MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24
Corso di laurea di Economia Aziendale e Management
Università di Modena e Reggio Emilia

Fascicolo n. 6

Matematica finanziaria

- *Operazioni finanziari*
- *Operazioni finanziarie, capitale, montante*
- *Leggi e regimi finanziari (interesse semplice, composto, anticipato)*
- *Scindibilità*
- *Rendite. Valore di una rendita*
- *Leggi finanziarie a due variabili*
- *Piani di ammortamento (impostazione finanziaria e elementare; ammortamento italiano e francese)*
- *Valore attuale Netto e Tasso Interno di Rendimento*
- *Esercizi ed applicazioni*

1) Estratti da **Luciano E., Peccati L. (1997). *Matematica per la gestione finanziaria*. Editori Riuniti**
2) Appunti a cura del Prof. Carlo Alberto Magni

(si veda anche il “Vademecum” disponibile qui)

Prof. Carlo Alberto Magni

Università di Modena e Reggio Emilia

Matematica finanziaria

Docente: Carlo Alberto Magni
Revisione, integrazioni ed editing: Carlo Alberto Magni

1. Operazioni finanziarie. Contratti di prestito, capitale, montante

0:00:00 Intro
0:00:18 Operazioni finanziarie, flussi di cassa
0:12:36 Contratti di prestito e progetti di investimento
0:17:12 Capitale e montante
0:18:15 Outro

2. Capitale, montante, fattore di montante/sconto, valore attuale, interesse

0:00:00 Intro
0:00:16 Capitale, montante, interesse, fattore di montante
0:10:38 Valore attuale, sconto, fattore di sconto
0:16:31 Relazione tra capitalizzazione e attualizzazione, tra fattore di montante e fattore di sconto
0:31:04 Outro

3. Fattore di montante (continuazione), fattore di sconto. Regimi finanziari

0:00:00 Intro
0:00:17 Fattore di montante e fattore di sconto
0:02:26 Proprietà del fattore di montante
0:11:47 Tre tipologie di regimi finanziari
0:14:42 Outro

4. Regime dell'interesse semplice (I)

00:0:00 Intro
0:00:17 Regime dell'interesse semplice
0:07:15 Esercizi
0:20:45 Outro

5. Regime dell'interesse semplice (II). Regime dell'interesse composto (I)

0:00:00 Intro
0:00:17 Rappresentazione grafica del regime di interesse semplice e leggi finanziarie semplici
0:03:43 Formazione progressiva del montante e fattore di sconto
0:10:32 Regime dell'interesse composto
0:11:42 Formazione progressiva del montante
0:17:53 Rappresentazione grafica del regime di interesse composto
0:19:36 Fattore di sconto ed esempio
0:24:35 Outro

6. Regime dell’interesse composto (II)

00:0:00 Intro
0:00:18 Esercizi in capitalizzazione composta
0:14:32 Leggi finanziarie composte
0:18:21 Outro

7. Regime dell’interesse anticipato (sconto commerciale)

0:00:00 Intro
0:00:20 Regime dell'interesse anticipato (sconto commerciale)
0:16:22 Condizioni d'uso del regime di interesse anticipato e rappresentazione grafica
0:25:18 Riepilogo ed esempi
0:30:02 Esercizio (proposta)
0:30:43 Outro

ERRORE IN 0:10:00 Non è 10%*1000=10, ma 10%*1000=100. L'ammontare effettivamente è comunque corretto: 900 = 1000 - 100

8. Tasso effettivo di interesse. Conversione di tassi (interesse semplice e anticipato)

0:00:00 Intro
0:00:14 Tasso effettivo di interesse
0:19:20 Tasso effettivo di sconto
0:32:29 Equivalenza tra leggi finanziarie: regime dell'interesse semplice
0:52:30 Equivalenza tra leggi finanziarie: regime dell'interesse anticipato
1:09:11 Outro

ERRORE IN 0:30:42
Non è $92.8571 = 10\% \cdot C_0$ ma $\frac{92.8571}{1+0.1\cdot 3} = C_0$. Pertanto, non è $C_0 = 982.571$ bensì $C_0 = 71.4285$

9. Equivalenza tra leggi finanziarie (interesse composto)

0:00:00 Intro
0:00:18 Equivalenza tra leggi finanziarie: regime dell'interesse composto
0:17:30 Esercizi su conversione di tassi
0:34:08 Tasso annuo nominale
0:54:25 Outro

10. Capitalizzazione continua, intensità istantanea di interesse. Rendite, valore di una rendita

0:00:00 Intro
0:00:19 Capitalizzazione continua
0:17:39 Capitalizzazione continua (esercizio)
0:22:35 Rendite
0:34:55 Valutazione di una rendita: valore attuale e montante
0:56:58 Valutazione di una rendita: valore ad un'epoca intermedia
1:07:31 Outro

11. Scindibilità di una legge finanziaria

0:00:00 Intro

0:00:21 Scindibilità (definizione)
0:06:11 Regime di interesse semplice
0:09:12 Regime di interesse anticipato
0:12:21 Regime di interesse composto
0:15:02 Riepilogo
0:15:34 Ambiguità di una legge finanziaria non scindibile
0:37:03 Regime di interesse continuo
0:43:07 Outro

12. Classificazione delle rendite. Valutazione con interesse composto e con interesse anticipato

0:00:00 Intro
0:00:17 Classificazione di rendite
0:12:04 Valore di una rendita con regime di interesse semplice
0:20:09 Valore di una rendita con regime di interesse composto
0:32:28 Valore di una rendita con regime di interesse anticipato
0:47:32 Utilità della scindibilità per la valutazione delle rendite
0:49:28 Outro

13. Rendita a rata costante. Leggi finanziarie a due variabili (I)

0:00:00 Intro
0:00:19 Rendite a rata costante
0:04:40 Dimostrazione formula valore attuale
0:10:11 Uso della scindibilità per il calcolo del valore attuale di una rendita
0:24:53 Valutazione di rendite con regime non scindibile
0:31:45 Leggi finanziarie a due variabili - Regime di interesse semplice
0:51:46 Domanda su fattore di montante
0:52:17 Risposta (refuso: è 1,1036 non 1,1336)
0:52:40 Outro

13-bis. Valore attuale di una rendita immediata posticipata a rata costante

0:00:00 Intro
0:00:10 Enunciazione della formula del valore attuale
0:00:45 Dimostrazione
0:08:34 Quod erat demonstrandum
0:08:43 Outro

14. Leggi finanziarie a due variabili (II). Piano di ammortamento di un prestito

0:00:00 Intro
0:00:18 Leggi a due variabili (regime di interesse anticipato)
0:10:22 Leggi a due variabili (regime di interesse composto)
0:36:13 Rimborso di un prestito, piano di ammortamento (esempio preliminare)
0:39:10 Tasso di interesse implicito: DOMANDA
0:40:46 Tasso di interesse implicito: RISPOSTA
0:44:02 Rimborso di un prestito, piano di ammortamento (relazioni fondamentali)
0:49:21 Relazione logica tra conto corrente e prestito
0:51:15 Legge del moto e piano di ammortamento
1:10:02 Condizioni di chiusura di un piano di ammortamento
1:11:05 Condizione di chiusura elementare: DOMANDA
1:11:56 Condizione di chiusura elementare: RISPOSTA
1:22:38 9 modi per dire "debito"
1:38:46 Outro

15. Ammortamento di un prestito (impostazione finanziaria/elementare, francese/italiano)

0:00:00 Intro
0:00:16 Piano di ammortamento (impostazione finanziaria ed elementare)
0:38:16 Ammortamento francese e italiano
0:58:52 Prestiti a tasso variabile
1:07:17 Piano di ammortamento su Excel
1:18:55 Outro

15-bis. Ammortamento di un prestito: ammortamento bullet

00:00:00 Intro
00:00:22 Descrizione dell'ammortamento bullet
00:09:39 Ammortamento bullet su Excel
00:14:35 Outro

16. Valutazione di investimenti: Valore Attuale Netto, Tasso Interno di Rendimento

0:00:00 Intro
0:00:19 Progetti
0:08:04 Criterio di accettabilità e valore di un progetto
0:23:32 Valore Attuale Netto (VAN)
0:35:28 Riepilogo VAN
0:39:10 Scelta tra investimenti (Criterio del VAN)
0:59:03 Tasso Interno di Rendimento (TIR)
1:14:10 Esempio TIR
1:20:04 Problemi del TIR (unicità, natura finanziaria)
1:26:44 Problemi del TIR (esistenza, COC variabile)
1:29:34 Problemi del TIR (incompatibilità tra TIR e VAN)
1:33:40 Outro

17. Esercizi su decisioni di investimento: VAN e TIR

0:00:00 Intro
0:00:16 Calcolo del TIR
0:09:23 Progetto finanziato da debito - determinazione VAN
0:18:22 Progetto finanziato da debito - determinazione costo del capitale
0:28:04 Scelta tra due investimenti
0:33:12 VAN di progetto finanziato da debito
0:41:08 Flusso di cassa terminale
0:49:13 Scelta tra investimenti - Tasso minimo di investimento
0:56:56 SALUTI DI FINE CORSO
0:57:30 Bonus track (determinazione del costo del capitale)
1:01:59 Outro + Credits + Sylvester

ERRORE in 0:04:01
Nella soluzione dell'equazione quadratica è -80 (non $+80$)

ERRORE in 1:00:53
Il VAN (=150) deve essere moltiplicato per $(1+r)^2$

ERRORE in 1:01:14
Il terzo addendo è 800, non 80

Elisa Luciano
Lorenzo Peccati

Matematica per la gestione finanziaria

1997

Indice

Premessa 1

Matematica per la gestione finanziaria

1 **Capitalizzazione e attualizzazione** 1
1.1. Introduzione 1
1.2 Capitalizzazione e attualizzazione 4
1.3 Regimi finanziari usuali 8
1.4 Regimi usuali di attualizzazione 34
1.5 Equivalenze tra tassi e tra leggi 51
1.6 Non arbitraggio (scindibilità) 73
1.7 Tassi variabili nel tempo 77

2 **Calcoli su rendite** 121
2.1 Uso di leggi esponenziali 125

3 **Applicazioni aziendali classiche** 143
3.1 Nozioni, usi e tecniche di costruzione di piani di ammortamento 143

1

Capitalizzazione e attualizzazione

1.1 Introduzione

(a)
Consideriamo in questo volume operazioni di scambio tra somme di danaro disponibili in epoche diverse.

Le concrete situazioni in cui si osservano queste operazioni, che diremo nel seguito *operazioni finanziarie* (abbreviato spesso in o.f.) sono moltissime:

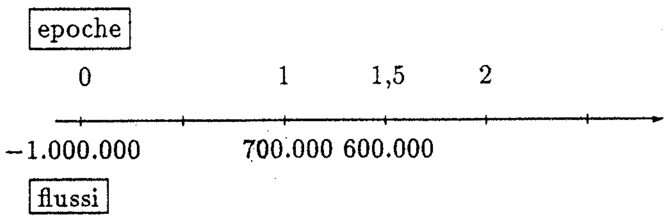
- depositando danaro su un c/c bancario da cui si preleveranno capitale e interessi si scambia il versamento odierno con una disponibilità utilizzabile in futuro;
- comprando oggi BOT, che si rivenderanno tra un mese, si scambia la somma oggi investita con il ricavo dalla vendita tra un mese;
- stipulando oggi un mutuo con rimborso graduale (a rate) si scambia la disponibilità che oggi si riceve per effetto del contratto di mutuo con i versamenti che si faranno alle scadenze convenute;
- stipulando oggi un acquisto di un'autovettura con pagamento rateale si scambia la somma ricevuta subito in natura (valore della macchina) con le rate che si verseranno alle scadenze dovute;
- per una società di *leasing* la stipulazione di un contratto di *leasing* può vedersi come lo scambio tra il valore di fornitura, versato oggi contro canoni e valore di riscatto che saranno pagati dal cliente in epoche successive.

Naturalmente quelli presentati sono solo alcuni di una sterminata famiglia di esempi di operazioni finanziarie quotidianamente gestite nelle aziende.

La descrizione di un'operazione finanziaria si può fare utilmente associando alle varie scadenze nelle quali si hanno movimenti di cassa gli ammontari di tali movimenti di cassa. Di norma le scadenze si misurano in anni e gli ammontari in entrata sono dotati di segno "+" (eventualmente omesso), mentre quelli in uscita di segno "−". Per es., per descrivere un'o.f. consistente nell'esborso immediato di 1.000.000 a fronte della riscossione di 700.000 tra 1 anno e di 600.000 tra un anno e mezzo, si può usare la seguente tabella:

Scadenza	Flusso di cassa
0	−1.000.000
1	700.000
1,5	600.000

Frequentemente useremo anche una rappresentazione geometrica come la seguente:



(b)
Analoghe rappresentazioni tabellare e grafica si possono naturalmente fare anche se l'unità di misura prescelta per il tempo non fosse l'anno.

Nel caso di una vendita rateale, con cadenza mensile dei versamenti del cliente potrebbe esser naturale misurare il tempo in mesi.

Se, per es., a fronte di un netto finanziato di L. 7.000.000 il cliente d'una società finanziaria dovesse versare mensilmente L. 385.861 per 23 mesi, cominciando due mesi dopo la firma del contratto si potrebbe raffigurare l'o.f. per la società affidante come segue:

Scadenza	Flusso di cassa
0	−7.000.000
1	0
2	385.861
3	385.861
4	385.861
⋮	⋮
24	385.861

misurando il tempo in mesi. Misurandolo in anni la tabella sarebbe, per contro, la seguente:

Scadenza	Flusso di cassa
0	−7.000.000
1/12	0
2/12	385.861
3/12	385.861
4/12	385.861
⋮	⋮
24/12	385.861

del tutto analoga, salvo il fatto che i numeri usati per scandire le epoche di movimenti di cassa sono divisi per 12. In effetti il mese è il "nome volgare" del "dodicesimo di anno":

$$5 \text{ mesi} = 5 \text{ dodicesimi di anno} = 5 \times 1/12 \text{ anni} = 5/12 \text{ anni}$$

(c)
Per descrivere un'o.f. basta assegnare delle coppie di numeri:

(scadenza, flusso di cassa)

in generale simboleggiate con scritture del tipo:

$$(t_s, x_s) \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

ove t_s, in un'appropriata unità di misura (generalmente l'anno), è la scadenza alla quale si manifesta il flusso di cassa x_s (con segno: valori positivi segnalano entrate, negativi uscite).

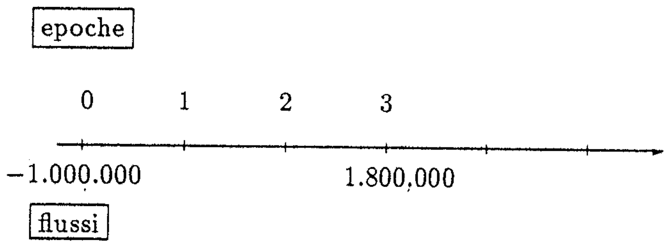
La generica rappresentazione tabellare di un'o.f. è la seguente:

Scadenza	Flusso di cassa
t_0	x_0
t_1	x_1
t_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$
t_n	x_n

1.2 Capitalizzazione e attualizzazione

(a)

Consideriamo un'operazione semplicissima, caratterizzata da due soli flussi di cassa, con scadenze rispettive, supponiamo, 0 e 3. I due flussi siano $-1.000.000$ e $1.800.000$, rispettivamente:



Quest'operazione può essere letta in due modi logicamente complementari:

- come *operazione di capitalizzazione*: investendo oggi 1.000.000 ci ritroviamo tra tre anni 1.800.000, cosicché l'impiego finanziario non fa altro che "portare avanti" di tre anni il milione che investiamo, la differenza

$$1.800.000 - 1.000.000 = 800.000$$

si chiama *interesse* prodotto in 3 anni dalla somma 1.000.000;

- come *operazione di attualizzazione*: possiamo pagare oggi 1.000.000 per acquisire il diritto a riscuotere 1.800.000 tra tre anni, cosicché l'operazione finanziaria non fa altro che "portare indietro" nel tempo la somma di 1.800.000, che oggi vale solo 1.000.000, la differenza

$$1.800.000 - 1.000.000 = 800.000$$

si chiama *sconto* da dedurre dalla somma di 1.800.000 scadente fra 3 anni.

Non sono necessariamente punti di vista di soggetti diversi, possono benissimo essere punti di vista dello stesso soggetto. Per es. una banca che sconti ad un cliente un effetto di 1.800.000 a tre anni riconoscendogli un netto ricavo di 1.000.000 può vedere l'operazione di sconto sia come operazione di capitalizzazione (investe 1.000.000 di valore attuale oggi per riscuotere il valor nominale di 1.800.000 tra tre anni) sia come operazione di attualizzazione (riconosce al cliente 1.000.000 oggi come valore attuale di 1.800.000 che scadono fra tre anni).

Nel caso della prima interpretazione il rapporto tra l'ammontare a scadenza e l'ammontare oggi è detto *fattore di montante*, l'ammontare a scadenza è detto *montante* e la somma inizialmente impiegata è detta *capitale*. Nel caso della seconda interpretazione la somma a scadenza è detta *valore nominale*, mentre il suo equivalente oggi è detto *valore scontato* o (meno propriamente, ma più comunemente) *valore attuale*.

