_{j=9}^{20} R_j (1+i)^{8-j} \\ &= \sum_{j=9}^{20} 11.745.962,48 \cdot (1+i)^{8-j} \\ &= 11.745.962,48 \cdot \sum_{j=9}^{20} (1+i)^{8-j} \\ &= 11.745.962,48 \cdot \sum_{j=9}^{20} (1+i)^{8-j} \\ &= 11.745.962,48 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-12}}{0,1} \approx 80.033.368,5. \end{aligned}$$

### Esercizio 10.7

Si considerino i seguenti flussi di cassa annui intercorsi tra un'azienda e una banca:

$$\mathbf{F} = (-100, 26, 36, 35, 13).$$

Le posizioni debitorie dell'azienda siano rappresentate nel seguente vettore:

$$\mathbf{C} = (100, 80, 45, 12, 0).$$

Si ricavino i tassi di interesse praticati dalla banca nei vari anni. Si verifichi che la condizione di chiusura iniziale è rispettata.

Soluzione.

Si ha, dalla relazione fondamentale,

$$80 = 100(1 + i_1) - 26 \Rightarrow i_1 = \frac{(80 + 26) - 100}{100} = 0,06 = 6,00\%$$

$$45 = 80(1 + i_2) - 36 \Rightarrow i_2 = \frac{(45 + 36) - 80}{80} = 0,0125 = 1,25\%$$

$$12 = 45(1 + i_3) - 35 \Rightarrow i_3 = \frac{(12 + 35) - 45}{45} = 0,0444 = 4,44\%$$

$$0 = 12(1 + i_4) - 13 \Rightarrow i_4 = \frac{(0 + 13) - 12}{12} = 0,0833 = 8,33\%$$

La condizione di chiusura finanziaria impone

$$C_0 = 26 \cdot \Phi(1,0) + 36 \cdot \Phi(2,0) + 35 \cdot \Phi(3,0) + 13 \cdot \Phi(4,0)$$

ovvero

$$\begin{aligned} C_0 &= 26 \cdot \frac{1}{1,06} + 36 \cdot \frac{1}{1,06 \cdot 1,0125} + 35 \cdot \frac{1}{1,06 \cdot 1,0125 \cdot 1,0444} + 13 \\ &\quad \cdot \frac{1}{1,06 \cdot 1,0125 \cdot 1,0444 \cdot 1,0833} \\ &= 100 \end{aligned}$$

Alternativamente, si determinano prima i fattori di sconto ricorsivamente:

$$\Phi(1,0) = \frac{1}{1,06} = 0,943306$$

$$\Phi(2,0) = \frac{0,943306}{1,0125} = 0,931749$$

$$\Phi(3,0) = \frac{0,931749}{1,0444} = 0,892100$$

$$\Phi(4,0) = \frac{0,892100}{1,0833} = 0,823477$$

e quindi

$$C_0 = 26 \cdot 0,943306 + 36 \cdot 0,931749 + 35 \cdot 0,892100 + 13 \cdot 0,823477 = 100.$$

### Prova MGF/MMF del 27/01/2022 – Esercizio 5

Un finanziamento di 100.000€ è rimborsato con quattro rate. Se l'ammortamento del prestito è di tipo italiano e il tasso di interesse è  $i = 3\%$ , allora

A.  $I_3 = 1.500$ ,  $F_4 = 25.750$ ,  $E_3 = 72.500$

B.  $I_2 = 2.250$ ,  $F_3 = 26.500$ ,  $K_3 = 20.000$

C.  $I_1 = 3.000$ ,  $F_2 = 27.000$ ,  $C_4 = 0$

D.  $I_4 = 750$ ,  $F_1 = 28.000$ ,  $E_0 = 0$



Soluzione.

Conoscendo l'ammontare finanziato e sapendo che l'ammortamento è di tipo italiano (caso particolare dell'ammortamento ad impostazione elementare, in cui le quote di capitale sono costanti), determiniamo anzitutto le quote di capitale:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K = \frac{C_0}{4}$$

ovvero

$$K = \frac{100.000}{4} = 25.000.$$

Contestualmente risulta verificata la condizione di chiusura elementare. Infatti,

$$C_0 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 4K = 100.000.$$

Possiamo così determinare il debito estinto per ogni epoca. In particolare,

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = K_1 = K = 25.000,$$

$$E_2 = K_1 + K_2 = 2K = 50.000$$

$$E_3 = K_1 + K_2 + K_3 = 3K = 75.000$$

$$E_4 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 4K = 100.000.$$

Possiamo anche determinare il debito residuo per ogni epoca. In particolare,

$$C_1 = C_0 - E_1 = 100.000 - 25.000 = 75.000$$

$$C_2 = C_0 - E_2 = 100.000 - 50.000 = 50.000$$

$$C_3 = C_0 - E_3 = 100.000 - 75.000 = 25.000$$

$$C_4 = C_0 - E_4 = 100.000 - 100.000 = 0$$

oppure, equivalentemente,

$$C_1 = K_2 + K_3 + K_4 = 3K = 75.000$$

$$C_2 = K_3 + K_4 = 2K = 50.000$$

$$C_3 = K_4 = 25.000$$

$$C_4 = 0$$

(contestualmente, risulta verificata anche la condizione di chiusura finanziaria finale).

