ESERCIZI DI MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

Fascicolo n. 5

Elementi di teoria dell'integrazione

- *Integrale indefinito*
  - *Integrazione diretta (primitive immediate e primitive quasi immediate)*
  - *Integrazione per sostituzione e integrazione per parti*
  - *Integrazione di funzioni razionali fratte (radici reali e radici complesse)*
  - *Esercizi vari*
- *Integrale definito*
  - *Teorema fondamentale del calcolo integrale*
  - *Calcolo di aree*
  - *Calcolo approssimato di aree mediante somma di Riemann*

Carlo Alberto Magni magni@unimore.it

Dario Vezzali dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Integrazione diretta

Esercizio 10.1, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int x^5\,dx$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di un integrale elementare. Applicando la formula generale $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1$ della Tabella 1 otteniamo

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$$

III) $\int \frac{x^4-8x^3+7}{x^4}\,dx$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha lo stesso grado del denominatore. Applicando semplicemente la proprietà di omogeneità dell'integrale (ovvero "portando fuori" le costanti moltiplicative) e la proprietà di additività dell'integrale (ovvero "spezzando" il calcolo della primitiva di una somma di funzioni nel calcolo della somma di due o più primitive) otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-8x^3+7}{x^4}\,dx &= \int dx - 8\int \frac{1}{x}\,dx + 7\int \frac{1}{x^4}\,dx \\ &= x - 8\ln|x| + 7\cdot\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right) + c \\ &= x - 8\ln|x| - \frac{7}{3x^3} + c\end{aligned}$$

IV) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Soluzione.

Dopo aver riscritto l'integrale nella forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

applicando alla formula generale $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con $n \neq -1$, otteniamo

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

V) $\int (e^x + 1) \, dx$

Soluzione.

Applicando semplicemente la proprietà di additività dell'integrale, otteniamo

$$\int (e^x + 1) \, dx = \int e^x \, dx + \int dx = e^x + x + c$$

Esercizio 10.2, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui numeratore è la derivata prima del denominatore. Applicando semplicemente il Teorema 1 (ovvero $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$) otteniamo

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln|x^2+x| + c$$

II) $\int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore non è esattamente la derivata prima del denominatore. Tuttavia, possiamo moltiplicare e dividere per 2 al fine di applicare il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx &= \frac{2}{2} \cdot \int \frac{x+4}{x^2+8x+11} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+11} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+8x+11| + c\end{aligned}$$

III) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

Soluzione.

In questo caso, sapendo che la derivata prima di $f(x) = \ln x$ è $f'(x) = \frac{1}{x}$, possiamo applicare direttamente il Teorema 1. Otteniamo

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$$

IV) $\int \frac{e^x}{3-e^x} dx$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il numeratore non è esattamente la derivata prima del denominatore. Tuttavia, possiamo moltiplicare e dividere per (-1) al fine di applicare il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{3-e^x} dx &= \frac{(-1)}{(-1)} \cdot \int \frac{e^x}{3-e^x} dx \\ &= -\int \frac{-e^x}{3-e^x} dx \\ &= -\ln|3-e^x| + c\end{aligned}$$

VI) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, possiamo aggiungere e sottrarre e^x a numeratore e applicare poi la proprietà di additività dell'integrale al fine di applicare, successivamente, il Teorema 1. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx \\ &= \int \frac{1+e^x}{1+e^x} dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= x - \ln(1+e^x) + c\end{aligned}$$

Si noti che possiamo scrivere $\ln(1+e^x)$ utilizzando le parentesi tonde anziché il valore assoluto in quanto l'argomento del logaritmo è positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10.2, pag. 270 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

III) $\int e^{-x+3}\,dx$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per (-1) al fine di applicare il Teorema 4 (ovvero $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$). Otteniamo

$$\begin{aligned}\int e^{-x+3}\,dx &= \frac{(-1)}{(-1)} \cdot \int e^{-x+3}\,dx \\ &= -\int (-1) \cdot e^{-x+3}\,dx \\ &= -e^{-x+3} + c\end{aligned}$$

IV) $\int (2x+4)^6\,dx$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 2 al fine di applicare il Teorema 2. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int (2x+4)^6\,dx &= \frac{2}{2} \cdot \int (2x+4)^6\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2(2x+4)^6\,dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+4)^7}{7} + c \\ &= \frac{(2x+4)^7}{14} + c\end{aligned}$$

V) $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

Soluzione.

In questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 3 al fine di applicare il Teorema 2. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+1}\,dx &= \frac{3}{3}\cdot \int \sqrt{3x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int 3\sqrt{3x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int 3(3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}+c\end{aligned}$$

VI) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-7}}dx$

Soluzione.

Anche in questo caso, possiamo moltiplicare e dividere per 3 al fine di applicare il Teorema 2. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{3x-7}}dx &= \frac{3}{3}\cdot \int \frac{1}{\sqrt{3x-7}}dx \\ &= \frac{1}{3}\int 3(3x-7)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3x-7}+c\end{aligned}$$

VIII) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

Soluzione.

In questo caso, essendo $1/x$ la derivata prima di $f(x) = \ln x$, possiamo applicare direttamente il Teorema 2. Otteniamo

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^4 \, dx = \frac{(\ln x)^5}{5} + c = \frac{\ln^5 x}{5} + c$$

XIV) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

Soluzione.