L'operazione sopra introdotta può allora descriversi come segue:

> "1.800.000 è il montante del capitale di 1.000.000 tre anni dopo, il fattore di montante si ottiene rapportando 1.800.000 a 1.000.000 e ci dice che cosa diventa dopo tre anni ciascuna lira investita";
>
> "1.000.000 è il valore scontato del valore nominale di 1.800.000 scadente tra tre anni, il rapporto tra 1.000.000 e 1.800.000 ci dice quanto vale oggi una lira che scade tra tre anni".

In entrambe le interpretazioni abbiamo tenuto a chiarire che la relazione tra capitale e montante nel primo caso e tra valore nominale e valore scontato nell'altro debbono essere preferibilmente pensate in termini di rapporto piuttosto che in termini di somma. Anche se per tutti è naturale pensare a:

$$\text{montante} = \text{capitale} + \text{interessi} \tag{1.1}$$

o a:

$$\text{valore scontato} = \text{valore nominale} - \text{sconto} \tag{1.2}$$

è opportuno abituarsi a pensare in termini alternativi:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times \text{fattore di montante} \tag{1.3}$$

e:

$$\text{valore scontato} = \text{valore nominale} \times \text{fattore di sconto} \tag{1.4}$$

(b)
Per l'o.f. descritta:

- capitale = 1.000.000; montante = 1.800.000;
- fattore di montante = 1.800.000/1.000.000 = 1,8;
- interesse = 800.000.

Valgono le due relazioni (1.1) e (1.3), vedendo invece l'operazione come operazione di attualizzazione si ha:

- valore nominale = 1.800.000; valore scontato = 1.000.000;
- fattore di sconto = 1.000.000/1.800.000 = 0,555...;
- sconto = 800.000.

Valgono, in generale, le relazioni (1.2) e (1.4).
(c)
Se:

- C = capitale
- M = montante
- I = interesse
- f = fattore di montante

si ha:

$$M = Cf$$
$$M = C + I$$

Si ha anche, per l'interesse:

$$I = M - C \; ; \; I = C(f-1)$$

per il capitale:

$$C = M/f \; ; \; C = M - I$$

e per il fattore di montante:

$$f = M/C \; ; \; f = 1 + I/C$$

Se:

- S = valore nominale
- A = valore attuale
- D = sconto (D come *Discount*)
- ϕ = fattore di sconto

si ha:

$$A = S\phi$$
$$A = S - D$$

Si ha anche:

$$D = S(1-\phi)$$

e, per il fattore di sconto:

$$\phi = A/S \; ; \; \phi = 1 - D/S$$

Quando si vuole segnalare che i fattori di montante e di sconto sono funzione della durata dell'operazione di capitalizzazione o di attualizzazione si indicano, rispettivamente, con $f(t)$ e $\phi(t)$ ove t è tale durata.

Nell'esempio proposto, vista la durata triennale dell'operazione, i due fattori coinvolti dovranno essere indicati con $f(3)$ e $\phi(3)$, beninteso se si misura il tempo in anni.

1.3 Regimi finanziari usuali

(a)

S'è visto nel par. precedente che il punto di partenza del calcolo finanziario si regge su due formule semplicissime che consentono di ottenere il montante dal capitale ed il valore scontato da quello nominale moltiplicando per un fattore di montante nel primo caso, per un fattore di sconto nel secondo. In chiusura di paragrafo si è fatto notare come, a parità di ogni altra condizione, ci si deve aspettare che i due fattori (di montante e di sconto) dipendano dalla durata dell'investimento. Nella pratica, infatti, operazioni del tipo menzionato sono regolate da fattori che dipendono dal tempo secondo alcune formule matematiche. Queste formule, in gergo finanziario, si chiamano *regimi finanziari* (di capitalizzazione o di attualizzazione) e contengono non soltanto il tempo, ma anche altri parametri che, in sostanza, regolano la velocità con cui, nella capitalizzazione, il montante cresce con il passare del tempo e, nell'attualizzazione, la pesantezza della contrazione del valor nominale in valore scontato all'allontanarsi della scadenza. Quando in un regime, cioè in una formula, si sia specificato numericamente il valore del parametro, la formula matematica consente di capitalizzare o attualizzare univocamente per qualsiasi scadenza. Tale "formula con parametro precisato" si dice *legge finanziaria* (rispettivamente di capitalizzazione o di attualizzazione).

Crediamo sia chiaro, a questo punto, che, per precisare inequivocabilmente le condizioni di stipulazione di qualunque contratto finanziario, bisogna individuare due cose:

(a) La "formula" da usare, cioè quali calcoli vadano fatti. In termini più tecnici: qual è il regime finanziario adottato;

(b) Il valore numerico del tasso da adottare, giungendo così attraverso il regime finanziario prescelto ad individuare la legge finanziaria che regge un determinato contratto.

Poiché spesso, nella pratica, o l'uno o l'altro degli ingredienti è ritenuto fissato per convenzione si possono presentare sgradevoli situazioni di ambiguità, purtroppo frequenti nella pratica. Ne citeremo alcune:

- gli "interessi legali", ripetutamente citati nel codice civile, si calcolano a tasso[1] 5%, ma il Legislatore non precisa se con la formula degli interessi semplici o con quella degli interessi composti: esistono sentenze sia in linea con la prima precisazione, sia con la seconda;
- il più accreditato progetto di disciplina del *leasing*, attualmente (e chissà per quanti anni) all'esame del Parlamento, prevede, per il caso di risoluzione, che il debito del cliente sia calcolato attualizzando a sconto composto (quindi con un regime ben determinato) i futuri versamenti dedotti dal contratto, ma il legislatore (proponente) dimentica di precisare a quale tasso il calcolo sarà da fare e non resta così individuata la legge finanziaria da usare;
- una certa parte del "contenzioso storico" connesso all'attività di vendita rateale è legato al fatto che l'enunciazione di un tasso non accompagnata dall'esplicitazione di una formula di uso corrente fa sì che il cliente di una società finanziaria pensi a regimi di capitalizzazione quali quello degli interessi semplici o degli interessi composti. Si vedrà oltre che la formula di capitalizzazione detta "a interessi semplici anticipati", di uso piuttosto diffuso, almeno prima di recenti recepimenti di normative comunitarie, ha un fondamento finanziario precisissimo e solido, che non è però lo stesso dei regimi di capitalizzazione più comuni: l'indicazione di un tasso senza l'enfasi

[1] Il livello del 5% è, in un certo senso, "storico". Per qualche anno s'è usato il 10% in relazione con gli elevati tassi che hanno caratterizzato l'attività finanziaria nel nostro Paese. Ora, con l'abbassamento generalizzato dei tassi, siamo ritornati al 5%.

sulla formula porta ad un'ambiguità ineliminabile perché per precisare una legge finanziaria non basta dire quanto vale il tasso, ma bisogna anche indicare qual è la formula in cui tale tasso va messo, quali sono, cioè, i calcoli da fare.

Ci proponiamo di passare in rassegna nel n. 1.3.2 le più comuni formule impiegate per il calcolo di montanti: a interessi semplici, a interessi composti e a interessi semplici anticipati, mentre nel n. 1.3.3 ci occuperemo dei tre più comuni procedimenti di attualizzazione: lo sconto razionale, lo sconto composto e lo sconto commerciale.

Riserveremo i nn. successivi all'approfondimento di problemi particolari.

(b)

Elementarmente: gli interessi semplici su 1.000.000, impiegato per t anni a tasso i (per es. $t = 3$ per un impiego di tre anni e $i = 10\% = 10/100 = 0,1$ se il tasso d'interesse è dieci per cento[2]) si ottengono moltiplicando il milione per tasso e per tempo:

$$\text{interessi} = 1.000.000 \times i \times t = 1.000.000it$$

il montante risulta allora:

$$\begin{aligned}\text{montante} &= 1.000.000 + \text{interessi} = 1.000.000 + 1.000.000it = \\ &= 1.000.000 \times (1 + it)\end{aligned}$$

La struttura della formula è chiara:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times (1 + it)$$

Il fattore $(1 + it)$, a secondo membro, è il *fattore di montante*, esprime, all'interno di questa convenzione di calcolo (di questo regime finanziario) il montante di una lira dopo t anni a tasso i: in effetti, se il capitale impiegato valesse 1 il montante varrebbe proprio $(1 + it)$.

[2]Rammento per i meno domestici con le percentuali che % sta, semplicemente, per 1/100. Per es.: $30\% = 30 \times 1/100 = 0,3$.

Orbene in questo fattore di montante non compare soltanto il tempo t, ma anche il parametro i che governa la velocità di formazione degli interessi. Quando si usa la formula $(1 + it)$ si dice che si lavora nell'ambito del *regime finanziario* degli *interessi semplici*. Tale formula indica quali calcoli siano richiesti dalla determinazione del montante, ma non ne consente l'effettiva individuazione perché contiene una lettera (i, il tasso) cui va dato un preciso valore numerico. Se precisassimo che il tasso d'interesse i vale 10% ($i = 0,1$) e se sostituissimo nella formula al simbolo i il suo valore numerico otterremmo $(1 + 0,1t)$, fattore di montante che caratterizza non più un regime di capitalizzazione ma la *legge* di capitalizzazione degli interessi semplici a tasso 10%. Questa legge di capitalizzazione consente di calcolare il montante di qualunque capitale per qualunque durata t dell'impiego come segue:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times (1 + 0,1t)$$

Resta così precisata, come sopra si scriveva, una legge di capitalizzazione.

(c)

Sopra suggerimmo di indicare fattore di montante e fattore di sconto con scritture del tipo:

$$f(t) \quad ; \quad \phi(t)$$

per evidenziare la dipendenza di tali rapporti dalla durata dell'operazione considerata. Ora possiamo precisare ulteriormente la proposta suggerendo di esplicitare la loro dipendenza anche da un parametro (generalmente con la natura di tasso), con scritture del tipo:

$$f(t,\alpha) \quad ; \quad \phi(t,\beta)$$

dove α, β sono parametri usualmente aventi la natura di tassi. Tali fattori sono funzione di due variabili: tempo e tasso.

I simboli $f(t,\alpha)$ e $\phi(t,\beta)$ dicono quali calcoli vadano fatti sulla durata (t) e sul parametro (α o β, a seconda dei casi) per avere il fattore (di montante o di sconto). Queste formule caratterizzano dunque regimi finanziari. Fissando in tali formule il valore dei parametri. Per es., sia: $\alpha = \alpha^*, \beta = \beta^*$ dove α^* e β^* sono valori dei parametri ben determinati; le espressioni:

$$f(t,\alpha^*) \;;\; \phi(t,\beta^*)$$

che ora non sono più funzioni di due variabili ma di una sola (il tempo t), caratterizzano leggi finanziarie (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione).

Così, fissando $\alpha = 10\% = 0,1$, si specifica, all'interno del regime caratterizzato da $f(t,\alpha)$, la legge caratterizzata da $f(t;0,1)$ che dà, durata t per durata t il rapporto di scambio tra il montante dopo t anni di impiego e l'ammontare impiegato.

1.3.1 Regimi usuali di capitalizzazione

Introduzione

Esaminiamo quali sono le formule più comunemente adottate per fare i calcoli di interessi e montanti. Come sopra annunciato, considereremo i tre regimi fondamentali:

- degli interessi semplici;
- degli interessi composti;
- degli interessi (semplici) anticipati;

esaurendo così gran parte dei casi che nella pratica comunemente si presentano.

Interessi semplici

(a)

Gli *interessi semplici* si definiscono come quelli proporzionali al capitale e al tempo d'impiego. "proporzionali" vuol dire che raddoppiando il capitale gli interessi si raddoppiano, triplicando il capitale si triplicano, raddoppiando il tempo si raddoppiano, triplicando il tempo si triplicano, ecc.. In sostanza nel loro calcolo sia il capitale sia il tempo devono entrare moltiplicativamente.

Se si considera un cartellone pubblicitario rettangolare per il quale:

$$\text{area} = \text{base} \times \text{altezza}$$

è evidente che il costo del materiale che in esso entra si raddoppia, si triplica, ecc. al raddoppiarsi, triplicarsi, ecc. sia della base sia

dell'altezza. Il suo costo, in effetti, si otterrà (se base e altezza sono misurate in metri) con una formula del tipo:

$$\text{costo totale} = \text{base} \times \text{altezza} \times \text{costo al m}^2$$

in cui, come si vede, base ed altezza entrano come fattori in una moltiplicazione ove rintracciamo un terzo fattore (il costo al m^2) che si chiama ***costante di proporzionalità.***

Anche nel caso degli interessi semplici s'intravede questa doppia relazione di proporzionalità d'una grandezza (l'interesse) a due altre grandezze (capitale e durata dell'impiego). Pertanto ci si deve aspettare una formula del tipo:

$$\text{interesse} = \text{capitale} \times \text{tempo} \times \text{costante}$$

Si noti che se il capitale fosse d'una lira e la durata dell'impiego di un anno l'interesse risulterebbe pari alla costante, che si lascia allora interpretare come interesse prodotto da una lira in un anno. Tale costante si merita allora in pieno l'appellativo di *tasso di interesse*. La regola di formazione degli interessi semplici è allora molto... semplice:

$$\text{interesse} = \text{capitale}\times\text{tempo}\times\text{tasso}$$

Se, per es., si vogliono calcolare gli interessi semplici su un capitale di 1.000.000 a tasso 10% per 3 anni, le operazioni aritmetiche da eseguire sono le seguenti:

$$\text{interesse} = \underset{\substack{\text{capitale}\\\downarrow}}{1.000.000} \times \underset{\substack{\text{tempo}\\\downarrow}}{3} \times \underset{\substack{\text{tasso}\\\downarrow}}{10/100} = 300.000$$

Volendo il montante, da:

$$\text{montante} = \text{capitale} + \text{interesse}$$

si trae:

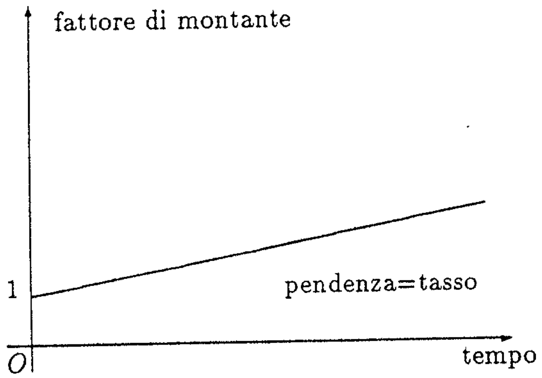
$$\begin{aligned}\text{montante} &= \text{capitale} + \text{capitale} \times \text{tempo} \times \text{tasso}\\ &= \text{capitale} \times (1 + \text{tempo} \times \text{tasso})\end{aligned}$$

l'espressione (1 + tempo × tasso), da moltiplicare per il capitale per avere il montante, o, se si preferisce, il rapporto tra montante e capitale:

$$\text{montante/capitale} = (1 + \text{tempo} \times \text{tasso})$$

è il *fattore di montante con interessi semplici.*

Si può rappresentare graficamente come tale fattore dipende dal tempo:

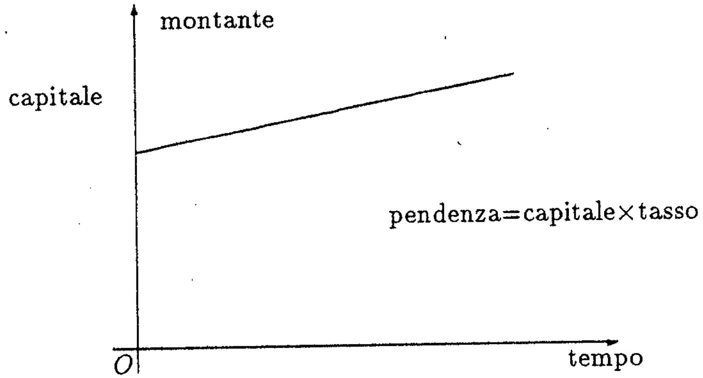


La retta nel grafico mostra come il montante di una lira cresca linearmente nel tempo con pendenza pari al tasso.

Analogamente si potrebbe rappresentare l'andamento nel tempo del montante di un generico capitale: si otterrebbe di nuovo un andamento rettilineo con pendenza pari al prodotto:

$$\text{capitale} \times \text{tasso}$$

pari, cioè, all'interesse annuo e con ordinata all'origine (ossia l'altezza da cui si parte all'inizio) pari al capitale investito:



(b)

E' evidente che la semplice regola di calcolo degli interessi si può applicare anche al caso di durate di impiego non intere, a patto di usare per il tempo numeri non interi.

Se, per es., desideriamo calcolare gli interessi su un capitale di 1.000.000 al 10% per 45 giorni, basta che determini quale frazione dell'anno sono 45 giorni.

Se l'anno contiene 365 giorni in tutto, la frazione d'anno corrispondente a 45 giorni è, ovviamente, 45/365, cosicché gli interessi risultano:

$$1.000.000 \times 10/100 \times 45/365 \simeq 12.328,76$$

Quando si considera per l'anno la durata di 365 giorni si dice che si usa l'*anno civile*. I risultati non sarebbero molto diversi considerando l'*anno commerciale*, fatto di soli 360 giorni. Un tempo, facendo calcoli a mente o a mano, era preferibile dividere per 360 piuttosto che per 365. Ora non v'è più motivo di accollarsi l'imprecisione che ne scaturisce, anche se la prassi, fino a pochissimo tempo fa era molto usata (soprattutto se conveniva). Infatti, dividendo per 360 gli interessi risultano lievemente più elevati. Se ciò poteva essere irrilevante per il singolo che li pagava, poteva non esserlo affatto per chi giocasse sulla differenza con riferimento ad elevati volumi di operazioni finanziarie (una banca, una società finanziaria). Nell'esempio di cui sopra la differenza sarebbe da calcolare tra 12.328,76 e:

$$1.000.000 \times 10/100 \times 45/360 = 12.500$$

ed è quindi in termini assoluti di sole 171,24 lire (molto meno di un caffè). Si rifletta però sul fatto che in rapporto a un miliardo, anche solo per impieghi di durata di 45 giorni la differenza è dell'ordine di 171.240 lire (e sono più di cento caffè: per alcuni già troppi in solo 45 giorni). Se poi, sempre sul miliardo, si pensa alla conseguenza annuale dell'impiego sistematico della convenzione si ottiene una differenza di:

$$1.000.000.000 \times 10/100 \times (365/360 - 365/365) = 1.388.889$$

che è, all'incirca, lo stipendio mensile di certi operai.