La prima, terza e quinta colonna sono quindi completate:

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	100.000	–	–		0
1	75.000		25.000		25.000
2	50.000		25.000		50.000
3	25.000		25.000		75.000
4	0		25.000		100.000

Sapendo che il tasso di interesse è il 3%, possiamo determinare le quote di interesse per ogni epoca. In particolare,

$$I_1 = iC_0 = 0,03 \cdot 100.000 = 3.000$$

$$I_2 = iC_1 = 0,03 \cdot 75.000 = 2.250$$

$$I_3 = iC_2 = 0,03 \cdot 50.000 = 1.500$$

$$I_4 = iC_3 = 0,03 \cdot 25.000 = 750.$$

Infine, conoscendo la quota di interesse e la quota di capitale per ogni epoca, possiamo determinare la somma versata per ogni epoca. In particolare,

$$F_1 = I_1 + K_1 = 3.000 + 25.000 = 28.000$$

$$F_2 = I_2 + K_2 = 2.250 + 25.000 = 27.250$$

$$F_3 = I_3 + K_3 = 1.500 + 25.000 = 26.500$$

$$F_4 = I_4 + K_4 = 750 + 25.000 = 25.750.$$

Contestualmente risulta verificata anche la condizione di chiusura (finanziaria) iniziale.

Infatti,

$$C_0 = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4}$$

ovvero

$$C_0 = \frac{28.000}{1+0,03} + \frac{27.250}{(1+0,03)^2} + \frac{26.500}{(1+0,03)^3} + \frac{25.750}{(1+0,03)^4} = 100.000.$$

$t$	$C_t$	$I_t$	$K_t$	$F_t$	$E_t$
0	100.000	–	–	–100.000	0
1	75.000	3.000	25.000	28.000	25.000
2	50.000	2.250	25.000	27.250	50.000
3	25.000	1.500	25.000	26.500	75.000
4	0	750	25.000	25.750	100.000

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	D	...	...

### Prova MGF/MMF del 14/07/2022 – Esercizio 1

Si consideri un prestito di 100.000€. Se il tasso di interesse è il 6% e le prime tre rate sono  $R_1 = 30.000$ ,  $R_2 = 20.000$  e  $R_3 = 25.000$ , allora il debito residuo all'epoca  $t = 3$  è

- A. 119.102
- B. 79.908
- C. 39.194
- D. nessuna delle precedenti

### Soluzione.

Utilizziamo la relazione fondamentale per calcolare il debito residuo all'epoca  $t = 1$ . In particolare,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_0 + I_1 - R_1 \\
 &= C_0 + iC_0 - R_1 \\
 &= C_0(1 + i) - R_1
 \end{aligned}$$

ovvero

$$C_1 = 100.000 \cdot (1 + 0,06) - 30.000 = 76.000.$$

Ora, precedendo in maniera analoga, utilizziamo la relazione fondamentale per calcolare il debito residuo all'epoca  $t = 2$ . In particolare,

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + I_1 - R_2 \\ &= C_1 + iC_1 - R_2 \\ &= C_1(1 + i) - R_2 \end{aligned}$$

ovvero

$$C_2 = 76.000 \cdot (1 + 0,06) - 20.000 = 60.560.$$

Infine, precedendo ancora in maniera analoga, utilizziamo la relazione fondamentale per calcolare il debito residuo all'epoca  $t = 3$ . In particolare,

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + I_2 - R_3 \\ &= C_2 + iC_2 - R_3 \\ &= C_2(1 + i) - R_3 \end{aligned}$$

ovvero

$$C_3 = 60.560 \cdot (1 + 0,06) - 25.000 = 39.193,6.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
C	...	...	...	...	...	...

### Prova MGF/MMF del 14/07/2022 – Esercizio 7

Una società richiede un prestito di ammontare 100.000€, rimborsato in due anni con ammortamento francese. Se l'importo della rata è  $F = 60.000$ , il tasso contrattuale  $i$  è

- A.  $12,9\% < i < 13,2\%$
- B.  $13,2\% < i < 13,5\%$
- C.  $13,5\% < i < 13,8\%$
- D. nessuna delle precedenti

Soluzione.