Anche in questo caso, essendo $1/x$ la derivata prima di $f(x) = 1 + \ln x$ possiamo applicare direttamente il Teorema 2. Otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \frac{1}{x} (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + c$$

Integrazione per sostituzione

Esercizio 10.11, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^x+1} dx$

Soluzione.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{t^2 + 3t}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$
$$= \int \frac{t(t+3)}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{t+3}{t+1}\,dt \\
&= \int \frac{t}{t+1}\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}\,dt
\end{aligned}
$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 al numeratore del primo integrale e otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}\,dt &= \int \frac{t+1}{t+1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= \int dt + 2\int \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= t + 2\ln|t+1| + c \\
&= e^x + 2\ln(e^x+1) + c
\end{aligned}
$$

Si noti che possiamo scrivere $2\ln(e^x+1)$ utilizzando le parentesi tonde anziché il valore assoluto in quanto l'argomento del logaritmo è positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

II) $\int \frac{2e^{1-x}}{1+e^{-2x}}\,dx$

<u>Soluzione</u>.

Poniamo $e^{-x} = t$, ovvero $x = -\ln t$, da cui $dx = -\frac{1}{t}dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2e^{1-x}}{1+e^{-2x}}\,dx &= \int \frac{2e\cdot e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx \\
&= \int \frac{2e\cdot t}{1+t^2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)dt \\
&= -2e\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= -2e\arctan(t) + c \\
&= -2e\arctan(e^{-x}) + c
\end{aligned}
$$

V) $\int \frac{2e^x}{(e^x-2)(e^x+1)}dx$

<u>Soluzione</u>.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t}dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{2e^x}{(e^x-2)(e^x+1)}dx &= \int \frac{2t}{(t-2)(t+1)} \cdot \frac{1}{t}dt \\ &= 2\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}dt\end{aligned}$$

A questo punto, dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui il polinomio a denominatore, $P_2(x)$, è di grado 2 ed ha 2 radici distinte, $t = 1$ e $t = 2$. Otteniamo

$$2\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}dt = 2\int \left(\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}\right)dt$$

In particolare, deve essere

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}$$

da cui

$$A(t+1) + B(t-2) = 1$$

che riscriviamo come uguaglianza tra due polinomi di grado 1:

$$(A+B)t + (A-2B) = 0t + 1.$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$$

Quindi,

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{t-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{t+1}$$

e

$$\begin{aligned} 2\int\left(\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+1}\right)dt &= 2\left(\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-2}dt-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t+1}dt\right) \\ &= \frac{2}{3}\ln|t-2|-\frac{2}{3}\ln|t+1|+c \\ &= \frac{2}{3}\ln|e^x-2|-\frac{2}{3}\ln(e^x+1)+c \end{aligned}$$

Integrazione per parti

Esercizio 10.9, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int x^2e^x\,dx$

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo x^2 come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x)=x^2$ e $g'(x)=e^x$. Ora, deriviamo $f(x)$ e scegliamo una qualsiasi primitiva di $g'(x)=e^x$. Allora, $f'(x)=2x$ e $g(x)=e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x-\int 2xe^x\,dx = x^2e^x-2\int xe^x\,dx$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Allora, $f'(x) = 1$ e, di nuovo, $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} x^2e^x - 2\int xe^x\,dx &= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c \end{aligned}$$

III) $\int x \ln^2 x\, dx$

<u>Soluzione</u>.

Integriamo per parti prendendo $\ln^2 x$ come fattore finito e x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln^2 x$ e $g'(x) = x$.

Allora $f'(x) = 2\ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int x\ln^2 x\,dx &= \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int 2\ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx \end{aligned}$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo $\ln x$ come fattore finito e x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = x$. Allora, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + c \\ &= \frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

Esercizio 10.10, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

VI) $\int e^x \cos x \, dx$

Soluzione.

Integriamo per parti prendendo $\cos x$ come fattore finito e e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = e^x$.

Allora $f'(x) = -\sin x$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int e^x \cos x \, dx = \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

Integriamo nuovamente per parti prendendo $\sin x$ come fattore finito e e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = e^x$. Allora $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Portando $-\int e^x \cos x \, dx$ a sinistra del segno di uguaglianza (e sommando la costante c), otteniamo

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x + c$$

da cui, dividendo per 2,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + k, \qquad k = c/2$$

Integrazione di funzioni razionali fratte (radici reali)

Esercizio 10.6, pag. 272 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale indefinito:

IV) $\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6} dx$

Soluzione.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è minore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Si ha $P_2(x) = 0$ per $x = 2$ o per $x = 3$, quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} dx$$

Utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Si ha

$$A(x-3) + B(x-2) = 3x+1$$

che possiamo riscrivere come uguaglianza tra due polinomi di primo grado:

$$(A+B)x - 3A - 2B = 3x+1$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-7, B=10$$

Quindi,

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=-\frac{7}{x-2}+\frac{10}{x-3}$$

e

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx &= -7\int\frac{1}{x-2}dx+10\int\frac{1}{x-3}dx\\ &= -7\ln|x-2|+10\ln|x-3|+c\end{aligned}$$

Esercizio 10.8, pag. 272 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

I) $\int\frac{x^2+7x+14}{x+2}dx$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$ (per un ripasso del metodo "in linea" per la divisione tra polinomi si rimanda al seguente video del Prof. Magni: Divisione tra polinomi - Metodo "in linea"). In particolare,

$$\frac{x^2+7x+14}{x+2}=x+5+\frac{4}{x+2}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+7x+14}{x+2}dx &= \int(x+5)\,dx+\int\frac{4}{x+2}dx\\ &= \int x\,dx+5\int dx+4\int\frac{1}{x+2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}+5x+4\ln|x+2|+c\end{aligned}$$

V) $\int \frac{3x^3-50x^2+81x-27}{x^2-16x+15}dx$

<u>Soluzione</u>.