Un'impietosa valutazione di qualche anno fa poneva attorno al 60% dell'utile d'esercizio dei principali istituti di credito del Paese il contributo della convenzione di calcolo adottata dalle stesse: dividere per 360 quando si calcolano interessi attivi e per 365 quando calcolavano interessi passivi.

Alcune disposizioni legislative del 1992 in tema di "trasparenza bancaria" rigidamente fissano le regole di calcolo a questo proposito, almeno con riferimento alle aree disciplinate dalla legge. Nel complesso queste norme dovrebbero garantire correttezza dei calcoli finanziari nell'interesse della parte "debole" di un contratto. Altri aspetti di questa normativa introducono peraltro innovazioni che possono risultare di svantaggio per la parte "debole". Ci riferiamo all'obbligo di effettuare separate operazioni di versamento di valori che hanno disciplina giuridica differente, con conseguente moltiplicazione delle commissioni fisse per ogni operazione. Riferiremo su questi argomenti più sistematicamente in un apposito capitolo.

(c)

Quanto s'è appena visto può tradursi facilmente in linguaggio algebrico. Indicando con C il capitale investito, con M il montante dell'impiego, con I l'ammontare degli interessi e con t la durata dello stesso (in anni), si ha che la proporzionalità degli interessi sia al capitale C sia alla durata t porta ad una relazione del tipo seguente:

$$I = Ct\alpha$$

ove α è una costante di proporzionalità. Per impieghi unitari ($C = 1$) di durata unitaria ($t = 1$) riesce:

$$I = 1 \times 1 \times \alpha = \alpha$$

e quindi la costante di proporzionalità appare essere l'interesse prodotto da una lira nel primo e unico anno d'impiego che gli fa meritare la denominazione di *tasso annuo unitario d'interesse*. Denotando evocativamente tale tasso con la lettera i, l'espressione degli interessi diviene:

$$I = Cit$$

Da questa si deducono le "formule inverse" per tasso e tempo:

$$i = \frac{I}{Ct} \; ; \; t = \frac{I}{Ci}$$

Qualora il tempo fosse espresso in numero di mesi (m) o di giorni (g), lavorando con un tasso annuo (i) l'espressione degli interessi diverrebbe:

$$I = \frac{Cim}{12} \quad \text{(tempo in mesi)}$$

$$I = \frac{Cig}{365} \text{ o } I = \frac{Cig}{360} \text{ (tempo in giorni)}$$

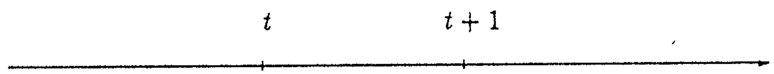
e si otterrebbero analoghe "formule inverse", che lasciamo allo zelo del lettore.

Dalla relazione scritta sopra ($I = Cit$), tenendo conto della definizione di interesse ($I = M - C$), si trae:

$$M = C + I = C + Cit = C(1 + it)$$

da cui appare chiaramente che il fattore di montante a interessi semplici è $f(t) = (1 + it)$.

Un'ultima osservazione: consideriamo un periodo annuale di impiego di una lira che non necessariamente sia il primo anno. Siano t e $(t + 1)$ le epoche iniziale e finale (rispettivamente) di tale periodo:



Dopo t anni (t non necessariamente intero, potrebbe essere anche $t = 3,7$) il montante dell'impiego di una lira è $f(t)$, dopo $t+1$ anni il montante riesce $f(t+1)$, cosicché la differenza:

$$f(t+1) - f(t)$$

può essere legittimamente imputata agli interessi prodotti da una lira in quell'anno (tra le epoche t e $t+1$). Tale differenza risulta:

$$f(t+1) - f(t) = [1 + i(t+1)] - (1 + it) = i$$

segue a questo che i non è solo l'interesse prodotto da una lira nel primo anno di impiego di un capitale unitario, ma anche l'interesse prodotto da ogni lira in ogni anno di impiego di un capitale unitario. Vedremo che questa proprietà non è posseduta da altri regimi, ma è un *"comfort"* esclusivo offerto dal regime della capitalizzazione semplice.

Interessi composti

(a)

E' naturale l'impiego della capitalizzazione semplice quando tra due parti di un contratto finanziario viene predeterminata la durata dell'operazione. Quando, per contro, tale durata non è predeterminata ed è generalmente a discrezione di una delle parti, e questa è la regola a causa di generali possibilità di risoluzione del contratto finanziario per vari motivi, appare in tutta la sua importanza la clausola nota come di *capitalizzazione degli interessi*: si suddivide il periodo di tempo dell'impiego in periodi, generalmente della stessa durata, spesso annuali, ed alla fine di ciascuno dei periodi vengono computati gli interessi relativamente a quel periodo. Tali interessi sono immediatamente trasformati in capitale — si parla, infatti, di capitalizzazione degli interessi — e già dal periodo successivo cominciano, a loro volta, a produrre interessi.

Si consideri, per fissare le idee, un impiego di un capitale di 1.000.000 per tre anni. Dopo sei mesi sia fissata la prima epoca di capitalizzazione, dopo altri 12 mesi la seconda e dopo altri 12 mesi la terza. Il tasso d'interesse sia del 10%. La clausola di capitalizzazione conduce ai seguenti semplicissimi calcoli:

- interesse dopo i primi 6 mesi:

$$1.000.000 \times 10/100 \times 6/12 = 50.000$$

- capitale dopo i primi 6 mesi:

$$1.000.000 + 50.000 = 1.050.000$$

- interesse dopo altri 12 mesi:

$$1.050.000 \times 10/100 \times 1 = 105.000$$

- capitale dopo i primi 18 mesi:

$$1.050.000 + 105.000 = 1.155.000$$

- interesse dopo altri 12 mesi:

$$1.155.000 \times 10/100 \times 1 = 115.500$$

- capitale dopo 30 mesi:

$$1.155.000 + 115.500 = 1.270.500$$

- interessi negli ultimi 6 mesi:

$$1.270.500 \times 10/100 \times 6/12 = 63.525$$

- capitale finale:

$$1.270.500 + 63.525 = 1.334.025$$

Si noti che senza clausola di capitalizzazione il montante sarebbe riuscito inferiore:

$$1.000.000 \times (1 + 3 \times 10/100) = 1.300.000$$

Particolare interesse merita il caso speciale in cui:

- le epoche di capitalizzazione sono equidistanti, con distanza annuale tra l'una e la successiva;

- la prima epoca cade esattamente un anno dopo l'inizio dell'operazione.

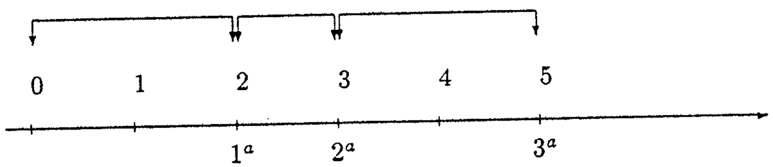
In tal caso il montante si ottiene direttamente con questa formula:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times (1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

Per esempio, sempre impiegando un milione a interessi composti, tasso 10% per tre anni, con capitalizzazione degli interessi dopo uno, due e tre anni dall'inizio dell'impiego, il montante risulta:

$$1.000.000 \times (1 + 10/100)^3 = 1.331.000$$

(b)
Conviene pensare il calcolo degli interessi composti fatto per ricorrenza da epoca di capitalizzazione a epoca di capitalizzazione che supponiamo, nell'ordine, dopo due, tre e cinque anni dall'inizio dell'impiego:



epoche di capitalizzazione

Il montante ad un'epoca di capitalizzazione si ottiene da quello alla precedente epoca di capitalizzazione moltiplicandolo per il fattore di montante (a interessi semplici) relativo al periodo intercorrente tra le due epoche di capitalizzazione:

$$\text{montante a fine periodo} =$$

$$= \text{montante a inizio periodo} \times \text{fattore di montante}$$

così, con riferimento allo schema di epoche di capitalizzazione indicato nell'esempio, nell'ipotesi di impiego di 1.000.000 al 10%, si ha:

- per il primo periodo (da 0 a 2):

$$1.000.000 \times (1 + 2 \times 10/100) = 1.200.000$$

- per il secondo periodo (da 2 a 3):

$$1.200.000 \times (1 + 1 \times 10/100) = 1.320.000$$

- per il terzo e ultimo periodo (da 3 a 5):

$$1.320.000 \times (1 + 2 \times 10/100) = 1.584.000$$

Al solito, la differenza 1.584.000 − 1.500.000 tra montante con capitalizzazione degli interessi e montante senza è proprio l' "effetto capitalizzazione": in questo caso si tratta di 84.000 lire.

Quando la capitalizzazione avviene con cadenza annuale, per esempio per 5 anni, cominciando dopo una prima frazione d'anno (mettiamo tre mesi) e terminando 4 mesi dopo l'ultima epoca di capitalizzazione, si possono impostare i calcoli come segue:

- Mont. dopo 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12)
- Mont. dopo 1 a. e 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × (1 + tasso)
- Mont. dopo 2 a. e 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × $(1 + \text{tasso})^2$
- Mont. dopo 3 a. e 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × $(1 + \text{tasso})^3$
- Mont. dopo 4 a. e 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × $(1 + \text{tasso})^4$
- Mont. dopo 5 a. e 3 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × $(1 + \text{tasso})^5$
- Mont. dopo 5 a. e 7 m. = capitale × (1 + tasso × 3/12) × $(1 + \text{tasso})^5$. × (1 + tasso × 4/12)

così, se il tasso fosse del 10% annuo, il montante finale di 1.000.000 riuscirebbe:

$$1.000.000 \times \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 \times \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{4}{12}\right) \simeq 1.705.799$$

Qualora la prima frazione d'anno fosse 0, ossia, in altri termini, qualora le epoche di capitalizzazione fossero esattamente in occasione degli anniversari dell'inizio dell'impiego si otterrebbe un'espressione di questo genere:

$$\text{capitale} \times (1 + \text{tasso})^{\text{n. intero anni}} \times (1 + \text{tasso} \times \text{fraz. finale})$$

Per esempio, l'impiego al 10% annuo di 1.000.000 per 5 anni interi e 4 mesi (finali) darebbe un montante di:

$$1.000.000 \times (1 + 10/100)^5 \times (1 + 10/100 \times 4/12) \simeq 1.664.194$$

La vita è, ovviamente, ancora più semplice quando la durata dell'impiego è un numero intero di anni. In tal caso, come s'è visto sopra, il legame tra le grandezze coinvolte è semplicissimo:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times (1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

Per es., sempre al 10%, sempre un milione, dopo 5 anni diviene:

$$1.000.000 \times (1 + 10/100)^5 = 1.610.510$$

Spesso si usa la formula sopra scritta anche per durate di impiego non intere. Per es., il montante di 1.000.000 al 10% dopo 5 anni e 3 mesi invece di esser calcolato con la cosiddetta "convenzione lineare":

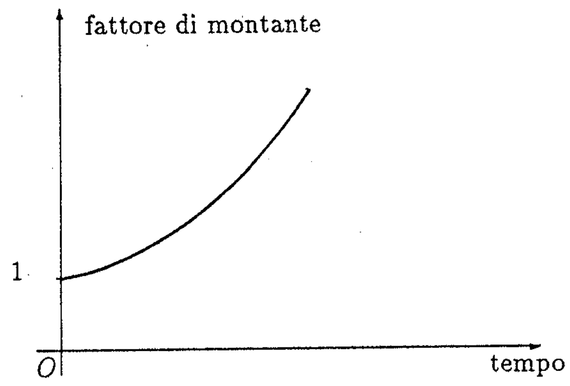
$$1.000.000 \times 1,1^5 \times (1 + 0,1 \times 3/12) \simeq 1.650.773$$

è valutato con la cosiddetta "convenzione esponenziale":

$$1.000.000 \times 1,1^{5+3/12} = 1.000.000 \times 1,1^{5,25} \simeq 1.649.345$$

La differenza tra i due montanti non è abissale e spesso la seconda espressione può esser considerata una buona approssimazione per usi teorici della prima.

Le locuzioni "convenzione lineare" e "convenzione esponenziale" fanno riferimento all'interpretazione geometrica dei fattori di montante che nei due casi si ottengono. Nel caso della "convenzione esponenziale" si assume che il montante di una lira (ossia il fattore di montante) dipenda esponenzialmente dalla durata dell'impiego:



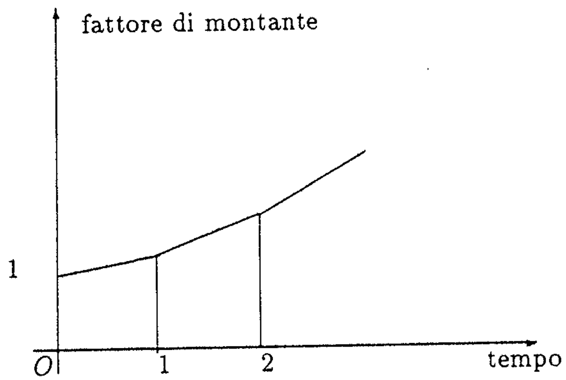
Mentre nel caso della convenzione lineare la dipendenza è illustrata da una spezzata che "prende a prestito" dalla curva del diagramma precedente solo i punti di ascissa 0,1,2,3,..., che corrispondono alle durate di impiego intere, per le quali le due convenzioni conducono allo stesso risultato.

I lati della spezzata sono inclinati sempre più ripidamente quanto maggiore è la durata dell'impiego. Questo si giustifica intuitivamente in maniera molto semplice sulla base delle considerazioni fatte in tema di capitalizzazione semplice. All'interno di ciascun periodo di capitalizzazione gli interessi che maturano sono semplici, ma da periodo a periodo cambia il capitale che produce interessi: quanto più si avanza nel tempo tanto più elevato è tale capitale (perché ingloba interessi man mano capitalizzati) e — si rammenti — la pendenza della retta che descrive la dinamica del montante a interessi semplici è, infatti, proporzionale al capitale stesso.

Tutto questo porta con sé che il tasso d'interesse è allora l'interesse prodotto da un impiego di una lira non nel generico anno, ma nel primo anno di impiego.

Se investiamo 1 lira al 10% per un anno (a interessi composti, anche se la composizione non si vede), abbiamo un montante di 1,1, e quindi un interesse di $0,1 = 10/100 = 10\%$ coincidente col tasso. Se l'investimento durasse due anni, nel second'anno gli interessi maturati sarebbero:

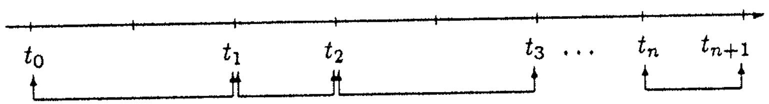
$$1,1^2 - 1,1 = 0,11 = 11\% > 10\%$$



Perché i conti tornino bisogna tener conto che la capitalizzazione degli interessi ha fatto sì che nel second'anno il capitale investito non sia solo la lira iniziale, ma l'ammontare disponibile (e reimpiegato) all'inizio del primo anno. Tale "capitale" è, in effetti 1,1. Se si rapportano gli interessi del second'anno (0,11) a tale "capitale" (1,1), si ritrova, con un sospiro di sollievo, proprio il tasso d'interesse: $0,11/1,1 = 0,10 = 10\%$.

(c)

Consideriamo l'impiego di un capitale C a interessi composti con tasso annuo di interesse i e con epoche di capitalizzazione $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Facciamo entrare in giuoco anche l'epoca iniziale, di accensione dell'impiego (t_0) e l'epoca terminale (t_{n+1}):



Il montante finale si ottiene moltiplicando il capitale investito per i fattori di montante a interessi semplici relativi ai periodi di capitalizzazione di ampiezze rispettive:

$$t_1 - t_0 = \tau_1 \; ; \; t_2 - t_1 = \tau_2 \; ; \; \ldots \; ; \; t_{n+1} - t_n = \tau_{n+1}$$

e si ha, per tale fattore, l'espressione:

$$(1 + i_1\tau_1)(1 + i_2\tau_2)\ldots(1 + i_n\tau_n)(1 + i_{n+1}\tau_{n+1})$$

quando, salvo il primo e l'ultimo, tutti i periodi di capitalizzazione hanno durata unitaria (il primo duri p anni e l'ultimo f anni), il fattore si riduce a:

$$(1 + ip)(1 + i)^{n-1}(1 + if)$$

dove $n - 1$ è il numero di periodi interi.