Utilizziamo la condizione di chiusura (finanziaria) iniziale per determinare il tasso contrattuale  $i$ :

$$C_0 = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} = \frac{F}{1+i} + \frac{F}{(1+i)^2}$$

da cui

$$C_0(1+i)^2 = F(1+i) + F$$

ovvero

$$100.000 \cdot (1+i)^2 = 60.000 \cdot (1+i) + 60.000$$

Risolviamo ora l'equazione di secondo grado rispetto all'incognita  $i$ . In particolare,

$$100.000 + 200.000i + 100.000i^2 = 60.000 + 60.000i + 60.000$$

$$100.000i^2 + 140.000i - 20.000 = 0$$

$$5i^2 + 7i - 1 = 0$$

da cui

$$i_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{10}$$

ovvero

$$i_1 = 0,1307 \quad \text{e} \quad i_2 = -1,5307.$$

La soluzione  $i_2$  non è finanziariamente accettabile (essendo minore di  $-1$ ). Pertanto, il tasso contrattuale è  $i = 13,07\%$ . Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la A. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	A

**Prova MGF/MMF del 09/09/2022 – Esercizio 1**

Carola ha contratto un debito 5 anni fa che rimborserà interamente fra 8 anni. Il debito residuo corrente è pari a 60 mila euro, il tasso di interesse del prestito è il 2,5%, l'ammortamento è di tipo francese. Si determini l'ultima rata del debito di Carola.

- A. nessuna delle seguenti
- B.  $7.498,5 < R < 7.501,3$
- C.  $5.390,3 < R < 5.392,4$
- D.  $8.367,6 < R < 8.369,1$

Soluzione.

Sapendo che l'ammortamento è di tipo francese (caso particolare dell'ammortamento ad impostazione finanziaria, in cui gli importi delle rate sono costanti), è sufficiente notare che il debito residuo all'epoca  $t = 5$  è pari al valore di una rendita immediata (rispetto all'epoca  $t = 5$ ) posticipata, costituita da 8 termini di importo  $R$  e con tasso di interesse del 2,5%. Pertanto, possiamo determinare il valore della rendita  $V_5$ , coincidente con il debito residuo all'epoca  $t = 5$ , utilizzando la seguente formula:

$$V_5 = C_5 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-8}}{i}$$

ovvero

$$60.000 = R \cdot \frac{1 - (1 + 0,025)^{-8}}{0,025}$$

da cui

$$R = \frac{60.000 \cdot 0,025}{1 - (1 + 0,025)^{-8}} = 8.368,04.$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
D	...	...	...	...	...	...

## 11. Valore Attuale Netto (VAN)

### Esercizio 11.1

Una banca concede un prestito triennale di 100€ (valori in migliaia) a un'azienda. Il rimborso avviene gradualmente con due quote di capitale pari a 90€ e 10€ alle epoche  $t = 2$  e  $t = 3$  rispettivamente. Sapendo che il tasso di interesse del prestito è  $i = 15\%$ , si utilizzi il criterio del VAN per stabilire la convenienza dell'investimento per la banca assumendo un tasso di mercato (costo opportunità del capitale) pari al 7%.

#### Soluzione.

Le quote di rimborso del capitale sono  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 90$ ,  $K_3 = 10$ . Per la condizione di chiusura elementare, l'ammontare finanziato è

$$C_0 = K_1 + K_2 + K_3 = 0 + 90 + 10 = 100$$

Pertanto, calcoliamo i debiti residui mediante la relazione fondamentale:

$$C_0 = 100$$

$$C_1 = C_0 - K_1 = 100 - 0 = 100$$

$$C_2 = C_1 - K_2 = 100 - 90 = 10$$

$$C_3 = C_2 - K_3 = 10 - 10 = 0$$

Questo consente di calcolare le quote di interesse,

$$I_1 = iC_0 = 15\% \cdot 100 = 15$$

$$I_2 = iC_1 = 15\% \cdot 100 = 15$$

$$I_3 = iC_2 = 15\% \cdot 10 = 1,5$$

e quindi i flussi di cassa per la banca:

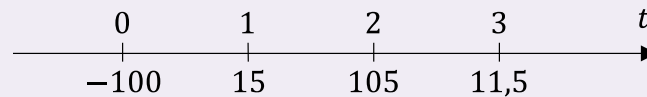
$$F_0 = -C_0 = -100$$

$$F_1 = K_1 + I_1 = 0 + 15 = 15$$

$$F_2 = K_2 + I_2 = 90 + 15 = 105$$

$$F_3 = K_3 + I_3 = 10 + 1,5 = 11,5.$$

Rappresentiamo i flussi di cassa dell'operazione (dal punto di vista del creditore) con il seguente schema:



Sapendo che il tasso di interesse vigente sul mercato è pari al 7%, calcoliamo il VAN per stabilire la convenienza dell'investimento per il creditore:

$$\begin{aligned} VAN(7\%) &= F_0 + \sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{(1 + 0,07)^t} \\ &= F_0 + \frac{F_1}{1,07} + \frac{F_2}{(1,07)^2} + \frac{F_3}{(1,07)^3} \end{aligned}$$

ovvero

$$VAN(7\%) = -100 + \frac{15}{1,07} + \frac{105}{(1,07)^2} + \frac{11,5}{(1,07)^3} = 15,12 > 0 \rightarrow \text{conveniente.}$$

Il prestito erogato dalla banca all'azienda è un investimento conveniente per la banca. Il suo extraprofitto, in termini attuali, è 15,12€.