Anche in questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$. In particolare,

$$\frac{3x^3-50x^2+81x-27}{x^2-16x+15} = 3x-2+\frac{4x+3}{x^2-16x+15}$$

e

$$\int \frac{3x^3-50x^2+81x-27}{x^2-16x+15}dx = \int 3x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{4x+3}{x^2-16x+15}$$

I primi integrali sono determinabili direttamente:

$$\int \frac{3x^3-50x^2+81x-27}{x^2-16x+15}dx = \frac{3}{2}x^2-2x+\int \frac{4x+3}{x^2-16x+15}.$$

Concentriamoci ora sul terzo addendo del membro di destra. In esso, il grado del numeratore, $P_1(x) = 4x+3$, è minore del grado del denominatore, $P_2(x) = x^2-16x+15$. Si ha $P_2(x) = 0$ per $x = 1$ o $x = 15$ quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte. Utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{4x+3}{x^2-16x+15} = \frac{4x+3}{(x-1)(x-15)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-15}.$$

Si ha

$$A(x-15)+B(x-1) = 4x+3$$

che riscriviamo come uguaglianza tra due polinomi di primo grado:

$$(A+B)x-15A-B=4x+3.$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B=4 \\ -15A-B=3 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=\frac{9}{2}$$

Quindi,

$$\frac{4x+3}{x^2-16x+15}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-15}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}-2x+\int\frac{4x+3}{x^2-16x+15}dx &= \frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x-15}dx \\ &= \frac{3}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{9}{2}\ln|x-15|+c\end{aligned}$$

Esercizio 11.2, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale definito:

I) $\int_1^5 \frac{3}{x(x+3)}dx$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è minore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Si ha $P_2(x)=0$ per $x=0$ o per $x=3$, quindi dobbiamo calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta in cui $P_2(x)$ è di grado 2 ed ha 2 radici distinte:

$$\int_1^5 \frac{3}{x(x+3)}dx=\int_1^5\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}\right)dx$$

Dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$A(x+3)+Bx=3$$

che riscriviamo come uguaglianza tra polinomi di primo grado:

$$(A+B)x+3A=0x+3$$

Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A=3 \end{cases} \Longrightarrow A=1, B=-1$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_1^5 \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}\right)dx &= \int_1^5 \frac{1}{x}dx-\int_1^5 \frac{1}{x+3}dx \\ &= [\ln|x|]_1^5-[\ln|x+3|]_1^5 \\ &= \ln 5-\ln 1-(\ln 8-\ln 4)\end{aligned}$$

Applicando alcune proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\ln 5-\ln 1-(\ln 8-\ln 4)=\ln 5-\ln\frac{8}{4}=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte (radici complesse)

Esercizio.

L'integrale indefinito di $f(x)=\frac{2-x}{7+x^2}$ *è*

- *A.* $\ln(x^2+7)^{-0.5}+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+c$
- *B.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+\ln(x^2+7)^{-0.5}+c$
- *C.* $\ln(x^2+7)+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+c$
- *D.* $\ln(x^2+7)^{0.5}+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+c$

Soluzione.

Notiamo che il polinomio $P_2(x) = 7 + x^2$ non si annulla per nessun valore di x reale: le sue radici sono complesse. Non possiamo dunque applicare il metodo di integrazione dei fratti semplici. Allora, cerchiamo di semplificare l'integrale applicando la proprietà di additività dell'integrale:

$$\int \frac{2-x}{7+x^2}\,dx = \int \frac{2}{7+x^2}\,dx - \int \frac{x}{7+x^2}\,dx$$

Lavoriamo ora separatamente sui due integrali. Il primo integrale è

$$\int \frac{2}{7+x^2}\,dx.$$

Raccogliamo 7 a fattor comune e applichiamo la proprietà di omogeneità dell'integrale per "portare fuori" le costanti moltiplicative dal primo integrale:

$$\int \frac{2}{7+x^2}\,dx = \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{7}}\,dx = \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{1}{\sqrt{7}}$, che è la derivata di $f(x) = x/\sqrt{7}$, al fine di applicare il Teorema 5; otteniamo

$$\frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{2}{7}\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dx$$

da cui

$$\frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$$

Ora lavoriamo sul secondo integrale:

$$-\int \frac{x}{7+x^2}\,dx.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo integrale per 2 al fine di applicare il Teorema 2:

$$-\int \frac{x}{7+x^2}\,dx = -\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{7+x^2}\,dx$$

da cui

$$-\int \frac{x}{7+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{7+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(7+x^2)+c.$$

Possiamo allora scrivere

$$\int \frac{2-x}{7+x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2}\ln(7+x^2)+c$$

Applicando, infine, la proprietà dei logaritmi detta "regola dell'esponente", ovvero $\log_a(b^c) = c\log_a b$, otteniamo

$$\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{2}\ln(7+x^2)+c = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \ln(7+x^2)^{-0.5}+c$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	B	…	…	…

Esercizio 10.13, pag. 273 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente integrale indefinito:

III) $\int \frac{1}{16+x^2}\,dx$

Soluzione.