Qualora anche il primo periodo sia unitario ($p = 1$), si ottiene l'espressione per il fattore di montante per t anni (con $t = n + f$, essendo n intero e $0 \le f < 1$):

$$f(t) = (1 + i)^n(1 + if)$$

che, per durate intere ($t = n,\; f = 0$), si riduce a:

$$f(t) = (1 + i)^t$$

Dal punto di vista algebrico, se il primo periodo è di durata unitaria, la differenza tra convenzione lineare e convenzione esponenziale può così descriversi: con la convenzione lineare, il montante di una lira dopo t anni ($t = n + p$, con n intero e $0 \le p < 1$) è:

$$f(t) = (1 + i)^n(1 + ip)$$

mentre con la convenzione esponenziale, il fattore di montante è:

$$f(t) = (1 + i)^t = (1 + i)^{n+p}$$

Quando p è nullo (ossia per tempi interi) le due espressioni finiscono per coincidere.

Osserviamo infine che gli interessi prodotti su un impiego unitario nel primo anno sono:

$$f(1) - f(0) = (1+i)^1 - (1+i)^0 = 1 + i - 1 = i$$

Per contro, quando si consideri un generico anno (da t a $t+1$, con t intero o, se non intero, lavorando con la convenzione esponenziale) gli interessi prodotti da un impiego originariamente unitario sono:

$$f(t+1) - f(t) = (1+i)^{t+1} - (1+i)^t = (1+i)^t i$$

Tale ammontare d'interessi cresce esponenzialmente nel tempo. E' pari al tasso d'interesse solo nel primo anno (quando $t = 0$). Non appare quindi del tutto corretto dire, anche nel caso della capitalizzazione composta, che il tasso di interesse è *l'interesse prodotto da una lira impiegata in un anno*, ma bisogna dire *da una lira impiegata nel suo primo anno d'impiego.* Se si vuole far riferimento al generico anno e si vuole interpretare, con riferimento ad esso, il parametro i si deve precisare che i fornisce l'interesse prodotto nel generico anno da una lira di "capitale" impiegata all'inizio di quell'anno, capitale che include gli interessi maturati e capitalizzati nei periodi precedenti.

A questo punto i conti tornano perfettamente in quanto un impiego originario di una lira dà, dopo t anni un montante di $(1+i)^t$ lire. Tale ammontare è il "capitale" per l'anno che va da t a $(t+1)$. Gli interessi prodotti dall'impiego in quell'anno sono, come sopra s'è visto:

$$(1+i)^t i$$

e, rapportandoli al "capitale" d'inizio d'anno, si ha:

$$\frac{(1+i)^t i}{(1+i)^t} = i$$

Con riferimento alla convenzione esponenziale, per cui:

$$M = C(1+i)^t$$

si hanno le seguenti interessanti "formule inverse":

- per il capitale:

$$C = M/(1+i)^t = M(1+i)^{-t}$$

- per il tempo[3]:

$$t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}$$

- per il tasso:

$$i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1 = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/t} - 1$$

Il regime degli interessi (semplici) anticipati (a)

La presentazione di questo regime di capitalizzazione è un po' meno agevole di quella dei due precedenti, ma dovrebbe risultare accessibile anche al lettore meno disinvolto nell'uso della matematica.

E' opportuno, per facilitare l'accostamento a questa diffusa maniera per calcolare degli interessi, rammentare in che cosa consiste il calcolo dello sconto commerciale, così com'è comunemente attuato dagli Istituti di credito.

Si immagini di dover riscuotere una cambiale con un dato valor nominale ad una data scadenza (per fissare le idee, sia 1.000.000 il valor nominale e sia 1 mese la sua scadenza). Qualora interessi incassare subito il valore attuale dell'effetto, si può ricorrere ad un istituto di credito, che, dietro trattenuta di un compenso, accetti di anticipare mezzi finanziari, accollandosi il mese di differimento della disponibilità di mezzi finanziari.

E' affatto naturale accettare l'idea che il compenso trattenuto dall'istituto di credito possa essere fissato in maniera direttamente proporzionale all'ammontare nominale dell'effetto ed alla sua scadenza. Il compenso, detto *sconto*, esce allora da una formula del tipo:

$$\text{sconto} = \text{valor nominale} \times \text{scadenza} \times \text{tasso}$$

[3] I logaritmi che compaiono nella formula possono essere presi in una base qualunque. Il valore dell'espressione non muta variando il tipo di logaritmi usati. In pratica si useranno quelli volgari (in base 10) o quelli naturali (in base $e \simeq 2,718$). Anche nel seguito, quando si userà la scrittura "log", si intenderà che la scelta della base è irrilevante.

ove "tasso" sta per la solita costante di proporzionalità del compenso, che si può interpretare come il compenso chiesto per anticipare di 1 anno la disponibilità del valore di un effetto di valor nominale unitario.

Alla luce di questo, si riguardi ora l'operazione, ma dal punto di vista dell'istituto di credito. Per l'istituto l'operazione consiste nell'impiego di una somma pari a:

$$\text{valor nominale} - \text{sconto} = \text{valore scontato}$$

per avere, alla scadenza, la somma più elevata:

$$\text{valor nominale}$$

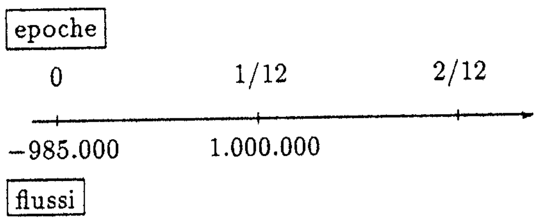
Se, per fissare le idee, l'istituto di credito applicasse un tasso del 18%, così calcolerebbe lo sconto nell'esempio numerico prima introdotto:

$$\text{sconto} = 1.000.000 \times 1/12 \times 18/100 = 15.000$$

Il valore corrisposto dall'Istituto sarebbe allora:

$$\text{valore attuale} = 1.000.000 - 15.000 = 985.000$$

Dal punto di vista dell'Istituto di credito l'operazione sarebbe così descrivibile:



Può pensarsi realizzata applicando alla somma investita (di ammontare 985.000) un opportuno fattore di capitalizzazione (che si ottiene molto facilmente: $1.000.000/985.000 \simeq 1,0152284$). E' questo il tipo di capitalizzazione che qui ci interessa. Possiamo ricavare

semplicemente la formula che fornisce il montante in funzione del capitale investito.

Poiché:

$$\text{valore scontato} = \text{valor nominale} - \text{sconto}$$

e poiché:

$$\text{sconto} = \text{valor nominale} \times \text{scadenza} \times \text{tasso}$$

si ottiene:

$$\text{valore scontato} = \text{valor nominale} \times (1 - \text{scadenza} \times \text{tasso})$$

onde, infine:

$$\text{valor nominale} = \text{valore scontato} \times \frac{1}{1 - \text{scadenza} \times \text{tasso}}$$

che si riscrive, col linguaggio della capitalizzazione:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times \frac{1}{1 - \text{scadenza} \times \text{tasso}}$$

Si controlla facilmente la correttezza della formula che dà direttamente il montante (= valor nominale) in funzione del capitale (= valor attuale) con riferimento all'esempio prima proposto:

- capitale = 985.000
- tasso = 18%
- scadenza = 1 mese = 1/12

onde:

$$985.000 \frac{1}{1 - 1/12 \times 0,18} = 985.000 \times \frac{1}{0,985} = 1.000.000$$

(b)

Come s'è visto, il montante a interessi (semplici) anticipati di una lira è dato dall'espressione:

$$\frac{1}{1 - \text{scadenza} \times \text{tasso}}$$

Tale espressione può dar luogo a risultati finanziariamente inaccettabili (se il prodotto 'scadenza × tasso' supera 1 il fattore diviene negativo: vorrebbe dire che una Banca cui cedo una cambiale invece di darmi qualcosa, vuole anche essere pagata per accettarmela... come pagare la pensione del cane per le ferie e alla fine non ricevere indietro il cane!) o addirittura non avere alcun valore (se il prodotto scadenza per tasso vale esattamente 1 il fattore si presenta con l'aspetto 1/0, privo di significato aritmetico. Gli increduli tentino il calcolo con una macchinetta!).

E' quindi necessario che il prodotto:

$$\text{scadenza} \times \text{tasso}$$

si mantenga minore di 1 affinché l'espressione del fattore di montante a interessi (semplici) anticipati abbia significato.

Questo comporta che, per un dato tasso, non si possono trattare che somme con scadenza minore del reciproco del tasso:

$$\text{scadenza massima} < \frac{1}{\text{tasso}}$$

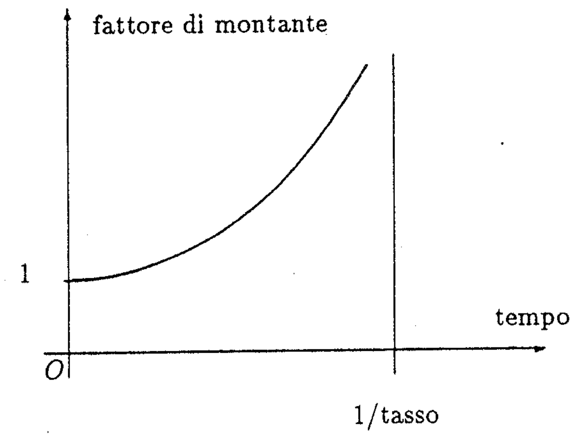
Se, per es., si considera il tasso del 20%, le scadenze di somme trattate con questa legge finanziaria devono esser minori di 1/20%, ossia di $1/0,2 = 5$ anni. Tutto ciò è confermato dall'esame del grafico del fattore di montante a interessi (semplici) anticipati che segue.

Come si vede, quando la durata dell'impiego si avvicina troppo (da sinistra) all'epoca tabù:

$$1/\text{tasso}$$

il montante diviene spropositatamente grande.

Questo fatto è particolarmente interessante. Più avanti rivisiteremo il problema. Ci limitiamo qui a far osservare che con tale comportamento basta un tasso numericamente basso per ottenere un montante enorme: è sufficiente calibrare la durata dell'impiego in modo che sia molto vicina alla durata-tabù 1/tasso.



Facciamo altresì osservare che il tasso che entra nella formula non è affatto il tasso d'interesse. Dopo un anno, un capitale unitario diviene 1/(1−tasso) e, quindi, l'interesse prodotto è:

$$\frac{1}{1 - \text{tasso}} - 1 = \frac{\text{tasso}}{1 - \text{tasso}}$$

così, per es., usando il tasso del 20% nella formula indicata, nel primo anno una lira produce d'interesse:

$$1/(1 - 0,2) - 1 = 0,2/0,8 = 0,25 = 25\%$$

In effetti, il tasso, così come è stato introdotto con riferimento a questo regime, è un *tasso di sconto* e non un *tasso di interesse*. Confermeremo questo tra poco, quando descriveremo il regime dello sconto commerciale.

(c)

Formalizziamo ora algebricamente quanto fin qui s'è visto in tema di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati in maniera informale.

Sia M l'ammontare di una cambiale scadente tra t anni e sia d il tasso annuo di sconto (= sconto che un istituto di credito trattiene su una lira scadente tra un anno). Il valore attuale C dell'effetto si ottiene da:

$$C = M - Mtd = M(1 - td)$$

Si ricava subito:

$$M = C\frac{1}{1-td}$$

Il fattore di montante per la durata t è:

$$\frac{1}{1-td}$$

che ha significato accettabile solo se:

$$1 - td > 0$$

ossia:

$$td < 1$$

da cui:

$$t < \frac{1}{d}$$

L'ammontare I degli interessi si ottiene come differenza tra il montante M ed il capitale C:

$$I = M - C = C/(1-td) - C = \frac{Ctd}{1-td}$$

Se interessano "formule inverse" per tempo e tasso, si ha:

$$t = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{C}{M}\right) \ ; \ d = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{C}{M}\right)$$

Particolarmente interessante è studiare il caso di capitale unitario e di durata unitaria.

In tal caso il fattore di montante è:

$$f(1) = \frac{1}{1-d}$$

l'interesse su una lira in un anno è:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{d}{1-d}$$

che, salvo il caso $d = 0$, non è affatto uguale al valore del parametro d.

Si osservi che, con riferimento al generico anno di impiego, dall'epoca t all'epoca $t+1$, gli interessi prodotti sono:

$$f(t+1) - f(t) = \frac{1}{1-d(t+1)} - \frac{1}{1-dt} = \frac{d}{[1-d(t+1)]\,(1-dt)}$$

che, in generale, non è, ancora una volta, uguale al tasso d e che assume valori molto grandi quando t s'avvicina a $1/d$.

Possiamo ora dare un'idea più precisa del discorso fatto sopra in tema di interesse di questo approccio per esporre chiaramente le condizioni finanziarie pur enunciando un tasso numericamente basso.

Si consideri l'impiego di 1 lira a interessi composti, tasso annuo d'interesse i, e si consideri quel tasso di sconto commerciale d che, a parità di durata, conduce allo stesso montante.

Indichiamo con $f_c(t)$ il fattore di montante a interessi composti e con $f_a(t)$ quello a interessi (semplici) anticipati. Uguaglianza di montante dopo t anni conduce a:

$$f_c(t) = f_a(t)$$

ossia:

$$(1+i)^t = 1/(1-dt)$$

Risolvendo l'equazione rispetto a d, si ha:

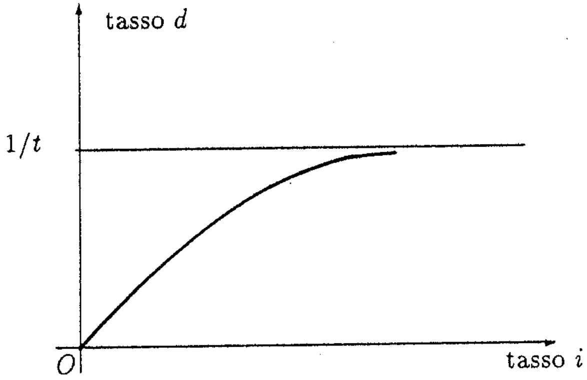
$$1 - dt = (1+i)^{-t}$$

da cui, subito:

$$d = d(i,t) = \frac{1-(1+i)^{-t}}{t}$$

Per una data durata t la formula sopra scritta consente di cercare il tasso di sconto commerciale che, usato nelle formula di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, condurrebbe allo stesso montante della capitalizzazione composta a tasso i. Diamo qui di seguito alcuni valori, con riferimento alla durata $t = 6$, ma, prima della tabella, diamo la rappresentazione grafica della dipendenza di d da i.

Si può constatare empiricamente che anche aumentando spaventosamente il tasso di interesse composto i, il tasso d che, sulla durata di 6 anni, dà la stessa *performance* cresce quasi impercettibilmente e si avvicina indefinitamente al valore $1/6 \simeq 16,67\%$.



Ciò fa sì che una valutazione finanziaria basata su un tasso di sconto commerciale, anche lievemente approssimato, può essere clamorosamente sballata.

tasso i	tasso d
10%	7,26%
15%	9,46%
20%	11,085%
25%	12,2976%
30%	13,2137%
⋮	⋮
1.000%	16,666%

1.4 Regimi usuali di attualizzazione

1.4.1 Generalità

(a)

Già abbiamo incontrato la nozione di attualizzazione, come processo finanziario che "porta indietro nel tempo" una somma di danaro, sostituendo al suo valor nominale a scadenza il suo valor attuale o scontato immediatamente disponibile.

Il rapporto tra valore scontato e valore nominale:

$$\text{fattore di sconto} = \frac{\text{valore scontato}}{\text{valor nominale}}$$

si chiama *fattore di sconto* e dipende generalmente da quanto tempo passa tra la data di valutazione e la scadenza della somma, oltre che da un parametro da pensare come tasso.

Naturalmente il legame tra le grandezze: valor nominale, valor attuale e fattore di sconto può anche leggersi come segue:

$$\text{valor attuale} = \text{valor nominale} \times \text{fattore di sconto}$$

La formula che precisa la dipendenza del fattore di sconto dal tempo e da un parametro finanziario caratterizza il *regime di attualizzazione o di sconto.* Fissando all'interno della formula il valore del parametro resta determinata una funzione del tempo che dà, scadenza per scadenza, il valore attuale di 1 lira e che definisce una *legge di attualizzazione o di sconto.*

Proprio per il modo speculare con cui abbiamo introdotto le nozioni di capitalizzazione e di attualizzazione, si intuisce che se capitalizzare conduce a un'operazione aritmetica del tipo:

$$\text{soldi subito} \times \text{fattore di montante} = \text{soldi a scadenza}$$

attualizzare richiederà un'operazione del tipo:

$$\text{soldi subito} = \text{soldi a scadenza}/\text{fattore di mont.}$$

che si può anche scrivere come:

$$\text{soldi subito} = \text{soldi a scadenza} \times \frac{1}{\text{fattore di montante}}$$

Si riconosce nella relazione scritta informalmente la struttura di quella già precedentemente ricavata:

$$\text{valor attuale} = \text{valore nominale} \times \text{fattore di sconto}$$

Le due relazioni sono, infatti, equivalenti non appena si prenda come fattore di sconto il reciproco del fattore di montante:

$$\text{fattore di sconto} = \frac{1}{\text{fattore di montante}}$$

Questa relazione apparenta coppie di regimi di capitalizzazione e di attualizzazione e coppie di leggi di capitalizzazione e attualizzazione. Considerando un regime di capitalizzazione, descritto dal corrispondente fattore di montante, l'espressione:

$$\frac{1}{\text{fattore di montante}}$$

può prendersi come fattore di sconto che caratterizza un regime di attualizzazione, che si dirà *coniugato* di quello di capitalizzazione e viceversa.