### Esercizio 11.2

Si consideri un'operazione composta da un investimento sorretto da un finanziamento esterno. L'investimento prevede un esborso iniziale di 90€ con successivi flussi equidistanti ciascuno pari al 20% del precedente. Il flusso all'epoca 1 è pari a 100€. L'ultimo flusso scade all'epoca 3. I costi opportunità del capitale sono pari a 2%, 16%, 15% nel primo, secondo e terzo periodo rispettivamente. Il finanziamento copre l'investimento per un terzo ad un tasso del 10% (composto). Il rimborso, in unica soluzione, è previsto dopo due anni. Si determini il VAN.

#### Soluzione.

I flussi di cassa dell'investimento sono

$$F_1^I = 100$$

$$F_2^I = 0,2 \cdot F_1^I = 0,2 \cdot 100 = 20$$

$$F_3^I = 0,2 \cdot F_2^I = 0,2 \cdot 20 = 4$$

Il finanziamento ammonta a

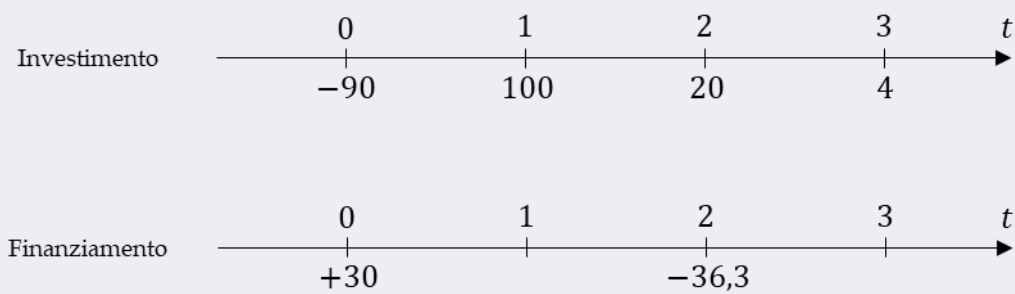


$$C_0^F = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$$

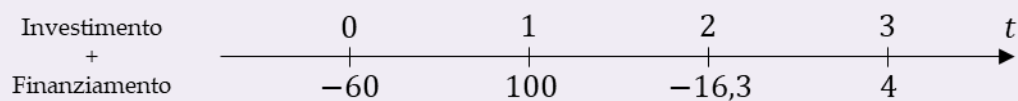
e quindi il montante dopo due periodi sarà

$$C_2^F = 30 \cdot (1 + 0,1)^2 = 36,3.$$

Rappresentiamo i flussi di cassa delle due operazioni con il seguente schema:



Complessivamente, l'operazione (investimento + finanziamento) genera i seguenti flussi di cassa netti:  $F_0 = -60$ ,  $F_1 = 100$ ,  $F_2 = -16,3$ ,  $F_4 = 4$ . Rappresentiamo i flussi di cassa netti nel seguente schema:



Conoscendo la sequenza dei tassi di mercato, calcoliamo il VAN dell'operazione:

$$\begin{aligned} VAN(2\%, 16\%, 15\%) &= F_0 + \sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{\prod_{k=1}^3 (1 + r_k)} \\ &= F_0 + \frac{F_1}{1 + r_1} + \frac{F_2}{(1 + r_1)(1 + r_2)} + \frac{F_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} VAN(2\%, 16\%, 15\%) &= -60 + \frac{100}{1,02} - \frac{16,3}{(1,02)(1,16)} + \frac{4}{(1,02)(1,16)(1,15)} \\ &= 27,20 > 0 \rightarrow \text{conveniente.} \end{aligned}$$

L'investimento è accettabile e crea valore per 27,20€.

Come già sappiamo, avremmo anche potuto calcolare i fattori di sconto ricorsivamente:

$$\Phi(0,0) = 1$$

$$\Phi(1,0) = \frac{1}{1,02} = 0,98039$$

$$\Phi(2,0) = \frac{0,98039}{1,16} = 0,84517$$

$$\Phi(3,0) = \frac{0,84517}{1,15} = 0,73493$$

da cui

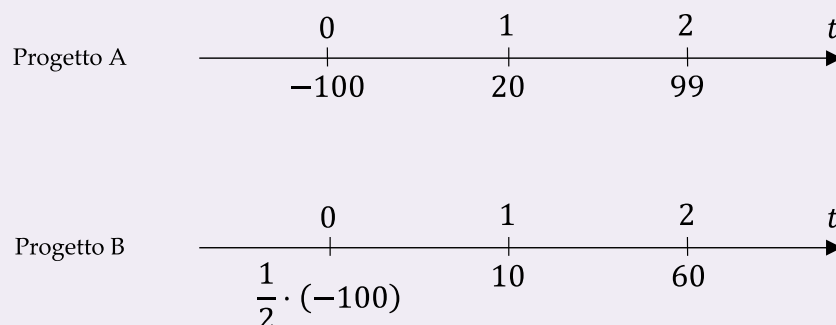
$$\begin{aligned} VAN(2\%, 16\%, 15\%) &= -60 + 100 \cdot 0,98039 - 16,3 \cdot 0,84517 + 4 \cdot 0,73493 \\ &= 27,20 > 0 \rightarrow \text{conveniente.} \end{aligned}$$