Prima di tutto, raccogliamo 16 a fattor comune:

$$\int \frac{1}{16+x^2}dx = \int \frac{1}{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}dx.$$

Ora possiamo procedere in due modi alternativi:

1. risolvendo l'integrale così ottenuto per sostituzione
2. applicando il Teorema 5, ovvero $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + c$.

Integrazione per sostituzione

Poniamo $\frac{x}{4} = t$, ovvero $x = 4t$, da cui $dx = 4dt$. Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot 4dt = \frac{1}{4}\arctan(t) + c = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

Teorema 5

Moltiplichiamo e dividiamo per $1/4$, che è la derivata di $f(x) = x/4$, al fine di applicare il Teorema 5. Otteniamo

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}dx = \frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}dx = \frac{4}{16}\int \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

Esercizi vari

Esercizio 10.14, pag. 274 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ *passante per il punto* $P(0, 2)$.

Soluzione.

Determiniamo innanzi tutto l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx.$$

Poniamo $\sqrt[3]{1-x^3} = t$, ovvero $x = \sqrt[3]{1-t^3} = (1-t^3)^{\frac{1}{3}}$, da cui

$$dx = \frac{1}{3}(1-t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3t^2) = -\frac{t^2}{\left(\sqrt[3]{1-t^3}\right)^2}\,dt.$$

Applicando la regola di sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx &= \int \frac{\left(\sqrt[3]{1-t^3}\right)^2}{t} \cdot \left(-\frac{t^2}{\left(\sqrt[3]{1-t^3}\right)^2}\right) dt \\
&= -\int t\,dt \\
&= -\frac{t^2}{2} + c \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 + c \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + c
\end{aligned}$$

Tra tutte le funzioni del tipo $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + c$, dobbiamo identificare quell'unica $F(x)$ tale che assume il valore 2 in $x = 0$, ovvero

$$\begin{aligned}
F(0) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-0^3)^2} + c &= 2 \\
-\frac{1}{2} + c &= 2
\end{aligned}$$

$$c = 2 + \frac{1}{2}$$
$$c = \frac{5}{2}$$

Pertanto, la primitiva della funzione $f(x)$ passante per il punto $P(0,2)$ è data da

$$F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \frac{5}{2}.$$

Esercizio 6, prova finale MGF del 14/06/2022

Sia $f(x) = \ln x + x$, allora una sua primitiva è

A. $F(x) = x \ln x + x^2$
B. $F(x) = x + \ln x^2$
C. $F(x) = x \ln x - x + 0.5x^2$
D. $F(x) = x - \ln x - 0.5x^2$

Soluzione.

Applicando inizialmente la proprietà di additività dell'integrale otteniamo

$$\int (\ln x + x)\, dx = \int \ln x\, dx + \int x\, dx$$

Ora integriamo per parti il primo integrale prendendo $\ln x$ come fattore finito ed 1 come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$. Allora $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx + \int x\, dx &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx + \int x\, dx \\ &= x \ln x - \int dx + \int x\, dx \\ &= x \ln x - x + \frac{x^2}{2} + c \\ &= x \ln x - x + 0.5x^2 + c\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	C	…

Esercizio 6, prova finale MGF del 30/06/2022

Sia $f(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x}}$*. Si determini l'integrale indefinito:*

A. $-2x^{\frac{1}{2}} + 0.4x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{1.5} + c$

B. $0.4x^{2.5} - \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c$

C. $0.4x^{2.5} - \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c$

D. $\frac{2}{3}x^{1.5} + 0.4x^{2.5} - 2x^{0.5} + c$

Soluzione.

Applicando inizialmente le proprietà di omogeneità e additività dell'integrale otteniamo

$$\int \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Successivamente, applicando alcune proprietà delle potenze, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \int x^{\left(2-\frac{1}{2}\right)}\,dx + \int x^{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c \\
&= 0.4x^{2.5} + \frac{2}{3}x^{1.5} - 2x^{0.5} + c
\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	D	…

Esercizio 3, prova MGF del 17/01/2023

Si determini l'integrale indefinito di $f(x) = xe^x$*:*

A. $x(e^x + 1) + c$

B. $e^x(x + 1) + c$

C. $e^x(x - 1) + c$

D. $x(e^x - 1) + c$

<u>Soluzione</u>.

$$\int xe^x \, dx$$

Integriamo per parti il primo integrale prendendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Allora $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int xe^x \, dx &= xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + c \\ &= e^x(x - 1) + c \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	C	…	…	…	…

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Esercizio 11.1, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare i seguenti integrali definiti:

I) $\int_{-1}^{1}(x^5 - x)\,dx$

<u>Soluzione</u>.

Applicando la proprietà di additività dell'integrale (Proprietà 4), ovvero

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\big)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^5 - x)\,dx &= \int_{-1}^{1} x^5\,dx - \int_{-1}^{1} x\,dx \\ &= \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

II) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln(2x)\,dx$

<u>Soluzione</u>.