Fissando all'interno del regime di capitalizzazione una legge attraverso la scelta del valore numerico del parametro finanziario, si otterrà un fattore di montante che, stavolta, caratterizza una legge di capitalizzazione. L'espressione:

$$\frac{1}{\text{fattore di sconto}}$$

caratterizzerà allora una legge di capitalizzazione che ha proprio questo rapporto come fattore di montante. Le due leggi, di capitalizzazione e di attualizzazione, si diranno *leggi coniugate*.

Questo legame di *coniugio* tra regimi e tra leggi fa sì che il nostro lavoro in tema di attualizzazione sarà di molto semplificato: avendo introdotto tre regimi usuali di capitalizzazione (int. semplici, int. composti, int. anticipati), si potranno concretamente derivarne tre *regimi usuali di attualizzazione*:

- regime dello sconto *semplice* o *razionale*
  (coniugato di quello dell'interesse semplice);
- regime dello sconto *composto*
  (coniugato di quello degli interessi composti);
- regime dello sconto *commerciale*
  (coniugato di quello degli interessi (semplici) anticipati).

Passeremo in rassegna questi tre regimi, esaminandone le proprietà salienti.

E' appena il caso di far osservare che la relazione di coniugio in maniera del tutto equivalente può esprimersi scrivendo:

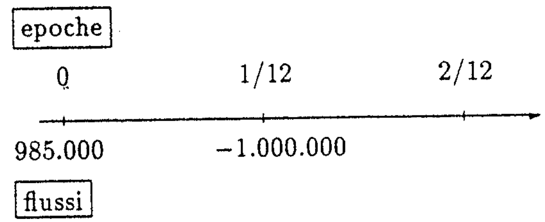
$$\text{fattore di sconto} \times \text{fattore di montante} = 1$$

o, infine:

$$\text{fattore di montante} = \frac{1}{\text{fattore di sconto}}$$

(b)

Con riferimento al semplicissimo esempio numerico che ci ha consentito di introdurre il regime di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati abbiamo già incontrato i problemi di base dell'impiego di un regime di attualizzazione. I flussi di cassa dell'operazione di sconto al 18% di una cambiale da 1.000.000 a un mese erano descritti dallo schema:



Il valore facciale dell'effetto (1.000.000) è il valore nominale, la somma ricevuta subito (985.000) è il valore attuale, il rapporto:

$$985.000/1.000.000 = 0,985$$

è il fattore di sconto, che usciva dalla formula:

$$\text{fattore di sconto} = (1 - \text{scadenza} \times \text{tasso})$$

che caratterizza il regime dello sconto commerciale fissando anzitutto il tasso:

$$\text{tasso} = 18\% = 18/100 = 0,18$$

ottenendo:

$$\text{fattore di sconto} = (1 - \text{scadenza} \times 0,18)$$

che caratterizza la legge di sconto commerciale a tasso (di sconto) del 18%. Ponendo al posto di "scadenza" proprio 1/12, il differimento dell'importo della cambiale, si ottiene:

$$\text{fattore di sconto} = (1 - 1/12 \times 0,18) = 0,985$$

Prendendo un fattore di sconto qualsiasi e considerandone il reciproco si ottiene il fattore di montante coniugato corrispondente. per es., se si resta sulle generali:

$$\frac{1}{1 - \text{scadenza} \times \text{tasso}}$$

caratterizza il regime di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati. Fissando "tasso = 0,18" si ottiene:

$$\frac{1}{1 - \text{scadenza} \times 0{,}18}$$

che caratterizza la legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati a tasso (di sconto) del 18%.

Così, il reciproco di 0,985:

$$1/0,985 \simeq 1,0152284$$

è il fattore di montante per un mese a interessi (semplici) anticipati con tasso (di sconto) del 18%.

Si noti che il prodotto del fattore di sconto per il corrispondente fattore di montante della legge coniugata dà 1:

$$0,985 \times 1,0152284 \simeq 1$$

(c)

Detta S la somma a scadenza, A il suo valore attuale, il fattore di sconto ϕ dipende dalla scadenza t (in anni) e dal parametro finanziario γ:

$$\phi = \phi(t, \gamma)$$

per es., nel caso dello sconto commerciale:

$$\phi(t, d) = 1 - td$$

Le tre grandezze sono legate dalle due significative relazioni:

$$\phi = A/S \; ; \; A = S\phi$$

L'espressione analitica di ϕ, pensato come funzione del tempo e del parametro finanziario caratterizza un regime.

Fissando in ϕ il valore del parametro finanziario, per es. $d = 0,18$ la funzione del tempo che rimane:

$$\phi(t; 0,18)$$

caratterizza una legge di sconto. Per es., nel caso dello sconto commerciale a tasso 18%, si ottiene:

$$\phi(t; 0,18) = \phi(t) = 1 - 0,18t$$

Considerando il reciproco di un fattore di sconto:

$$f = 1/\phi$$

si ottiene il fattore di montante del regime o della legge coniugata. Il prodotto tra i due fattori di regimi o leggi coniugate vale, ovviamente, 1:

$$f\phi = f\frac{1}{f} = 1$$

1.4.2 Esame dei singoli regimi di sconto

Sconto semplice o razionale

(a)

Il regime dello sconto semplice o razionale è coniugato del regime della capitalizzazione semplice. Per quest'ultimo la struttura del fattore di montante è la seguente:

$$\text{fattore di montante} = (1 + \text{tasso} \times \text{tempo})$$

Segue che il fattore di sconto del regime coniugato avrà la seguente struttura:

$$\text{fattore di sconto} = \frac{1}{1 + \text{tasso} \times \text{tempo}}$$

Desiderando, quindi, calcolare con questo regime il valore attuale di una data somma, i calcoli da svolgere sono i seguenti:

$$\text{fattore di sconto} = \frac{\text{valore nominale}}{1 + \text{tasso} \times \text{durata}}$$

Sia, per es., pari a 1.000.000 il valore nominale, siano 5 gli anni di differimento e sia pari al 5% il tasso che entra nella formula. Il valore attuale risulta:

$$\text{valore attuale} = \frac{1.000.000}{1 + 0,05 \times 5} = 800.000$$

Volendo l'ammontare dello sconto, basta, ovviamente, sottrarre dal valore nominale il valore attuale: la differenza è, per definizione, lo sconto. Volendo una formula che dia subito tale ammontare, si trova, con qualche passaggio algebrico:

$$\text{sconto razionale} = \frac{\text{valor nominale} \times \text{tasso} \times \text{tempo}}{1 + \text{tasso} \times \text{tempo}}$$

Controlliamo il risultato nel caso del semplice esempio numerico prima considerato: siano da attualizzare al 5% L. 1.000.000 scadenti tra 5 anni.

Già sappiamo che il valore attuale è 800.000 lire, cosicché lo sconto è:

$$\text{valor nominale} - \text{valore attuale} = 1.000.000 - 800.000 = 200.000$$

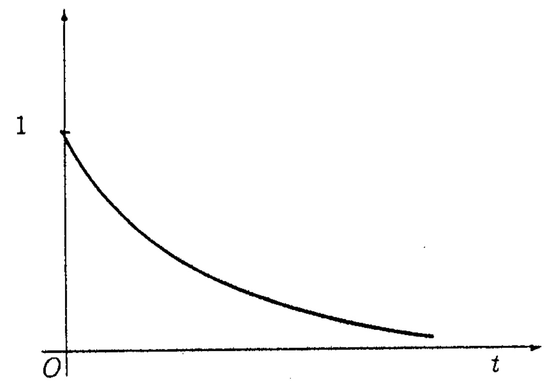
Usando la formula "per direttissima" si avrebbe:

$$\text{sconto} = \frac{1.000.000 \times 5 \times 0,05}{1 + 5 \times 0,05} = 200.000$$

(b)

(b)

Cominciamo con la rappresentazione grafica della generica legge di sconto appartenente a questo regime. Si tratta di rappresentare graficamente come al variare della durata t dell'operazione di anticipazione vari il valore attuale di una lira scadente in t, ossia come vari il fattore di sconto:



La curva che descrive l'andamento del fattore di sconto semplice o razionale è una parte di iperbole e, come si vede, ben illustra come allontanandosi nel tempo la lira che stiamo valutando il suo apprezzamento progressivamente diminuisce avvicinandosi indefinitamente a 0.

Calcoliamo quanto a titolo di sconto viene sottratto nel caso di differimento unitario di una somma di nominale unitario.

Indicando con $\phi(t)$ il valore scontato a tasso 5% di una somma unitaria scadente tra t anni, calcoliamo lo sconto annunciato come segue:

$$\phi(0) - \phi(1) = 1 - \phi(1) = 1 - \frac{1}{1 + 0,05 \times 1} = 0,05/1,05 \simeq 0,047619$$

Il tasso del 5% che compare nella formula non è allora un tasso di sconto: su un capitale unitario con differimento unitario lo sconto è 4,7619%. La cosa non dovrebbe turbare perché che cosa sia 5% lo sappiamo bene: è il tasso di interesse della legge coniugata!

(c)

Se S è la somma a scadenza, t è la durata del differimento in anni, i il tasso di interesse della legge coniugata, A il valore attuale, si ha:

$$A = \frac{S}{1 + it}$$

Per lo sconto D si ha:

$$D = S - A$$

onde, sostituendo ad A la sua espressione, si ottiene:

$$D = \frac{Sti}{1 + it}$$

Per quanto concerne il tasso di sconto, da:

$$\phi(t) = \frac{1}{1 + it}$$

si ottiene lo sconto d su una lira tra 1 anno come segue:

$$d = 1 - \phi(1) = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

che, come si constata, non coincide affatto con il tasso i che entra nella formula. Questo è, peraltro, ovvio, essendo i il tasso di interesse e non il tasso di sconto.

Per le "formule inverse" si può ragionare in termini di capitalizzazione semplice.

Il regime dello sconto composto

(a)

Il regime di attualizzazione detto dello sconto composto è il regime coniugato del regime della capitalizzazione composta.

Per quest'ultimo avevamo trovato la relazione di base tra capitale, montante, durata dell'impiego e parametro finanziario:

$$\text{montante} = \text{capitale} \times (1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

Da essa appare evidente quale sia il fattore di montante:

$$\text{fattore di montante} = (1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

e quindi abbiamo per il fattore di sconto questa espressione:

$$\text{fattore di sconto} = 1/(1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

che spesso si usa scrivere come segue:

$$\text{fattore di sconto} = (1 + \text{tasso})^{-\text{numero anni}}$$

Possiamo allora scrivere la formula fondamentale relativa all'attualizzazione con questo regime secondo lo schema ormai consueto:

$$\text{valor attuale} = \text{valor nominale} \times \text{fattore di sconto}$$

che, nel caso in esame, conduce a:

$$\text{valor attuale} = \text{valor nominale}/(1 + \text{tasso})^{\text{numero anni}}$$

Volendo lo sconto si può passare attraverso il valore attuale:

$$\text{sconto} = \text{valore nominale} - \text{valore attuale}$$

oppure, direttamente:

$$\begin{aligned}\text{sconto} &= \text{valor nominale} - \text{valor nominale} \times \text{fattore di sconto}\\ &= \text{valor nominale} \times (1 - \text{fattore di sconto})\end{aligned}$$

dove:

$$\text{fattore di sconto} = (1 + \text{tasso})^{-\text{numero anni}}$$

così, per es., volendo attualizzare un credito di 1.000.000 scadente tra 2 anni a tasso del 10% facendo uso del regime di sconto composto, i calcoli da eseguire sono quelli qui sotto indicati:

$$\text{valore attuale} = \frac{1.000.000}{1,1^2} \simeq 826.446$$

Il fattore di sconto composto in questo caso è:

$$1/1,1^2 = 1,1^{-2} \simeq 0,826446281$$

Lo sconto si può ottenere come differenza tra valore nominale e valore attuale:

$$\text{sconto} \simeq 1.000.000 - 826.446 = 173.554$$

o, direttamente, come segue:

$$\text{sconto} = 1.000.000 \times (1 - 1,1^{-2}) \simeq 1.000.000 \times 0,173553719 \simeq = 173.554$$

L'espressione:

$$\text{fattore di sconto} = (1 + \text{tasso})^{-\text{numero anni}}$$

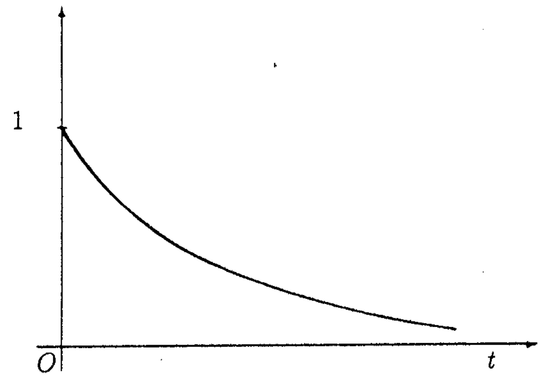
in cui non siano stati precisati né il tasso né il numero di anni caratterizza il *regime di attualizzazione a sconto composto*. L'espressione dove il tasso è stato fissato, per esempio al 10%:

$$\text{fattore di sconto} = (1 + 10/100)^{-\text{numero anni}}$$

caratterizza, per contro, la legge di sconto composto a tasso 10%.

(b)

Al variare della durata del differimento varia il valore attuale a sconto composto. Se prendiamo in considerazione un ammontare nominale unitario e lo... allontaniamo nel tempo, interessa chiederci come varia il corrispondente valore attuale. Il grafico conseguente è quello del fattore di sconto al variare del tempo:



L'arco di curva appare analogo a quanto trovato nel caso dello sconto semplice. Per durate sufficientemente lunghe esso però discende verso l'asse delle ascisse molto più velocemente. Si tratta di una curva nota come *esponenziale*.

Controlliamo anche per questo tipo di formula di attualizzazione se il tasso che interviene è interpretabile come tasso di sconto.

Se il tasso che interviene nella formula è 10%, il fattore di sconto per la durata di un anno è $\phi(1) = 1,1^{-1}$, cosicché lo sconto trattenuto su una lira di nominale è:

$$1 - \phi(1) = 1 - 1,1^{-1} = 1 - 1/1,1 = 0,090909090\ldots \simeq 9,1\%$$

che differisce da $10/100 = 0,1 = 10\%$, il tasso che compare nella formula.

Così, mentre il tasso che compare nella formula è del 10%, il tasso di sconto è soltanto del 9,1% all'incirca.

(c)

Con la solita simbologia:

S = somma a scadenza (valor nominale);

A = valore attuale;

t = durata (in anni) del differimento;

i = tasso d'interesse della legge coniugata di capitalizzazione composta.

Si ha:

$$A = S(1+i)^{-t} = S/(1+i)^t$$

Il fattore di sconto è:

$$\phi(t) = (1+i)^{-t}$$

Spesso si pone $v = 1/(1+i)$, col che il fattore di sconto si scrive semplicemente:

$$\phi(t) = v^t$$

Quando, in tale fattore di sconto, né i né t sono fissati esso caratterizza il regime di attualizzazione a sconto composto, fissando il valore del tasso, per es. $i = 20\% = 0,2$ si ottiene uno specifico fattore di sconto (funzione del tempo):

$$\phi(t) = 1,2^{-t}$$

che caratterizza la legge di sconto composto con tasso (d'interesse) del 20%.

La pignoleria di ricordare accanto alla parola tasso la sua natura (in questo caso: d'interesse) ha la fondata ragione di bandire malintesi (molto frequenti) e ci sentiamo di consigliarla a chiunque.

Volendo una relazione tra tasso di sconto d (= sconto su 1 lira a 1 anno) e tasso di interesse (i) si ha:

$$d = 1 - \phi(1) = 1 - (1+i)^{-1} = i/(1+i)$$

che si rovescia in:

$$i = d/(1-d)$$

Per le "formule inverse" si ragiona in termini di capitalizzazione composta.

Il regime dello sconto commerciale

(a)

Già abbiamo incontrato questo procedimento di calcolo quando fu introdotto il regime di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati e quindi ci limiteremo a sommari complementi.

Questo regime è caratterizzato dalla proporzionalità non solo al valor nominale ma anche al tempo dello sconto. Segue allora che l'espressione dello sconto è del tipo seguente:

$$\text{sconto} = \text{valor nominale} \times \text{tempo} \times \text{tasso}$$

ove il tasso ha, ovviamente, la natura di tasso di sconto. In effetti se il valor nominale fosse 1 e se il differimento di tale importo fosse 1 lo sconto riuscirebbe proprio uguale al tasso.

Il valore attuale si ottiene dal valor nominale sottraendo lo sconto:

$$\begin{aligned}\text{valor attuale} &= \text{valor nominale} - \text{sconto} = \\ &= \text{val. nom.} - \text{val. nom.} \times \text{tempo} \times \text{tasso} = \\ &= \text{valor nominale} \times (1 - \text{tempo} \times \text{tasso})\end{aligned}$$

così, per es., se il valor nominale fosse di 1.000.000, il tasso di sconto 20% ed il differimento 2 anni si otterrebbe:

$$\text{sconto} = 1.000.000 \times 2 \times 0,20 = 400.000$$

onde:

$$\text{valor attuale} = 1.000.000 - 400.000 = 600.000$$

Si ha anche:

$$\text{valor att.} = 1.000.000 \times (1 - 2 \times 0,20) = 1.000.000 \times 0,6 = 600.000$$

come sopra.

Le formule che descrivono i calcoli da eseguire nell'ambito di questo regime rivelano possibili risultati anomali.

Si consideri un credito di valor nominale 1.000.000, da attualizzare a sconto commerciale, tasso 20% per un differimento di 5 anni.