### Esercizio 11.3

Si considerino i progetti A e B. Il primo prevede flussi di cassa pari a  $-100, 20, 99$  alle scadenze  $0, 1, 2$  rispettivamente. Il progetto B prevede un esborso iniziale pari alla metà di quello del progetto A e due flussi di cassa dopo uno e due anni pari a  $10$  e  $60$  rispettivamente. Si calcolino i VAN di ciascun progetto sapendo che il costo del capitale per entrambi è il  $15\%$  il primo anno e cresce del  $10\%$  nell'anno successivo. Si calcoli il VAN del portafoglio composto dai due progetti.

#### Soluzione.

Rappresentiamo i flussi di cassa dei due progetti con il seguente schema:



Sapendo che il costo del capitale nel primo periodo è  $r_1 = 15\%$ , nel secondo periodo sarà  $r_2 = 0,15 \cdot (1 + 0,1) = 16,5\%$ . Calcoliamo il VAN dei due progetti:

$$\begin{aligned} VAN^A(15\%, 16,5\%) &= F_0^A + \sum_{t=1}^2 \frac{F_t^A}{\prod_{k=1}^t (1+r_k)} \\ &= F_0^A + \frac{F_1^A}{1+r_1} + \frac{F_2^A}{(1+r_1)(1+r_2)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} VAN^A(15\%, 16,5\%) &= -100 + \frac{20}{1,15} + \frac{99}{(1,15)(1,165)} \\ &= -8,71 \rightarrow \text{non conveniente} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} VAN^B(15\%, 16,5\%) &= F_0^B + \sum_{t=1}^2 \frac{F_t^B}{\prod_{k=1}^t (1+r_k)} \\ &= F_0^B + \frac{F_1^B}{1+r_1} + \frac{F_2^B}{(1+r_1)(1+r_2)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} VAN^B(15\%, 16,5\%) &= -50 + \frac{10}{1,15} + \frac{60}{(1,15)(1,165)} \\ &= 3,48 \rightarrow \text{conveniente.} \end{aligned}$$

I flussi di cassa complessivi del portafoglio  $A + B$  costituito dai due progetti sono

$$F^{A+B} = (-50, 10, 39).$$

Il VAN di  $A + B$  è

$$VAN^{A+B}(15\%, 16,5\%) = -50 + \frac{10}{1,15} + \frac{39}{(1,15)(1,165)} = -5,23$$

Investire in entrambi i progetti distrugge dunque valore per 5,23€.

Poiché il VAN è una misura additiva, avremmo anche potuto calcolare il VAN del portafoglio  $A + B$  come somma dei VAN dei due progetti:

$$\begin{aligned} VAN^{A+B}(15\%, 16,5\%) &= VAN^A(15\%, 16,5\%) + VAN^B(15\%, 16,5\%) \\ &= -8,71 + 3,48 = -5,23 \rightarrow \text{non conveniente.} \end{aligned}$$

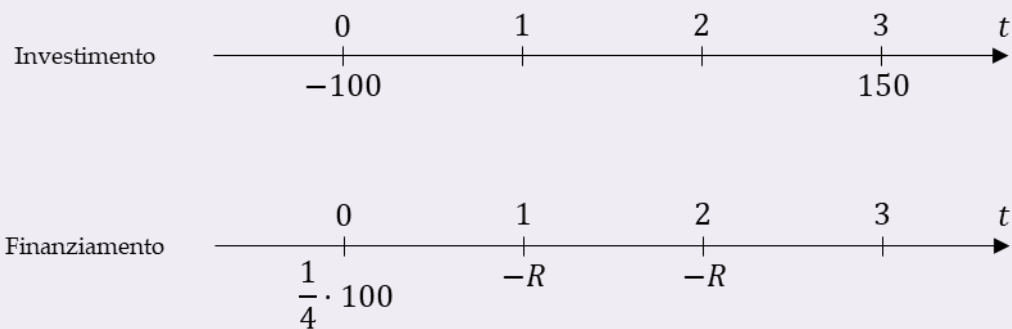
**Esercizio 11.4**

Si consideri un investimento di 100€ a fronte del quale si ricavano 150€ dopo 3 anni. L'operazione è finanziata per un quarto da un creditore che richiede il rimborso con due rate annue in ammortamento francese al 10% annuo. Il costo del capitale previsto per il primo anno è il 10%, è invece del 12% dal secondo periodo in poi.

- Qual è il VAN dell'investimento complessivo?
- Supponendo che il costo del capitale rimanga costante al 10%, quale dovrebbe essere, ceteris paribus, il valore dell'esborso iniziale per ottenere lo stesso VAN?