Integriamo per parti prendendo $\ln(2x)$ come fattore finito ed x^2 come fattore differenziale; poniamo quindi $f(x) = \ln(2x)$ e $g'(x) = x^2$. Allora $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3}{3}$; pertanto, applicando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln(2x)\, dx &= \left[\ln(2x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(2x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\, dx \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(2x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot 1^3 \cdot \ln(2 \cdot 1) - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \overbrace{\ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}^{=0} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{7}{72}
\end{aligned}$$

V) $\int_0^1 (e^x + e^{-x} + e^{2x})\, dx$

<u>Soluzione</u>.

Poniamo $e^x = t$, ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$. Applicando la regola di sostituzione e, successivamente, la proprietà di additività dell'integrale (Proprietà 4) otteniamo

$$\begin{aligned}
\int (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx &= \int (t + t^{-1} + t^2) \cdot \frac{1}{t} dt \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{t^2} + t\right) dt \\
&= t - \frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} + c
\end{aligned}$$

Sostituendo e^x a t,

$$\int (e^x + e^{-x} + e^{2x}) dx = e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{2} + c$$

Considerando gli estremi di integrazione,

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x} + e^{2x})dx = \left[e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$
$$= [e^x]_0^1 - \left[\frac{1}{e^x}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$
$$= (e^1 - e^0) - \left(\frac{1}{e^1} - \left(\frac{1}{e^0}\right)\right) + \frac{e^{2\cdot 1}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{2}$$
$$= e - 1 - \frac{1}{e} + 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= e - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

VI) $\int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx$

<u>Soluzione</u>.

Al fine di applicare il Teorema 2, moltiplichiamo e dividiamo per 2, che è la derivata di $f(x) = 2x + 1$; otteniamo

$$\int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 2\sqrt{2x+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(2\cdot 2+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(2\cdot 0+1)^3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{125} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Esercizio 11.3, pag. 301 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'integrale definito $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ *essendo:*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x+4 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, si tratta di una funzione definita a tratti, per cui sfruttiamo la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, ovvero

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \qquad c \in [a,b]$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{0} (-x+4)\,dx + \int_{0}^{2} (x+2)\,dx \\
&= -\int_{-2}^{0} x\,dx + 4\int_{-2}^{0} dx + \int_{0}^{2} x\,dx + 2\int_{0}^{2} dx \\
&= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + 4[x]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + 2[x]_0^2 \\
&= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + 4\cdot\big(0-(-2)\big) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 2\cdot(2-0) \\
&= 2+8+2+4 = 16
\end{aligned}$$

Calcolo di aree

Esercizio 11.9, pag. 302 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'area della parte di piano individuata dall'asse x e dalle seguenti curve (negli intervalli a fianco indicati):

III) $y = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ in $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$

<u>Soluzione</u>.

È innanzi tutto necessario studiare il segno della funzione $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ nell'intervallo indicato. Trattandosi di una funzione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

(N) $\ln(x+3) > 0$ se $x > -2$;

(D) $x + 3 > 0$ se $x > -3$.

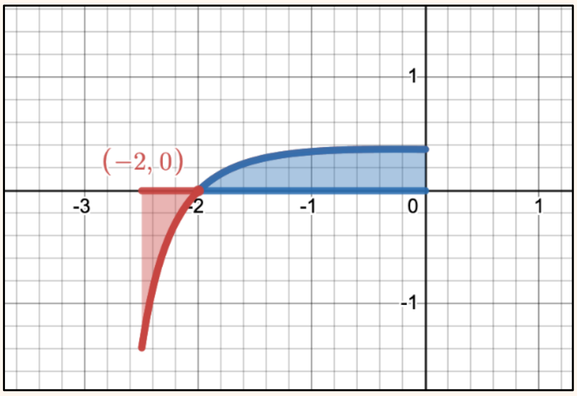
Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
(N)	$(-)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{\ln(x+3)}{x+3} > 0$ è verificata per $x < -3$ e per $x > -2$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-2, +\infty)$ e negativa nell'intervallo $(-3, -2)$. In particolare,

- $f(x) < 0$ in $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$
- $f(x) > 0$ in $(-2, 0)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare, tenendo conto che la derivata di $g(x) = \ln(x+3)$ è $g'(x) = 1/(x+3)$ e che la funzione integranda può essere riscritta come $g'(x) \cdot g(x)$, possiamo applicare il Teorema 2:

$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= -\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx \\
&= -\left[\frac{(\ln(x+3))^2}{2}\right]_{-\frac{5}{2}}^{-2} + \left[\frac{(\ln(x+3))^2}{2}\right]_{-2}^{0} \\
&= -\left[\frac{(\ln(-2+3))^2}{2} - \frac{\left(\ln\left(-\frac{5}{2}+3\right)\right)^2}{2}\right] + \left[\frac{(\ln(0+3))^2}{2} - \frac{(\ln(-2+3))^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 2)^2 + \frac{1}{2}\ln^2 3 \\
&= \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\ln^2 3 \\
&= \frac{1}{2}(\ln^2 2 + \ln^2 3) \approx 0.8437
\end{aligned}
$$

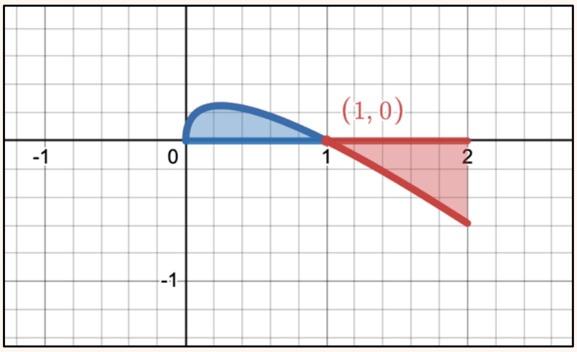
V) $y = \sqrt{x} - x$ in $[0, 2]$

<u>Soluzione</u>.