Lo sconto riesce:

$$\text{sconto} = 1.000.000 \times 5 \times 0,2 = 1.000.000$$

onde:

$$\text{valor attuale} = 1.000.000 - 1.000.000 = 0$$

L'assurdità s'aggrava se differiamo la stessa somma di 6 anni:

$$\text{sconto} = 1.000.000 \times 6 \times 0,2 = 1.200.000$$

con conseguente:

$$\text{valor attuale} = 1.000.000 - 1.200.000 = -200.000$$

addirittura negativo!

Non è che anche stando sotto i 5 anni non ci siano problemi: se dessimo a questo milione la scadenza di 4 anni e 11 mesi, facendo i calcoli si troverebbe come suo valore attuale L. 16.667.

Crediamo che nessuno, a meno che non sia preso per fame, cederebbe per il valore di un pasto in una pizzeria (probabilmente scadente) un effetto di un milione, anche se scadente tra quasi 5 anni.

In passato questo problema non si sarebbe mai posto perché l'impiego del regime di sconto commerciale era con tassi bassi e per durate brevi (di molto inferiori all'anno), con conseguente contenimento del valore numerico dello sconto ed assenza di risultati anomali. Fino a qualche tempo fa, magari non esplicitamente, di questo regime si faceva uso diffuso anche per durate non trascurabili e con tassi di sconto più alti che in passato.

Conviene quindi accertarsi, prima di ogni impiego del regime, che la durata massima di differimenti sia ben sotto alla "durata critica" che si ottiene semplicemente come reciproco del tasso:

$$\text{durata critica} = 1/\text{tasso}$$

Così, per es., lavorando col tasso del 20%, la durata critica risulta:

$$\text{durata critica} = \frac{1}{20\%} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ anni}$$

Oltre 5 anni si ottengono valori attuali negativi, a 5 anni il valore attuale è nullo, sotto i 5 anni, ma troppo vicino alla "durata critica"... si resta scottati da valori attuali incongruamente bassi.

E' allora consigliabile non usare questo regime per durate oltre quella critica. Se lo si vuole fare a tutti i costi conviene stabilire che per durate oltre la critica convenzionalmente lo sconto uguaglia il nominale ed il valore attuale è 0.

Facciamo, infine, notare che se consideriamo il fattore di sconto con tasso e tempo indeterminati:

$$\text{fattore di sconto} = 1 - \text{tempo} \times \text{tasso}$$

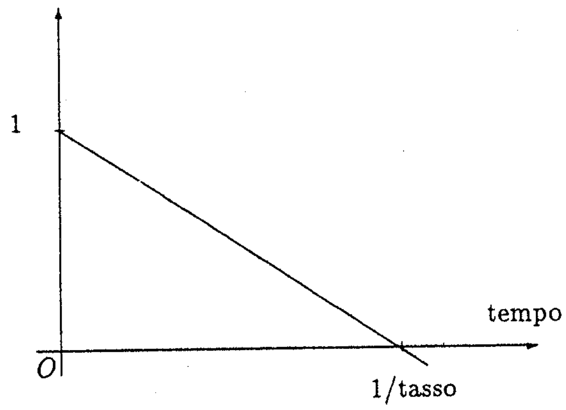
esso caratterizza il regime dello sconto commerciale, mentre se in tale fattore fissiamo il tasso, per es.: tasso = 18% = 0, 18, il fattore che otteniamo:

$$\text{fattore di sconto} = 1 - \text{tempo} \times 0{,}18$$

caratterizza la legge di sconto commerciale a tasso 18%.

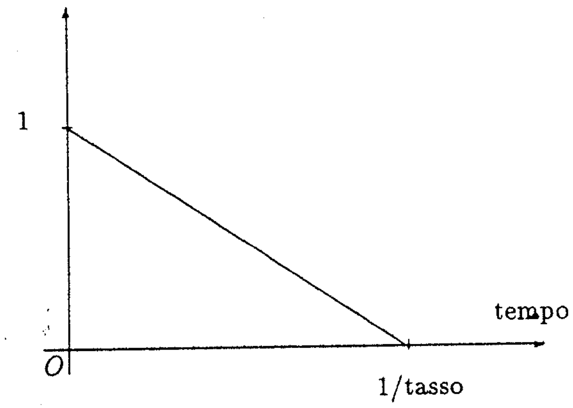
(b)

Rappresentando graficamente al variare del tempo l'andamento del fattore di sconto nel regime dello sconto commerciale, si ottiene quanto segue:



Come si vede, l'oggetto geometrico retta continua anche al di là della durata critica (1/tasso), segnalando però valori negativi (finanziariamente inaccettabili) del fattore di sconto: segue che

- o si considerano solo scadenze al di qua della durata critica;
- o si conviene che per durate oltre essa il fattore di sconto sia nullo, come suggerito da questo diagramma:



Vedremo oltre alcune particolarità interessanti dell'uso di questo regime di attualizzazione.

Per il momento ci limitiamo a far notare che il tasso che interviene nella formula ha la natura di tasso di sconto.

Se fissassimo tale tasso, per es., al 18%, il fattore di sconto della corrispondente legge di sconto commerciale sarebbe:

$$\phi(\text{tempo}) = 1 - 0,18 \times \text{tempo}$$

Ora, il tasso di sconto si ottiene sottraendo al valore nominale unitario il fattore di sconto per differimento unitario $\phi(1) = 1 - 0,18 \times 1 = 0,82$, ottenendo:

$$1 - 0,82 = 0,18 = 18\%$$

che coincide con il parametro che entra nell'espressione del fattore di sconto.

(c)

Con le solite notazioni:

- S = somma a scadenza (=valor nominale)
- A = valore attuale
- D =sconto
- d =tasso di sconto
- t = tempo

si ha:

$$D = Std$$

e poiché:

$$A = S - D$$

si ottiene:

$$A = S(1 - td)$$

il fattore di sconto che caratterizza il regime è:

$$\phi(t, d) = 1 - td$$

fissando d, per es.: $d = 0,18$, si ottiene il fattore di sconto che caratterizza la legge di sconto commerciale al 18%:

$$\phi(t; 0,18) = \phi(t) = 1 - 0,18t$$

Per quanto concerne, infine, il tasso di sconto, si ha:

$$\phi(0, d) - \phi(1, d) = 1 - (1 - d) = d$$

ottenendo così la conferma generale di quanto prima intuito attraverso un esempio numerico.

Le "formule inverse" sono banali e sono quindi lasciate da ricavare al lettore.

1.5 Equivalenze tra tassi e tra leggi

Quanto stiamo per affrontare ha una grande importanza dal punto di vista pratico. E' noto come sia comodo, diffuso e ritenuto efficace ragionare di condizioni finanziarie di varie operazioni in termini di tasso. E' noto come molte persone giudichino la convenienza di una certa operazione di investimento e/o di un'opportunità di finanziamento sulla base di un tasso, pensato come parametro finanziario pienamente espressivo. Più avanti ci occuperemo ancora e profondamente di questo aspetto. Per il momento tenteremo di mettere a fuoco alcuni piccoli problemi tecnici che si incontrano nell'uso dei tassi, che, ripetiamo, frequentemente ricorrono nella pratica.

La necessità di fare qualche "distinguo" in tema di tassi ci pare sia già evidente anche soltanto da quanto fino ad ora il lettore ha trovato in questo volume: la distinzione tra tasso di interesse e tasso di sconto che in maniera maniacale abbiamo più volte richiamato non è che la punta di un *iceberg* di distinzioni con cui è bene acquistare familiarità (o, per lo meno, controllare di possederla già).

Partiremo da un problema non finanziario in cui la questione si presenta naturalmente per farne capire l'intima natura.

Che cosa vuol dire che un'automobile viaggia a 100 km all'ora? La risposta è molto semplice: se viaggiasse un'ora in quelle condizioni coprirebbe 100 km, se viaggiasse un'ora e mezza in quelle condizioni coprirebbe 150 km, ecc. La velocità ci dà il rapporto costante tra lunghezza della strada percorsa e tempo impiegato a percorrerla:

$$\frac{100\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{150\text{ km}}{1{,}5\text{ h}} = \frac{400\text{ km}}{4\text{ h}} = 100\text{ km/h}$$

E' noto che può interessare esprimere questa velocità con riferimento ad unità di misura diverse dal km e dall'ora. Quando, per es., si illustra nei corsi di preparazione all'esame di patente agli imminenti "pericoli pubblici[4]" il fabbisogno di tempo per arrestare l'autovettura si parla spesso della velocità espressa in metri al secondo, magari convinti di rendere il problema di più immediata comprensione. Come si esegue la conversione da un modo di descrivere la velocità all'altro? Anche qui nulla di misterioso, basta trasformare i kilometri (km) in metri (m) e le ore (h) in secondi (sec) e... il giuoco è fatto:

$$\frac{100\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{100 \times 1.000\text{ m}}{3.600\text{sec}} = 27,777\ldots\text{ m/sec}$$

Attenzione! Non è che se la velocità è numericamente scesa da 100 a 27,777... l'autovettura viaggia più lentamente, essa viaggia esattamente come prima, siamo noi che abbiamo cambiato l'unità di misura.

In conclusione, dunque, per valutare correttamente una velocità, bisogna sapere in che unità di misura è espressa: 27,777...da solo non vuol dire niente: quasi tutti saremmo disposti a fare un viaggetto Torino-Milano a 27,777... m/sec, mentre non tutti reggeremmo lo stesso viaggetto a 27,777... km/h (sarebbe come farlo in bicicletta).

Sul piano finanziario il problema è simile: un tasso è l'analogo della velocità dell'autovettura. Un tasso ci dice con quale velocità un impiego ci produce interessi, con quale velocità un finanziamento ci grava di interessi. Anche per i tassi, come per le velocità delle autovetture, bisogna però sapere con riferimento a quali unità di misura essi sono espressi e quali convenzioni di calcolo il loro uso richiede. Se anche vi è, in ambito finanziario, una certa attenzione

[4] Così si può spiegare la "P" di frequente inalberata dietro.

alle unità di misura (difficilmente uno scambia un tasso annuo con un tasso mensile, anche se le unità di misura, per es., del cosiddetto "tasso fisso" non sono sicuramente limpide), spesso non si presta attenzione a quali calcoli vanno fatti usando un dato tasso. Ci proponiamo di illustrare precisamente queste trasformazioni tra tassi in connessione con le unità di misura coinvolte e la natura dei calcoli da eseguire.

In 1.5.1. tratteremo il regime dell'interesse semplice, in 1.5.2. dell'interesse composto, in 1.5.3. degli interessi (semplici) anticipati. In 1.5.4. discuteremo la possibilità di fare conversioni di tassi tra regimi diversi.

Faremo riferimento ai soli regimi di capitalizzazione. Quando occorressero concetti e procedure di calcolo per regimi di attualizzazione, basta usare quelli del regime di capitalizzazione coniugato.

1.5.1 CONVERSIONI TRA TASSI DI INTERESSE SEMPLICE

(a)

Il problema si presenta in maniera semplicissima: si supponga di calcolare gli interessi su 1.000.000 per 2 anni al 10%. L'ammontare degli interessi si ottiene come segue:

$$\text{interesse} = 1.000.000 \quad\times\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tasso annuo}}}{10/100} \quad\times\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anni}}}{2} \quad = 200.000$$

Misurando il tempo in trimestri, tanto per fissare le idee, dobbiamo modificare nell'impostazione del calcolo due cose: tempo e tasso. La durata dell'impiego non è più di 2 anni ma di 8 trimestri:

trimestri	1	2	3	4	5	6	7	8
anni	1				2			

Dobbiamo ritoccare il tasso perché 10% è la *performance* di una lira in un anno, mentre se misuriamo il tempo in trimestri, dobbiamo usare un parametro finanziario che esprima la *performance* trimestrale. Basta, all'uopo, dividere 10% per 4 (= numero di trimestri nell'anno). Si ottiene 2,5%, col che la formula di calcolo diviene:

$$\text{interesse} = 1.000.000 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tasso trim.}}}{2,5/100} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trim.}}}{8} = 200.000$$

Come doveva accadere, l'ammontare degli interessi è rimasto invariato, ma sono mutati i numeri in ingresso nei calcoli perché s'è modificata un'unità di misura.

La regola di modificazione è molto semplice poiché in un anno stanno 4 trimestri, il tempo va moltiplicato per 4 e poiché l'unità di tempo prescelta è 1/4 di quella fondamentale, la *performance* finanziaria va ridotta proporzionalmente (a 1/4 di quella fondamentale). Il tasso riferito al sottoperiodo si dice *tasso periodale.*

(b)

E' evidente qual è il procedimento in generale:

> Si moltiplica il numero degli anni per il numero di sottoperiodi che stanno in un anno e si divide il tasso per lo stesso numero. Il tasso che si ottiene è il tasso periodale.

L'invarianza degli interessi è evidente.

In anni si ha:

$$\text{interesse} = \text{capitale} \times \text{tasso annuo} \times \text{n. anni}$$

in frazioni d'anno (ne stiano *tot* nell'anno) si ha:

$$\begin{aligned} \text{interesse} &= \text{capitale} \times \text{tasso priodale} \times \text{n. periodi} \\ &= \text{capitale} \times (\text{tasso annuo}/tot) \times \text{n. anni} \times tot \end{aligned}$$

Ed è evidente che se in un prodotto divido un fattore per *tot* e ne moltiplico un altro per *tot* il valore del prodotto non cambia.

(c)

Siano:

- C = capitale impiegato;
- I = ammontare degli interessi;
- i = tasso annuo d'interesse;
- i_m =tasso di interesse periodale (riferito a $1/m$ di anno);
- t = durata dell'impiego in anni.

Si ha:

$$I = Cit$$

e, altresì:

$$I = Ci_m tm$$

segue allora che la relazione tra tassi di interesse semplice è la seguente:

$$i = mi_m \; ; \; i_m = \frac{i}{m}$$

Nell'esempio fatto nella parte a di questo paragrafo si aveva: $i =$ 10%; $m = 4$; $i_m = i_4 = 2,5\%$. Non è difficile costruire relazioni dirette tra tassi periodali, riferiti a frazioni d'anno diverse, senza passare dal tasso annuo. Precisamente, sia i_k il tasso riferito a $1/k$ di anno. Si ha:

$$i_k \times k = i \; ; \; i_m \times m = i$$

onde, eliminando i:

$$ki_k = mi_m$$

da cui, infine:

$$i_k = i_m \times m/k$$

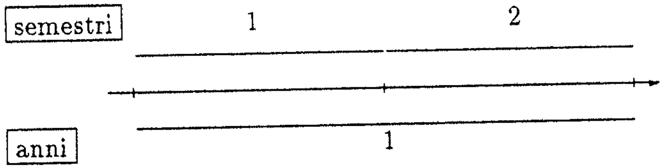
così, al 2,5% trimestrale equivale il 5% semestrale ecc.

La semplicità della relazione tra tassi equivalenti dipende dal fatto che tasso e tempo interagiscono nell'espressione dell'interesse semplice ($I = Cit$) in maniera algebricamente semplice (cioè l'uno moltiplicato per l'altro e basta!). Si vedrà tra poco che questo non è più vero nel caso del regime degli interessi composti e si vedranno quali sono le difficoltà che nascono.

1.5.2 Conversioni tra tassi di interesse composto

(a)

Consideriamo una durata annuale e suddividiamola, per fissare le idee in due periodi (semestrali):



Diremo che un certo tasso semestrale *equivale* ad un dato tasso annuo se gli interessi prodotti nell'anno dal tasso semestrale, in ipotesi di capitalizzazione ogni semestre degli interessi, coincidono con gli interessi prodotti nell'anno dal tasso annuale.

Si può, e conviene, ragionare in termini di fattore di montante: il fattore di montante annuale generato dal tasso semestrale capitalizzato deve coincidere con il fattore di montante annuale generato dal tasso annuale.

Il fattore di montante semestrale è:

$$(1+\text{tasso semestrale})^2$$

il fattore di montante annuo è:

$$1 + \text{tasso annuo}$$

Dall'uguaglianza tra i due:

$$(1 + \text{tasso semestrale})^2 = 1+\text{tasso annuo}$$

discendono le due formule di conversione:

$$\text{tasso annuo} = (1 + \text{tasso semestrale})^2 - 1$$

$$\text{tasso semestrale} = \sqrt{1 + \text{tasso annuo}} - 1$$

Sostituendo a 2 (il numero di semestri) altri interi si otterranno analoghe relazioni tra tasso annuo e altri tassi periodali.

Se, per es., si vuole il tasso semestrale equivalente al 10% annuo, il calcolo da fare è il seguente:

$$\text{tasso semestrale} = \sqrt{1 + 10\%} - 1 \simeq 4,88088\%$$

Non viene 5%, ma di meno, perché, grazie alla capitalizzazione semestrale, basta 4,88088% al semestre per "far su" il 10% nell'anno. Nel caso della capitalizzazione semplice non c'erano *fringe benefit* e se si voleva il 10% sull'anno bisognava avere 5% al semestre!

Controlliamo ora che l'equivalenza non valga soltanto nell'arco di un anno, ma per qualsiasi durata:

Si investa 1.000.000 per 2 anni al 10% annuo effettivo. Il montante riesce:

$$1.000.000 \times (1 + 10/100)^2 = 1.000.000 \times 1,21 = 1.210.000$$

Ragionando in termini semestrali si ha:

$$1.000.000 \times (1 + 4,88088/100)^4 = 1.000.000 \times 1,21 = 1.210.000$$

Montanti (e, conseguentemente, interessi) coincidono perfettamente.