Soluzione.

Rappresentiamo i flussi di cassa delle due operazioni con il seguente schema:



Sapendo che l'ammortamento è di tipo francese (caso particolare dell'ammortamento ad impostazione finanziaria, in cui gli importi delle rate sono costanti), è sufficiente notare che il debito residuo all'epoca  $t = 0$  è pari al valore di una rendita immediata posticipata, costituita da 2 termini di importo  $R$  e con tasso di interesse del 10%. Pertanto, possiamo determinare il valore della rendita  $V_0$ , coincidente con il debito residuo all'epoca  $t = 0$ , utilizzando la seguente formula:

$$V_0 = C_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-2}}{i}$$

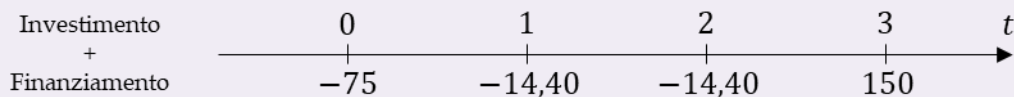
ovvero

$$\frac{1}{4} \cdot 100 = R \cdot \frac{1 - (1 + 0,10)^{-2}}{0,10}$$

da cui

$$R = \frac{25 \cdot 0,10}{1 - (1 + 0,10)^{-2}} = 14,40.$$

Complessivamente l'operazione (investimento + finanziamento) genera i seguenti flussi di cassa netti:  $F = (-75, -14,4, -14,4, 150)$ . Rappresentiamo i flussi di cassa netti nel seguente schema



Conoscendo la sequenza dei tassi di mercato, calcoliamo il VAN dell'operazione:

$$\begin{aligned} VAN(10\%, 12\%, 12\%) &= F_0 + \sum_{t=1}^3 \frac{F_t}{\prod_{k=1}^t (1 + r_k)} \\ &= F_0 + \frac{F_1}{1 + r_1} + \frac{F_2}{(1 + r_1)(1 + r_2)} + \frac{F_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} VAN(10\%, 12\%, 12\%) &= -75 - \frac{14,40}{1,10} - \frac{14,40}{(1,10)(1,12)} + \frac{150}{(1,10)(1,12)^2} \\ &= 8,93 > 0 \rightarrow \text{conveniente.} \end{aligned}$$

Supponendo che il costo del capitale rimanga costante al 10%, calcoliamo il valore che l'esborso iniziale  $X$  dovrebbe avere per ottenere lo stesso VAN:

$$VAN(10\%) = X + 25 + \frac{F_1}{1 + r} + \frac{F_2}{(1 + r)^2} + \frac{F_3}{(1 + r)^3}$$

ovvero

$$8,93 = X + 25 - \frac{14,40}{1,10} - \frac{14,40}{(1,10)^2} + \frac{150}{(1,10)^3}$$

da cui

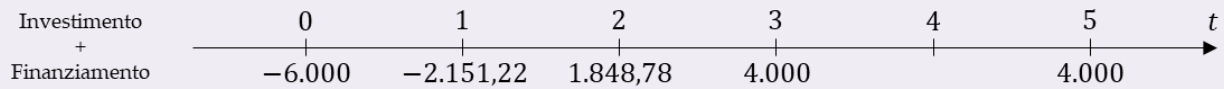
$$X = 8,93 - 25 + \frac{14,40}{1,10} + \frac{14,40}{(1,10)^2} - \frac{150}{(1,10)^3} = -103,77.$$

Con un costo del capitale costante al 10%, l'esborso iniziale dovrebbe essere pari a 103,77€ per mantenere lo stesso VAN.



Complessivamente, l'operazione (investimento + finanziamento) genera i seguenti flussi di cassa netti:  $F_0 = -6.000$ ,  $F_1 = -2.151,22$ ,  $F_2 = 1.848,78$ ,  $F_3 = 4.000$ ,  $F_4 = 0$ ,  $F_5 = 4.000$ .

Rappresentiamo i flussi di cassa netti nel seguente schema:



L'operazione risulta indifferente per l'investitore, il che implica un VAN nullo:

$$VAN(6\%, 6\%, 6\%, 6\%, r_5) = 0.$$

Calcoliamo il costo del capitale nel quinto anno:

$$\begin{aligned} VAN(6\%, 6\%, 6\%, 6\%, r_5) &= F_0 + \sum_{t=1}^4 \frac{F_t}{(1 + 0,06)^t} + \frac{F_5}{(1 + 0,06)^4 \cdot (1 + r_5)} \\ &= F_0 + \frac{F_1}{1,06} + \frac{F_2}{(1,06)^2} + \frac{F_3}{(1,06)^3} + \frac{F_4}{(1,06)^4} + \frac{F_5}{(1,06)^4 \cdot (1 + r_5)} \end{aligned}$$

ovvero

$$0 = -6.000 - \frac{2.151,22}{1,06} + \frac{1.848,78}{(1,06)^2} + \frac{4.000}{(1,06)^3} + \frac{0}{(1,06)^4} + \frac{4.000}{(1,06)^4 \cdot (1 + r_5)}$$

da cui

$$r_5 = \frac{4.000}{6.000 \cdot 1,06^4 + 2.151,22 \cdot 1,06^3 - 1.848,78 \cdot 1,06^2 - 4.000 \cdot 1,06} - 1 = 0,0472 = 4,72\%.$$