È innanzi tutto necessario studiare il segno della funzione $f(x) = \sqrt{x} - x$ nell'intervallo indicato. Si ha $\sqrt{x} - x > 0$ se e solo se $\sqrt{x} > x$, ossia $x > x^2$, da cui $x - x^2 > 0$. Questo polinomio è positivo per $x \in (0, 1)$. Pertanto,

- $f(x) > 0$ in $(0, 1)$
- $f(x) < 0$ in $(1, 2)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare,

$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx - \int_1^2 (\sqrt{x} - x)\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x\, dx - \int_1^2 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 x\, dx \\
&= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3} + \frac{2}{3}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} \approx 0.4477
\end{aligned}
$$

VI) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$ in $[0,3]$

<u>Soluzione</u>.

Prima di procedere con il calcolo dell'area, è necessario studiare il segno della funzione $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1}$ nell'intervallo indicato. Trattandosi di una funzione fratta, la condizione $f(x) > 0$ è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

(N) $x^2 - 2x > 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 2$;

(D) $x + 1 > 0$ se $x > -1$.

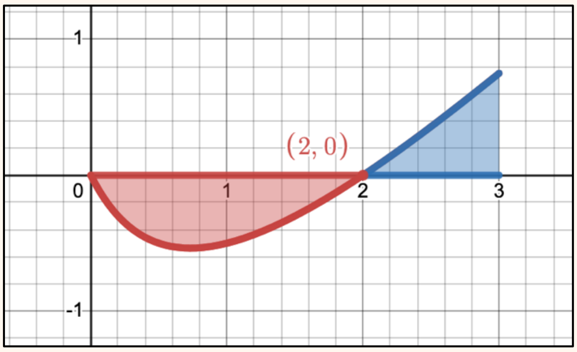
Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
(N)	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{x^2-2x}{x+1} > 0$ è verificata per $-1 < x < 0$ e per $x > 2$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-1,0)$ e $(2,+\infty)$ e negativa negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(0,2)$. In particolare,

- $f(x) < 0$ in $(0,2)$
- $f(x) > 0$ in $(2,3)$

(si veda anche la figura sottostante).



Pertanto, occorre calcolare l'area come somma di aree applicando i rispettivi integrali definiti con il segno opportuno. In particolare,

$$\text{Area} = -\int_0^2 \frac{x^2-2x}{x+1}\,dx + \int_2^3 \frac{x^2-2x}{x+1}\,dx$$

In questo caso, la funzione integranda è una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore, $P_1(x)$, è maggiore del grado del polinomio a denominatore, $P_2(x)$. Dobbiamo quindi eseguire preliminarmente la divisione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$. In particolare,

$$\frac{x^2-2x}{x+1} = (x-3) + \frac{3}{x+1}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= -\left(\int_0^2 (x-3)\,dx + \int_0^2 \frac{3}{x+1}\,dx\right) + \left(\int_2^3 (x-3)\,dx + \int_2^3 \frac{3}{x+1}\,dx\right) \\
&= -\left(\int_0^2 x\,dx - 3\int_0^2 dx + 3\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx\right) + \left(\int_2^3 x\,dx - 3\int_2^3 dx + 3\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx\right) \\
&= -\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 3[x]_0^2 + 3[\ln|x+1|]_0^2\right) + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - 3[x]_2^3 + 3[\ln|x+1|]_2^3 \\
&= -\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} - 3\cdot(2-0) + 3\cdot(\ln 3 - \ln 1)\right) + \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} - 3\cdot(3-2) + 3\cdot(\ln 4 - \ln 3) \\
&= -2 + 6 - 3\ln 3 + \frac{9}{2} - 2 - 3 + 3\ln 4 - 3\ln 3
\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{2} + 3\ln 4 - 6\ln 3$$

$$= \frac{7}{2} + \ln\frac{4^3}{3^6}$$

$$= \frac{7}{2} + \ln\frac{2^6}{3^6}$$

$$= \frac{7}{2} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$= \frac{7}{2} + 6\ln\frac{2}{3} \approx 1.0672$$

Esercizio 11.10, pag. 302 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = 4x^2$ *e il grafico della funzione* $g(x) = 8x + 5$ *e il primo quadrante del piano cartesiano.*

<u>Soluzione</u>.