Se si vuole il tasso annuo equivalente al 5% semestrale, il calcolo da fare è il seguente:

$$\text{tasso annuo} = (1 + 5/100)^2 - 1 = 10,25\%$$

Non viene solo 10%, ma 10,25% per il solito effetto di capitalizzazione degli interessi.

Controlliamo ancora una volta l'equivalenza. Consideriamo un impiego di 1.000.000 per 3 anni al 5% semestrale. Misurando il tempo in semestri, la durata dell'impiego risulta di (3 anni$\times$2 semestri/anno) = 6 semestri. Il montante risulta:

$$1.000.000 \times (1 + 5/100)^6 \simeq 1.000.000 \times 1,340095641 \simeq 1.340.096$$

Misurando, per contro, il tempo in anni, ed usando il tasso annuo equivalente del 10,25% si trova:

$$1.000.000\times(1+10,25/100)^3 \simeq 1.000.000\times1,340095641 \simeq 1.340.096$$

perfettamente coincidente con quanto trovato sopra.

Dai due esempi emerge chiaramente che, in capitalizzazione composta, non si passa dal tasso periodale all'annuo moltiplicando per il numero annuo di periodi o dall'annuo al periodale dividendo per il numero annuo di periodi, come s'è visto esser lecito nel caso della capitalizzazione semplice.

Il prodotto del tasso periodale per il numero di periodi (per es.: tasso semestrale×2) non è il tasso annuo effettivo equivalente al semestrale assegnato, ma è un tasso, detto *tasso annuo nominale convertibile* 2 volte (nell'anno), che ha la natura di tasso annuo di interesse semplice, ma semplice per modo di dire, visto che, alla fine di ogni semestre, gli interessi sono capitalizzati.

E' interessante osservare che il tasso nominale è sempre numericamente più piccolo del tasso effettivo: questo spiega l'interesse di poter enunciare un tasso nominale invece di un tasso effettivo quando, per es., si dichiarano le condizioni d'un finanziamento.

Abbiamo illustrato il problema di passaggio da un tasso semestrale ad un tasso annuo equivalente e ritorno. Sussistono analoghe relazioni per altre frazioni d'anno, le radici diverranno terze, quarte ecc. e gli esponenti 3, 4, ecc.

(b)

Le relazioni analoghe a quelle trovate sopra sono le seguenti:

$$(1+\text{tasso periodale})^{\text{n. periodi}} = 1+\text{tasso annuo}$$

da cui:

$$\text{tasso periodale} = (1 + \text{tasso annuo})^{1/\text{n. periodi}} - 1$$

e, altresì:

$$\text{tasso annuo} = (1 + \text{tasso periodale})^{\text{n. periodi}} - 1$$

Inoltre, per il tasso annuo nominale, si ha:

$$\text{tasso nominale} = \text{tasso periodale} \times \text{n. periodi}$$

$$\text{tasso periodale} = \text{tasso nominale}/\text{n. periodi}$$

Se, per es., un Istituto di credito enuncia un tasso annuo nominale del 24%, con la consueta clausola di capitalizzazione trimestrale degli interessi, questo significa che:

$$\text{tasso trimestrale} = \text{tasso annuo nominale}/\text{n.trimestri}$$

ossia:

$$\text{tasso trimestrale} = 24\%/4 = 6\%$$

segue:

$$\text{tasso annuo effettivo} = (1+6/100)^4 - 1 \simeq 0,262477 = 26,2477\%$$

Come, si vede, l'enunciazione di un tasso nominale consente di "nascondere nella manica della giacca" oltre due punti percentuali di tasso. La differenza tra tasso effettivo e tasso nominale cresce (ma poco velocemente) all'infittirsi del periodo di capitalizzazione e (più velocemente) all'elevarsi del tasso nominale.

Se, per es., quel 24% annuo nominale fosse convertibile 12 volte all'anno (cioè ogni mese) si avrebbe:

$$\text{tasso mensile} = 24\%/12 = 2\%$$

$$\text{tasso annuo effettivo} = (1 + 2/100)12 - 1 = 26,8241795\%$$

e, stavolta, nella manica sono rimasti quasi tre punti percentuali.

Se si raddoppiasse il tasso nominale (da 24% a 48%), tenendo ferma la capitalizzazione trimestrale, si avrebbe:

$$\text{tasso trimestrale} = 48\%/4 = 12\%$$

$$\text{tasso annuo effettivo} = (1 + 12/100)^4 - 1 \simeq 57,351936\%$$

con un *gap* tra effettivo e nominale di oltre 9 punti percentuali!

(c)

Con le notazioni seguenti:

- C = capitale investito;
- M = montante;
- t = durata in anni dell'impiego;
- i = tasso annuo effettivo;
- i_m = tasso periodale, relativo a $1/m$ di anno;

- j_m = tasso annuo nominale convertibile m volte all'anno;

da:

$$C(1+i)^t = C(1+i_m)^{mt}$$

si trae:

$$1+i = (1+i_m)^m$$

onde:

$$i = (1+i_m)^m - 1 \ ; \ i_m = (1+i)^{1/m} - 1$$

Poiché:

$$j_m = m.i_m \ ; \ i_m = j_m/m$$

si hanno le formule di equivalenza tra tassi annui effettivi e nominali:

$$i = (1+j_m/m)^m - 1 \ ; \ j_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

Diamo, infine, le formule di passaggio tra tassi periodali, relativi a diverse frequenze di capitalizzazione.

Se i_k è il tasso periodale relativo a $1/k$ di anno, dalla relazione fondamentale che sancisce uguale *performance* sull'anno:

$$(1+i_m)^m = (1+i_k)^k$$

si trae:

$$i_m = (1+i_k)^{k/m} - 1$$

Si possono controllare facilmente le seguenti equivalenze:

Il tasso del 5% trimestrale equivale a

- 21,550625% annuo effettivo;
- 10,25% semestrale;
- 20% annuo nominale.

Da:

$$(1+5/100)^4 - 1 = 21,550625\%$$

si controlla la prima. Da:

$$(1+5/100)^{4/2} - 1 = 10,25\%$$

si controlla la seconda. L'ultima è banale:

$$5\% \times 4 = 20\%$$

1.5.3 Conversione di tassi per interessi (semplici) anticipati

Praticamente il problema è poco interessante: quasi mai viene enunciato un tasso di sconto commerciale con riferimento a frazioni d'anno[5].

Quando lo fosse o si volesse, per altri motivi, esaminare il problema, basta osservare che nella formula di capitalizzazione a interessi anticipati:

$$\text{fattore di montante} = \frac{1}{1 - \text{tempo} \times \text{tasso}}$$

tasso e tempo entrano in maniera "benigna", esattamente come nel caso del regime di capitalizzazione semplice. Valgono allora, pari pari, tutte le formule viste in 1.5.1.

Se, per es., consideriamo la legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati con tasso (di sconto commerciale) del 20% e vogliamo calcolare l'equivalente tasso semestrale, basta che dividiamo tale tasso per 2, ottenendo 10%. Controlliamo l'esattezza del procedimento. A tasso annuo il fattore di montante per tre anni è:

$$\text{fattore} = \frac{1}{1 - 0,2 \times 3} = 2,5$$

ove 0,2 è il tasso annuo e 3 la durata in anni. Il montante di 1.000.000 è 2.500.000.

A tasso semestrale il fattore di montante per tre anni è:

$$\text{fattore} = \frac{1}{1 - 0,1 \times 6} = 2,5$$

ove 0,1 è il tasso semestrale e 6 il numero dei semestri.

I risultati coincidono alla perfezione.

[5] Il solo caso di riferimento a durata non annuale che ho riscontrato in pratica è quello di certi buoni fruttiferi di durata superiore all'anno. In questo caso, la frazione d'anno sarebbe addirittura maggiore dell'anno stesso.

1.5.4 Equivalenza tra leggi di regimi diversi

(a)
S'è visto che il montante di una determinata somma per un determinato periodo di tempo può calcolarsi con formule differenti. Una legittima domanda è:

> Può darsi che formule diverse diano lo stesso montante?

Praticamente il problema è interessante vista la non uniformità di impiego dei vari regimi di capitalizzazione e la ricorrenza di quesiti del tipo:

> A quale tasso bancario[6] equivale un tasso di sconto commerciale del 16%?

Che questa equivalenza vi possa essere è facile da accertare.
Supponiamo un impiego di 1.000.000 per 2 anni a interessi composti tasso 20%. Il montante è subito calcolato:

$$\text{montante} = 1.000.000 \times 1,2^2 = 1.440.000$$

Supponiamo ora di impiegare sempre la stessa somma di 1.000.000, per lo stesso periodo di 2 anni, ma a interessi semplici tasso 22%. Il montante è dato da:

$$\text{montante} = 1.000.000 \times (1 + 0,22 \times 2) = 1.440.000$$

lo stesso di prima. E' intuitivo che se lavorassimo, invece che su 1.000.000, su qualunque altro impiego con questi tassi e per questa durata, riavremmo equivalenza dei risultati.
Dunque:

[6]Frequentemente gli istituti di credito enunciano i tassi come tassi annui nominali convertibili trimestralmente. In tal senso nella pratica finanziaria si parla spesso di "tasso bancario". Alla prassi del tasso annuo nominale convertibile sono stati di recente anche obbligati per legge (cfr. l'ultimo capitolo).

> impiegare 2 anni al 20% composto o al 22% semplice conduce al medesimo montante.

Ha senso allora affermare che il 22% semplice equivale al 20% composto?
Se avesse senso quest'affermazione si dovrebbero ottenere uguali *performance* delle due leggi finanziarie (interessi composti al 20%, interessi semplici al 22%) per qualsiasi durata dell'impiego. Questo però non è vero: se teniamo ferme le leggi finanziarie ma spostiamo la durata dell'impiego l'equivalenza dei risultati viene distrutta.
Si supponga, per es., di portare la durata dell'impiego a 3 anni.
A interessi composti 20% il montante risulta:

$$\text{montante} = 1.000.000 \times 1,2^3 = 1.728.000$$

mentre a interessi semplici 22% si ha:

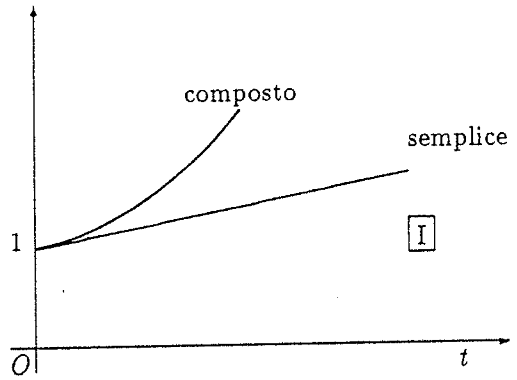
$$\text{montante} = 1.000.000 \times (1 + 0,22 \times 3) = 1.660.000$$

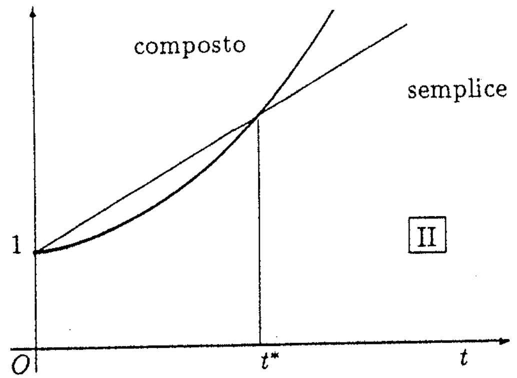
differente dal precedente.
Il legame, quindi, che intercede tra 20% composto e 22% semplice non è un legame diretto tra tassi, ma è un legame "accidentale" che passa attraverso l'operazione di impiego per 2 anni considerata.
Questa situazione è generale: si possono trovare tassi equivalenti a tutti gli effetti solo quando le leggi finanziarie caratterizzate da questi tassi appartengono al medesimo regime, altrimenti sono possibili equivalenze soltanto "episodiche", legate a singoli tipi di operazioni.
I riflessi pratici di questo sono evidenti: da un tasso effettivo trimestrale di interesse composto si può passare ad un tasso annuo di interesse composto con equivalenza a tutti gli effetti, da un tasso trimestrale di interesse semplice si può passare ad un tasso annuo di interesse semplice, equivalente a tutti gli effetti, da un tasso annuo di interesse composto non si può passare ad un tasso di sconto commerciale annuo che caratterizza una legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, ossia non si passa da un tasso di interesse composto a un tasso di sconto commerciale.

(b)

Si possono comprendere i motivi dei risultati delineati nella prima parte di questo n. attraverso la rappresentazione grafica congiunta dei fattori di montante di regimi diversi.

Se confrontiamo una legge di capitalizzazione semplice con una legge di capitalizzazione composta, si possono presentare soltanto queste due situazioni (I e II):





Mentre nella prima il montante a interessi composti è uniformemente superiore a quello a interessi semplici (lo è per tutte le durate di impiego positive), nella situazione II vi è dapprima do-

minanza della legge di capitalizzazione semplice e soltanto da t^* in poi la palma di maggiore redditività passa a quella composta. Solo in tale caso c'è una durata di impiego t^*, con riferimento alla quale le *performance* delle due leggi si equivalgono. Non è agevole decidere se si è nella situazione I o II: ne parliamo nella parte (c) di questo numero.

Ci limitiamo a mostrare qui, attraverso un esempio numerico, la corrispondenza tra quanto prima abbiamo aritmeticamente individuato e quanto il grafico suggerisce.

Riprendendo la capitalizzazione a interessi composti a tasso 20% annuo e quella a interessi semplici 22% annuo, riportiamo nella tabella sottostante per alcune durate dell'impiego i valori dei fattori di montante:

durata	montante a interessi semplici 22%	montante a interessi composti 20%
1	1,22	1,20
2	1,44	1,44
3	1,66	1,728
4	1,88	2,0736

Come si vede, fino all'epoca 2 (sarebbe il t^* di poco fa), il montante a interessi semplici supera quello ad interessi composti, da 2 in avanti quello maggiore è il secondo.

Se, per contro, costruissimo un'analoga tabella ove confrontiamo le *performance* di una legge di capitalizzazione semplice al 20% e di una legge di capitalizzazione composta al 24% troveremmo:

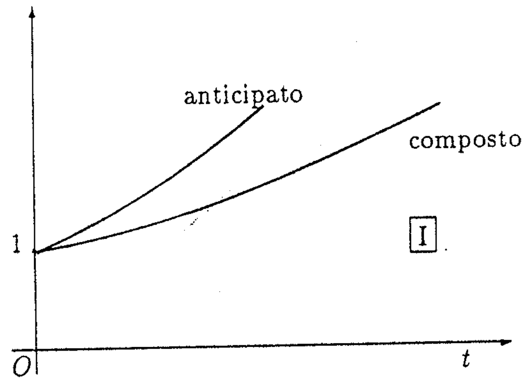
durata	montante a interessi semplici 20%	montante a interessi composti 24%
1	1,20	1,24
2	1,40	1,5376
3	1,60	1,906624
4	1,80	2,3642137

Da questa tabella si può controllare che il montante a interessi composti domina uniformemente quello a interessi semplici. Non c'è dunque una durata t^* di indifferenza tra le due leggi.

La prima tabella offerta si riferisce alla situazione II, mentre la successiva alla situazione I.

Analogamente si possono istituire confronti tra altri regimi di capitalizzazione. Trascureremo il confronto tra capitalizzazione semplice e a interessi (semplici) anticipati, mentre dedicheremo un po' di spazio al confronto tra capitalizzazione composta e capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati.

I due grafici seguenti riguardano, rispettivamente, la I e la II situazione, che anche qui ritroviamo.

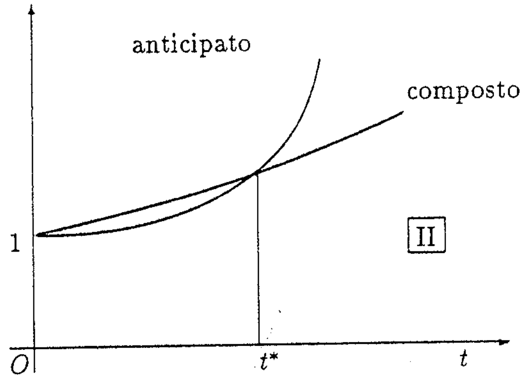


Il montante a interessi anticipati è uniformemente sopra quello composto (sit. I) o, dopo un'iniziale superiorità del composto, lo supera da un t^* in poi (sit. II).

Anche qui non è facile discriminare tra I e II né, in situazione II è agevole calcolare t^*. Presentiamo due tabelle che descrivono numericamente le due situazioni. Ecco la I:

durata	mont. a int. sempl. ant. 20%	mont. a int. comp. 20%
1	1,25	1,20
2	1,6666666...	1,44
3	2,50	1,728
4	5,00	2,0736

Come si vede il montante in capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati supera uniformemente quello in capitalizzazione composta. Per durate brevi la discrepanza è modesta (anche se già a 1 anno è del 5%); per durate lunghe la discrepanza aumenta vertiginosamente (si veda quanto accade per gli impieghi di 4 anni!). Vediamo la II:



Dalla corrispondente tabella:

durata	mont. a int. sempl. ant. 15%	mont. a int. comp. 24%
1	1,1764705	1,24000000
2	1,4285714	1,53760000
3	1,8181818	1,90662400
4	2,5000000	2,3642137

si vede che, in corrispondenza ad una durata d'impiego tra 3 e 4 anni, la legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati raggiunge quella di capitalizzazione composta e da tale durata in avanti la domina.