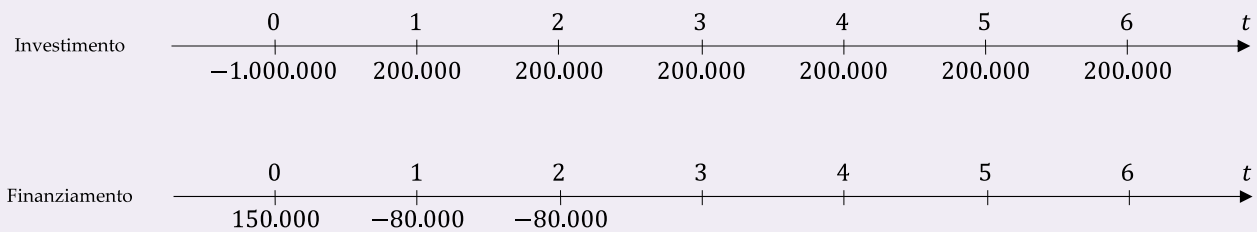
### Prova finale MGF del 14/06/2022 – Esercizio 3

Un'azienda ha l'opportunità di investire €1 milione per ammodernare i propri impianti di produzione. A fronte di questo investimento, ci saranno incassi incrementali da vendite misurabili in €200.000 all'anno per 6 anni. Per finanziare il progetto, l'azienda ricorre a un prestito bancario per l'ammontare di €150.000, rimborsabile con due rate annue pari a €80.000. Se il costo del capitale è  $r = 10\%$ , il VAN di questa operazione (investimento + finanziamento) è

- A. 200.000
- B. -128.947,9
- C. 190.000
- D. -117.790,8

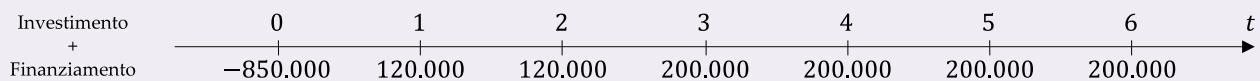
Soluzione.

Rappresentiamo i flussi di cassa delle due operazioni con il seguente schema:



Complessivamente, l'operazione  $I + F$  (investimento + finanziamento) genera i seguenti flussi di cassa:  $F_0 = -850.000$ ,  $F_1 = F_2 = 120.000$ ,  $F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 200.000$ .

Rappresentiamo i flussi di cassa netti nel seguente schema:



Sapendo che il costo del capitale è  $r = 10\%$ , calcoliamo il VAN dell'operazione  $I + F$ :

$$VAN^{I+F}(10\%) = F_0 + \sum_{t=1}^6 F_t$$

$$= F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \frac{F_4}{(1+r)^4} + \frac{F_5}{(1+r)^5} + \frac{F_6}{(1+r)^6}$$

ovvero

$$VAN^{I+F}(10\%) = -850.000 + \frac{120.000}{1,1} + \frac{120.000}{(1,1)^2} + \frac{200.000}{(1,1)^3} + \frac{200.000}{(1,1)^4} + \frac{200.000}{(1,1)^5} + \frac{200.000}{(1,1)^6}$$

$$= -117.790,84 < 0 \rightarrow \text{non conveniente.}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	D	...	...	...	...



Poiché il VAN è una misura additiva, avremmo potuto ragionare considerando le operazioni come singoli progetti. In particolare, il VAN dell'investimento è

$$\begin{aligned} VAN^I(10\%) &= -1.000.000 + \frac{200.000}{1,1} + \frac{200.000}{(1,1)^2} + \frac{200.000}{(1,1)^3} + \frac{200.000}{(1,1)^4} + \frac{200.000}{(1,1)^5} + \frac{200.000}{(1,1)^6} \\ &= -128.947,86 < 0 \rightarrow \text{non conveniente} \end{aligned}$$

e il VAN del finanziamento è

$$\begin{aligned} VAN^F(10\%) &= 150.000 - \frac{80.000}{1,1} - \frac{80.000}{(1,1)^2} \\ &= 11.157,02 > 0 \rightarrow \text{conveniente} \end{aligned}$$