I grafici delle due funzioni si intersecano per x tale che $f(x) = g(x)$, cioè

$$4x^2 = 8x + 5 \Longrightarrow 4x^2 - 8x - 5 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 4\cdot(-5)}}{8} = \frac{8 + \sqrt{144}}{8} = \frac{8 + 12}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

e

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 4\cdot(-5)}}{8} = \frac{8 - \sqrt{144}}{8} = \frac{8 - 12}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

a cui corrispondono, rispettivamente, i valori

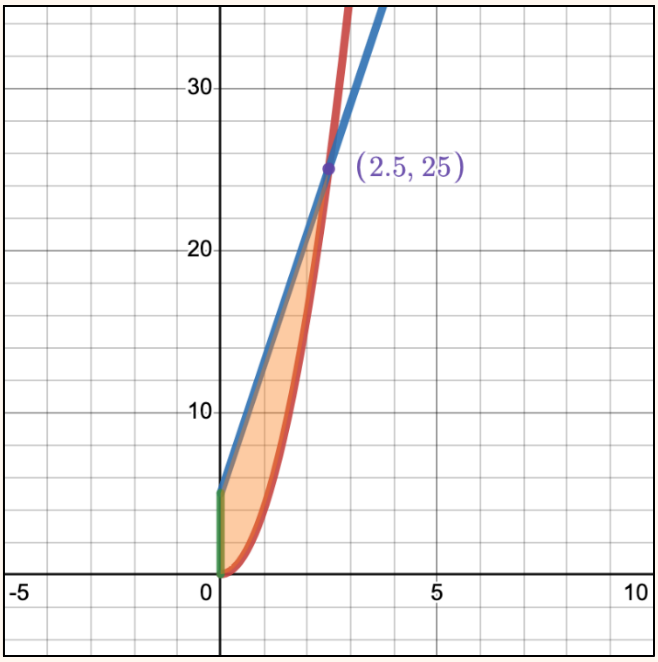
$$f(2.5) = 4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4\cdot\frac{25}{4} = 25$$

e

$$f(-0.5) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{4} = 1$$

Tuttavia, la soluzione $(-0.5, 1)$ non è accettabile perché tale punto non appartiene al primo quadrante del piano cartesiano. Pertanto, l'unica soluzione accettabile è $(2.5, 25)$. Inoltre, $4x^2 - 8x - 5 < 0$ per $x \in (0, 2.5)$, cioè $f(x) < g(x)$ per $x \in (0, 2.5)$, quindi il grafico di $g(x)$ giace al di sopra del grafico di $f(x)$ nell'intervallo considerato. L'area da calcolare è rappresentata nella figura sottostante dalla regione ombreggiata in arancione compresa tra il grafico di $g(x)$ (in blu), il grafico di $f(x)$ (in rosso) e il primo quadrante del piano cartesiano (in verde la porzione di asse y che delimita la ragione). In particolare, essa è data dalla differenza

$$\int_0^{\frac{5}{2}} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (8x + 5 - 4x^2)\, dx.$$



Pertanto,

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^{\frac{5}{2}} (8x + 5)\, dx - \int_0^{\frac{5}{2}} 4x^2\, dx \\
&= 8\int_0^{\frac{5}{2}} x\, dx + 5\int_0^{\frac{5}{2}} dx - 4\int_0^{\frac{5}{2}} x^2\, dx \\
&= 8\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}} + 5[x]_0^{\frac{5}{2}} - 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

$$= 8 \cdot \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0\right) - 4 \cdot \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} \right)$$

$$= 8 \cdot \frac{25}{8} + \frac{25}{2} - 4 \cdot \frac{125}{24}$$

$$= 25 + \frac{25}{2} - \frac{125}{6}$$

$$= \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16.67$$

Esercizio 4, prova MGF del 16/02/2022

Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ *e* $g(x) = x^2 + 3$ *nell'intervallo* $[0, 2]$*:*

A. $-\frac{e}{2} + \frac{20}{3}$

B. $\frac{2}{e} + \frac{20}{3}$

C. $\frac{2}{e} + \frac{32}{3}$

D. $-\frac{2}{e} + \frac{32}{3}$

Soluzione.

Prima di procedere con il calcolo dell'area, è necessario verificare il posizionamento relativo dei grafici sul piano cartesiano. Si ha

$$g(0) = 3 > 1 = f(0).$$

Inoltre,

- $g'(x) = 2x > 0$ su $(0,2)$
- $f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} < 0$ su $(0,2)$

Pertanto, $g(x)$ è strettamente crescente e $f(x)$ è strettamente decrescente su $[0,2]$. Questo implica che $g(x) > f(x)$ nell'intervallo considerato, cioè il grafico di $g(x)$ sta al di sopra del grafico di $f(x)$. L'area delimitata dalle due funzioni è dunque ottenuta come

$$\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

e, in particolare,

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^2 (x^2+3)\,dx - \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 dx - \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 dx - \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 dx + 2\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 3[x]_0^2 + 2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2 \\
&= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 3\cdot(2-0) + 2\cdot\left(e^{-\frac{2}{2}} - e^{-\frac{0}{2}}\right) \\
&= \frac{8}{3} + 6 + 2\cdot(e^{-1}-1) \\
&= \frac{8}{3} + 6 + \frac{2}{e} - 2 \\
&= \frac{20}{3} + \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	B	…	…	…

Esercizio 3, prova MGF/MMF del 14/07/2022

L'integrale definito $\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx$ *è*

A. $\ln(5 \cdot 3) + \ln 3$

B. $\ln \frac{3}{15}$

C. $\ln 5$

D. $\ln 5 + \ln 3$

Soluzione.