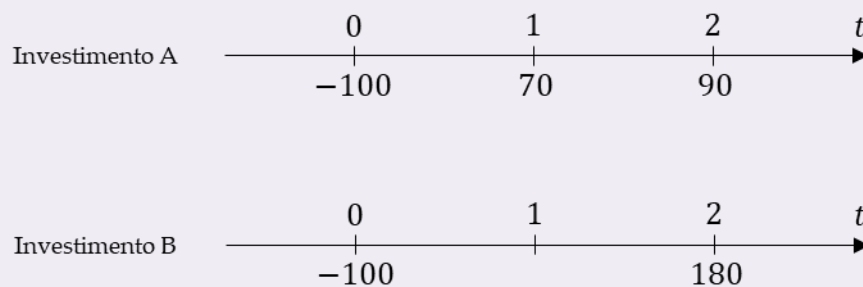
da cui

$$\begin{aligned} VAN^{I+F}(10\%) &= VAN^I(10\%) + VAN^F(10\%) \\ &= -128.947,86 + 11.157,02 \\ &= -117.790,84 < 0 \rightarrow \text{non conveniente.} \end{aligned}$$

## 12. Tasso Interno di Rendimento (TIR)

### Esercizio 12.1

Scegliere uno dei seguenti investimenti sulla base del TIR (si dimostri che, con un costo opportunità del capitale pari al 10%, il criterio del TIR fornisce un'indicazione errata).



Soluzione.

Calcoliamo il TIR dell'investimento A:

$$VAN^A(x) = -100 + \frac{70}{1+x} + \frac{90}{(1+x)^2} = 0$$

da cui

$$-100x^2 - 130x + 60 = 0$$

Risolviamo ora l'equazione di secondo grado rispetto all'incognita  $x$ . In particolare,

$$x_{1,2} = \frac{130 \pm \sqrt{40.900}}{-200}$$

ovvero

$$x_1 = -1,6612 \quad \text{e} \quad x_2 = 0,3612.$$

La soluzione  $x_1$  non è finanziariamente accettabile (essendo minore di  $-1$ ). Pertanto, il TIR dell'investimento A è  $x = 36,12\%$ . In maniera analoga, calcoliamo il TIR dell'investimento B:

$$VAN^B(x) = -100 + \frac{180}{(1+x)^2} = 0$$

da cui

$$-100x^2 - 200x + 80 = 0$$

Risolviamo ora l'equazione di secondo grado rispetto all'incognita  $x$ . In particolare,

$$x_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{72.000}}{-200}$$

ovvero

$$x_1 = -2,3416 \quad \text{e} \quad x_2 = 0,3416.$$

Anche in questo caso, la soluzione  $x_1$  non è finanziariamente accettabile (essendo minore di  $-1$ ). Pertanto, il TIR dell'investimento B è  $x = 34,16\%$ . Questo implica che, secondo il criterio del TIR, l'investimento A è preferibile perché il suo TIR è maggiore del TIR di B.

Calcoliamo ora il VAN dei due investimenti con costo di opportunità del capitale pari al 10%:

$$VAN^A(10\%) = -100 + \frac{70}{1+0,1} + \frac{90}{(1+0,1)^2} = 38,02$$

e

$$VAN^B(10\%) = -100 + \frac{180}{(1+0,1)^2} = 48,76.$$

Il criterio del TIR fornisce un'indicazione errata perché con costo di opportunità del capitale pari al 10% il VAN di B è maggiore del VAN di A:

$$VAN^B(10\%) = 48,76 > VAN^A(10\%) = 38,02.$$

Essendo il VAN una misura additiva, avremmo anche potuto ragionare in termini di VAN dell'operazione incrementale  $A - B$ , i cui flussi di cassa sono  $F_0^{A-B} = 0$ ,  $F_1^{A-B} = 70$ ,  $F_2^{A-B} = -90$ . Il suo VAN è

$$VAN^{A-B}(10\%) = 0 + \frac{70}{1 + 0,1} - \frac{90}{(1 + 0,1)^2} = -10,74 < 0.$$

L'operazione  $A - B$  non è conveniente, il che significa che B è preferibile ad A.

### Prova MGF del 27/01/2022 – Esercizio 7

*Investite oggi ( $t = 0$ ) la somma di 50 mila euro in un investimento il cui TIR è pari a  $i = 10\%$ . Non effettuerete alcun prelievo né altro investimento prima della sua liquidazione, che avverrà all'epoca  $t^*$ . Se il valore di liquidazione dell'investimento in  $t^*$  è pari a 85 mila euro, allora*

- A.  $5,0 < t^* < 5,2$
- B.  $5,2 < t^* < 5,4$
- C.  $5,4 < t^* < 5,6$
- D.  $5,6 < t^* < 5,8$

#### Soluzione.

Se il TIR dell'operazione è pari a  $i = 10\%$ , allora  $VAN(10\%) = 0$ . Ne consegue che

$$VAN(10\%) = F_0 + \frac{F_t}{(1 + 0,1)^t} = 0$$

ovvero

$$-50.000 + \frac{85.000}{(1 + 0,1)^t} = 0$$

da cui

$$-50.000 \cdot (1,1)^t + 85.000 = 0$$

$$(1,1)^t = \frac{85.000}{50.000}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{85.000}{50.000}\right)}{\ln(1,1)}$$

$$t = 5,57 \text{ anni.}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	C