Il numeratore è la derivata del denominatore. Applicando il Teorema 1 otteniamo

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx &= [\ln|x^2+2x|]_1^3 \\ &= \ln|3^2 + 2 \cdot 3| - \ln|1^2 + 2 \cdot 1| \\ &= \ln 15 - \ln 3 \\ &= \ln \frac{15}{3} \\ &= \ln 5\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	C	…	…	…	…

Calcolo approssimato di aree mediante somma di Riemann

Esercizio 2, pag. 51 (Videolibro - Fascicolo n. 5)

Si trovi un'approssimazione per l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = x^5 + e^x$ *nell'intervallo* $[1, 3]$ *utilizzando la somma di Riemann con* $n = 5$. *Determinare l'errore commesso.*

(Cliccare qui per il video)

<u>Soluzione</u>.

Essendo

- $f(1) = 1 + e > 0$
- $f'(x) = 5x^4 + e^x > 0$ per ogni $x \in [1,3]$

la funzione $f(x)$ risulta positiva su $[1,3]$. Pertanto, l'area da calcolare può essere ottenuta dall'integrale definito

$$\int_1^3 (x^5 + e^x)\,dx.$$

Utilizzando una somma di Riemann, possiamo calcolarne un'approssimazione. Con $n = 5$, si ha $\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0.4$ e $x_k = x_{k-1} + 0.4$ con $x_0 = 1$ Pertanto,

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \sum_{k=0}^{4} f(x_k) \cdot \Delta x \\
&= \sum_{k=0}^{4} f(x_k) \cdot 0.4 \\
&= f(1) \cdot 0.4 + f(1.4) \cdot 0.4 + f(1.8) \cdot 0.4 + f(2.2) \cdot 0.4 + f(2.6) \cdot 0.4 \\
&= 3.72 \cdot 0.4 + 9.43 \cdot 0.4 + 24.95 \cdot 0.4 + 60.56 \cdot 0.4 + 132.28 \cdot 0.4 \approx 92.37
\end{aligned}$$

L'errore commesso è pari a

$$\begin{aligned}
E &= \left| \int_1^3 (x^5 + e^x)\,dx - \sum_{k=0}^{4} (f(x_k) \cdot 0.4) \right| \\
&= \left| \left[\frac{x^6}{6} + e^x \right]_1^3 - 92.37 \right| \\
&= \left| \left(\frac{3^6}{6} + e^6 - \frac{1^6}{6} - e^1 \right) - 92.37 \right| \\
&= |138.70 - 92.37| \approx 46.33
\end{aligned}$$

In termini percentuali, l'errore commesso è pari a

$$E(\%) = \frac{46.33}{138.70} \approx 33.40\%$$

Esercizio.

Si trovi un'approssimazione per l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ *nell'intervallo* $[2, 5]$ *utilizzando la somma di Riemann con* $n = 6$. *Determinare l'errore commesso.*

(Cliccare qui per il video)

Soluzione.

Essendo

- $f(2) = \ln 3 > 0$
- $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} > 0$ per ogni $x \in [2, 5]$

la funzione risulta positiva su $[2, 5]$ e quindi l'area da calcolare può essere ottenuta come

$$\int_2^5 \ln(x^2 + 1)\, dx.$$

Utilizzando una somma di Riemann, possiamo calcolarne un'approssimazione. Con $n = 6$, si ha $\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$ e $x_k = x_{k-1} + 0.5$ con $x_0 = 2$ Pertanto,

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \sum_{k=0}^{5} f(x_k) \cdot \Delta x \\
&= \sum_{k=0}^{5} f(x_k) \cdot 0.5 \\
&= f(2) \cdot 0.5 + f(2.5) \cdot 0.5 + f(3) \cdot 0.5 + f(3.5) \cdot 0.5 + f(4) \cdot 0.5 + f(4.5) \cdot 0.5 \\
&= 1.609 \cdot 0.5 + 1.981 \cdot 0.5 + 2.303 \cdot 0.5 + 2.584 \cdot 0.5 + 2.833 \cdot 0.5 + 3.056 \cdot 0.5 \approx 7.183
\end{aligned}$$

Per determinare l'errore commesso, è necessario risolvere l'integrale

$$\int_2^5 \ln(x^2 + 1)\, dx.$$

A tal fine, si procede integrando per parti, scegliendo $g'(x)$ =1 come fattore differenziale:

$$\int_2^5 \ln(x^2+1)\,dx = [x\ln(x^2+1)]_2^5 - 2\int_2^5 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

Effettuando la divisione tra polinomi,

$$[x\ln(x^2+1)]_2^5 - 2\int_2^5 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = [x\ln(x^2+1)]_2^5 - 2\int_2^5 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

e, per integrazione diretta,

$$\begin{aligned}[x\ln(x^2+1)]_2^5 - 2\int_2^5 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx &= [x\ln(x^2+1)]_2^5 - 2[(x-\arctan x)]_2^5 \\ &= [5\ln 26 - 2\ln 5] - 2[5-\arctan 5-(2-\arctan 2)] \\ &= \ln 26^5 - \ln 5^2 - 2(3-\arctan 5+\arctan 2) \\ &\approx 7.6041\end{aligned}$$

L'errore commesso è pari a

$$\begin{aligned}E &= \left|\int_2^5 \ln(x^2+1)\,dx - \sum_{k=0}^{5} f(x_k)\cdot 0.5\right| \\ &= |7.6041-7.183| \\ &= 0.4211\end{aligned}$$

In termini percentuali, l'errore commesso è pari a

$$E(\%) = \frac{0.421}{7.6041} \approx 5.54\%.$$