Si può avere una percezione del fenomeno anche attraverso un'impostazione lievemente diversa del problema. Nella tabella che segue abbiamo raccolto i risultati di alcuni calcoli che ci sembrano interessanti.

Tenendo ferma una legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, con tasso di sconto commerciale del 20% e facendo variare la durata dell'impiego fino vicino al "valore tabù" 1/tasso, nella fattispecie di $1/20\% = 1/0,2 = 5$ anni, abbiamo calcolato quale tasso di interesse composto condurrebbe allo stesso risultato. Nella tabella si trovano, ordinatamente: durata dell'impiego, fattore di montante a interessi (semplici) anticipati (tasso 20%), tasso di interesse composto che sulla durata dà la stessa *performance*:

durata	mont. a int. ant. 20%	tasso di int. comp. equivalente
1	1,25	25,0000000%
2	1,67	29,099440%
3	2,50	35,7208808%
4	5,00	49,5348700%
4,5	10,00	66,8100537%

Avvicinandosi sempre di più alla durata 5 si ottengono tassi equivalenti spropositatamente grandi.

Qui si capisce l'interesse della capitalizzazione a interessi anticipati: dichiarando un tasso normale (per es. 20%) si ottengono effetti di capitalizzazione che con la capitalizzazione composta sono concretamente improponibili.

Il confronto fra i comportamenti della capitalizzazione composta e a interessi semplici anticipati è in pratica significativo perché un tasso di capitalizzazione composta va pensato come un parametro di controllo di redditività, come vedremo nel cap. 4, e perché alcune società finanziarie hanno preferito, per motivi commerciali, enunciare un tasso di sconto commerciale.

(c)

Il confronto tra una legge di capitalizzazione composta, con fattore di montante:

$$f_c(t) = (1+\beta)^t$$

ed una legge di capitalizzazione semplice con fattore di montante:

$$f_s(t) = 1 + \alpha t$$

già prima studiato geometricamente ed esplorato numericamente, si riduce a studiare sotto quali condizioni ammetta soluzioni po-

sitive l'equazione (di indifferenza) in t:

$$(1+\beta)^t = 1 + \alpha t$$

Quest'equazione non si può risolvere algebricamente, però si può dire sotto quali condizioni essa ammette o no soluzioni positive.

Già s'è intuito che se β è abbastanza più grande di α non vi sono soluzioni perché per qualsiasi durata t dell'impiego il primo membro supera il secondo.

Quando $\alpha = \beta$ per una durata d'impiego unitaria ($t = 1$) si ottiene lo stesso montante, il minimo valore di β per cui non vi sono durate di indifferenza deve allora essere superiore a α. Si può anche trovare tale minimo valore di β, che denoteremo con β^*.

Basta riflettere che in corrispondenza ad esso la retta che rappresenta il fattore di montante in capitalizzazione semplice è tangente alla curva esponenziale che descrive quello in capitalizzazione composta in corrispondenza ad una durata d'impiego nulla. Le pendenze iniziali di retta e curva debbono allora coincidere. La pendenza della retta è il tasso α. Per ottenere la pendenza della curva si può derivare il fattore di montante in capitalizzazione composta. Si ha: $f_c'(t) = (1+\beta)^t \ln(1+\beta)$. In quest'espressione ln sta per *logaritmo naturale*, ossia in base $e \simeq 2,718$. In $t = 0$ la pendenza della curva è $f_c'(0) = (1+\beta)^0 \ln(1+\beta) = \ln(1+\beta)$. La condizione di coincidenza delle due pendenze è allora:

$$\alpha = \ln(1+\beta^*)$$

Se ne trae:

$$\beta^* = e^\alpha - 1$$

Vale la seguente relazione (ben approssimata, per difetto, per tassi piccoli):

$$\beta^* \simeq \alpha + \alpha^2/2$$

così, se il tasso di interesse semplice fosse del 10%, la formula esatta indica in:

$$\beta^* = e^{0,1} - 1 = 10,5170918\ldots\%$$

il minimo tasso d'interesse composto che esclude durate di indifferenza, mentre la formula approssimata dà:

$$\beta^* \simeq 0,1 + 0,1^2/2 = 10,5\%$$

E' possibile rovesciare la relazione ottenendo per il massimo tasso di interesse semplice α^* che non dà luogo a durate di indifferenza l'espressione seguente:

$$\alpha^* = \ln(1+\beta)$$

ove il logaritmo è inteso come logaritmo naturale (in base $e = 2,718\ldots$). Anche qui si ha una relazione approssimata per difetto:

$$\alpha^* \simeq \beta - \beta^2/2$$

così, a fronte d'un tasso di interesse composto del 12%, il massimo tasso di interesse "uniformemente battuto" è:

$$\alpha^* = \ln(1+0,12) = 11,33286853\ldots\%$$

mentre la formula approssimata dà:

$$\alpha^* \simeq 0,12 - 0,12^2/2 = 11,28\%$$

Non vi sono, per contro, difficoltà di sorta per esprimere tassi di interesse semplice o composto che si equivalgano, data una certa durata dell'impiego.

Dalla relazione di indifferenza:

$$(1+\beta)^t = 1 + \alpha t$$

si trae:

$$\alpha = \frac{(1+\beta)^t - 1}{t}$$

e:

$$\beta = (1+\alpha t)^{1/t} - 1$$

Sulla base di queste formule il lettore controlli i risultati indicati in tabella in 1.5.3, parte (a).

Nel caso di confronto tra una legge di capitalizzazione semplice ed una legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, quest'ultima con fattore di montante:

$$f_a(t) = 1/(1-\gamma t) \quad 0 \le t < 1/\gamma$$

il problema si risolve analiticamente. Dall'equazione:

$$1 + \alpha t = 1/(1-\gamma t)$$

si ottiene:

$$(1+\alpha t)(1-\gamma t) = 1$$

ossia:

$$(\alpha - \gamma)t - \alpha\gamma t^2 = 0$$

che ha, oltre l'ovvia soluzione $t = 0$, anche la soluzione:

$$t = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}$$

Tale soluzione è accettabile solo se positiva. Questo accade se e soltanto se $\gamma < \alpha$.

Dunque:

> Se il tasso di sconto commerciale (γ) è minore del tasso di interesse semplice (α) allora v'è una durata per i due impieghi che conduce al medesimo montante e che è pari alla differenza tra il reciproco del primo ed il reciproco del secondo. Inizialmente è maggiore il montante a interessi semplici, poi quello a interessi (semplici) anticipati. Se il tasso di sconto commerciale è maggiore o uguale di quello di interesse semplice non vi sono durate positive di indifferenza ed il montante a interessi (semplici) anticipati è superiore a quello a interessi semplici.

Anche in questo caso si può atteggiare il problema come problema di ricerca di tassi equivalenti, subordinatamente ad un'assegnata durata d'impiego.

Dalla relazione di equivalenza:

$$1 + \alpha t = 1/(1-\gamma t)$$

si ottengono le seguenti due formule di "equivalenza subordinata" tra tassi:

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{\gamma t}{t(1-\gamma t)}$$

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{\alpha t}{t(1+\alpha t)}$$

Resta un ultimo confronto, quello tra capitalizzazione composta e capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati. La condizione di indifferenza è:

$$(1+\beta)^t = 1/(1-\gamma t)$$

che equivale a:

$$(1+\beta)^{-t} = 1-\gamma t$$

Anche quest'equazione non si risolve in forma chiusa, ma è possibile indicare sotto quali condizioni ammette soluzioni positive in t.

Se:

$$\gamma < \gamma^* = \log(1+\beta) \simeq \beta - \beta^2/2$$

il montante a interessi (semplici) anticipati supera quello a interessi composti per qualsiasi durata (accettabile, ossia $0 < t < 1/\gamma$), altrimenti inizialmente è superiore quello a interessi composti e solo da una certa durata in poi la disuguaglianza s'inverte.

Naturalmente la condizione si può dare non soltanto in termini di "minimo tasso di sconto commerciale γ^* tale che...", ma anche in termini di "massimo tasso di interesse composto β^* tale che non dà luogo a durate finanziariamente accettabili di indifferenza".

Si ha facilmente:

$$\beta < \beta^* = e^\gamma - 1 \simeq \gamma + \gamma^2/2$$

Ulteriori considerazioni interessanti si possono fare in tema di indifferenza tra tassi subordinatamente ad una durata di impiego assegnata. Dall'equazione:

$$(1+\beta)^{-t} = 1-\gamma t$$

si trae:

$$\beta = (1-\gamma t)^{-1/t} - 1$$

e:

$$\gamma = \left[1-(1+\beta)^{-t}\right]/t$$

Quest'ultima relazione è interessantissima perché mostra come fissando un tasso di interesse composto β anche molto elevato, se

la durata dell'impiego è abbastanza grande, il tasso di sconto commerciale che dà lo stesso risultato può rendersi arbitrariamente piccolo, fino a parere... inoffensivo. Faccio un esempio con parametri esagerati, ma che ben evidenzia il "trucco".

Sia $\beta = 30\%$, $t = 5$, dalla formula si trae:

$$\gamma = 14,61\ldots\%$$

Condizioni finanziarie non lievi (interessi composti al 30% per 5 anni) si possono esprimere equivalentemente evocando un tasso (di sconto commerciale) minore del 15%!

Di fronte a errori di percezione sulla formula che s'impiega è chiaro il vantaggio dell'uso del regime di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati.

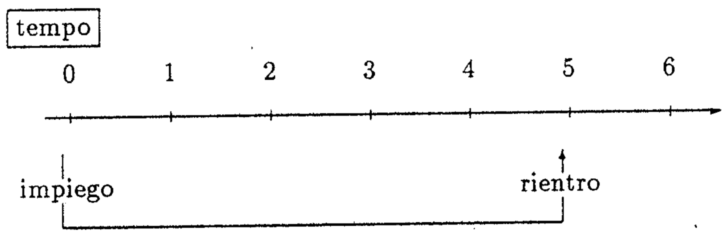
Tali errori di percezione sarebbero evidentissimi di fronte a strutture di operazioni molto semplici: un investimento con un'unica entrata oppure un finanziamento con restituzione in una sola volta.

Lo sono di meno di fronte a operazioni con struttura complicata: per es. con flussi di cassa frequenti.

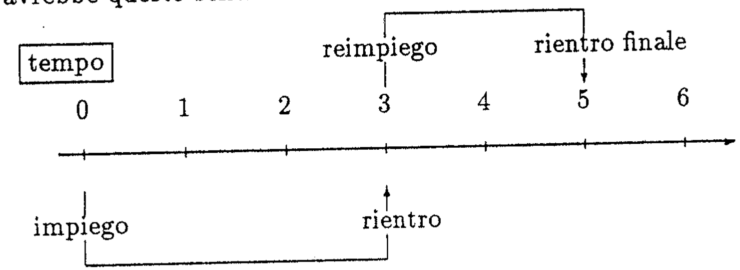
1.6 Non arbitraggio (scindibilità)

(a)

Consideriamo un impiego finanziario che duri 5 anni, consistente in investire inizialmente una certa somma di danaro a fronte di un incasso, dopo 5 anni appunto. Il seguente schema illustra la situazione:



Supponiamo di considerare un impiego, sempre per un quinquennio, ottenuto attraverso un'interruzione in un'epoca arbitraria tra 0 e 5 e prosecuzione fino all'epoca 5 alle medesime condizioni (cioè usando la stessa legge finanziaria). Interrompendo in 3 si avrebbe questo schema:



Il quesito che ci poniamo concerne l'influenza o meno dell'interruzione: nel secondo caso si ottiene o no lo stesso montante che nel primo caso?

La risposta è cui si giunge molto facilmente è piuttosto intuibile: dipende dal regime di capitalizzazione. Infatti:

- a interessi semplici il montante "interrotto" è superiore;
- a interessi composti il montante "interrotto" è uguale;
- a interessi (semplici) anticipati il montante "interrotto" è minore.

Si chiamano *leggi scindibili* quelle per le quali il montante non varia in seguito all'interruzione dell'impiego, *non scindibili* le altre.

La proprietà di scindibilità d'una legge finanziaria è una proprietà matematico-formale che la legge finanziaria può possedere o no. Poiché una legge finanziaria è suscettibile di varie interpretazioni concrete[7] la scindibilità stessa ha differenti interpretazioni pratiche interessanti. Tale proprietà è stata dapprima riconosciuta molto comoda per l'esecuzione di calcoli finanziari o in tema di costruzione di contratti o in tema di loro valutazione. Nel corso

[7] Cfr. E. LEVI (1957): 'Sul significato concreto delle leggi d'interesse', *Studi in onore di F. Sibirani*, Zuffi, Bologna.

degli ultimi decenni, lo sviluppo della teoria dei mercati finanziari ha mostrato come tale proprietà possa essere interpretata in termini di efficienza dei mercati finanziari stessi, che, in sua presenza, impediscono di fare profitti giocando proprio sulla discrepanza tra i risultati che s'ottengono attraverso un dato investimento e quelli derivanti dalla sua riproduzione attraverso il concatenamento di operazioni di durata più breve.

La sussistenza di tale possibilità è detta "possibilità d'arbitraggio", l'insussistenza di tale possibilità, che implica la scindibilità, è usualmente descritta come "impossibilità d'arbitraggio".

E' allora importante riconoscere che:

> Le sole leggi di capitalizzazione scindibili sono di capitalizzazione composta.

(b)

Si controllano facilmente le asserzioni appena fatte.

Si consideri un impiego a tasso del 10% per 5 anni. I fattori di montante sono:

- a interessi semplici: $1 + 0,10 \times 5 = 1,5$
- a interessi composti: $(1 + 0,10)^5 = 1,61051$
- a interessi (semplici) anticipati: $1/(1 - 0,1 \times 5) = 2$

Consideriamo l'effetto di un'interruzione dell'impiego dopo 3 anni con immediata prosecuzione per gli altri 2:

- a interessi semplici si ottiene il fattore quinquennale:

$$(1 + 0,1 \times 3) \times (1 + 0,1 \times 2) = 1,56 > 1,5$$

- a interessi composti si ottiene il fattore quinquennale:

$$(1 + 0,1)^3 \times (1 + 0,1)^2 = 1,331 \times 1,21 = 1,61051$$

a interessi (semplici) anticipati si ottiene il fattore quinquennale:

$$1/(1 - 0,1 \times 3) \times 1/(1 - 0,1 \times 2) = 1,785714286 < 2$$

Come si vede, l'interruzione "paga" negli impieghi a interessi semplici perché "regala" una capitalizzazione d'interessi, "danneggia" nella capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati perché tien lontani i fattori dalla "zona calda", è indifferente nel caso di capitalizzazione composta.

(c)

Consideriamo dapprima un impiego a interessi semplici per una durata di $x+y$ anni a tasso i.

Il fattore di montante relativo all'impiego indicato è $f(x+y) = 1+i(x+y)$. I fattori di montante, con la stessa legge di capitalizzazione per x e per y anni sono, rispettivamente: $f(x) = 1+ix$ e $f(y) = 1+iy$. Interrompendo l'impiego dopo x anni e proseguendolo immediatamente per y anni si avrebbe il montante seguente:

$$f(x)f(y) = (1+ix)(1+iy) = 1+i(x+y)+i^2xy$$

Come si vede, se $x, y > 0$ il montante con capitalizzazione supera quello senza (pari a $f(x+y)$). La differenza tra i due:

$$f(x)f(y) - f(x+y) = i^2xy$$

è precisamente data dagli interessi maturati nei secondi y anni sugli interessi prodotti nei primi x anni:

$$i^2xy \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interessi} \\ \text{primi } x \text{ anni}}}{ix} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tasso}}}{i} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{durata} \\ \text{secondo periodo}}}{y}$$

Nel caso della capitalizzazione composta si ha:

$$f(x) = (1+i)^x \qquad ; \qquad f(y) = (1+i)^y$$

$$f(x+y) = (1+i)^{x+y}$$

da cui si constata che:

$$f(x).f(y) = f(x+y)$$

in quanto:

$$f(x).f(y) = (1+i)^x \times (1+i)^y = (1+i)^{x+y} = f(x+y)$$

Nel caso della capitalizzazione composta l'interruzione dell'impiego non ha alcun effetto sull'ammontare del montante. E' questa la natura della proprietà di scindibilità.

Nel caso della capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, si ha da confrontare il montante di una lira senza interruzione:

$$f(x+y) = \frac{1}{1-d(x+y)}$$

col prodotto dei due fattori di montante nel caso di impiego interrotto:

$$f(x).f(y) = \frac{1}{(1-dx)(1-dy)}$$

Si ha:

$$f(x).f(y) = \frac{1}{1-d(x+y)+d^2xy}$$

Si constata subito che, rispetto a $f(x+y)$, troviamo a denominatore, in più, l'addendo positivo d^2xy, cosicché il fattore $f(x+y)$ supera il prodotto dei due fattori $f(x).f(y)$. Nel caso di legge di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati, l'interruzione dell'impiego deprime il montante.

1.7 Tassi variabili nel tempo

1.7.1 Introduzione

I modelli di base, presi in considerazione fin qui in questo capitolo iniziale, sono largamente sufficienti per la costruzione di buona parte dei contratti finanziari che concretamente si incontrano. Semplificando un po' si potrebbe dire che le parti concordano su una legge finanziaria (per es.: capitalizzazione composta al 10%) e su una struttura d'operazione (per es.: prestito a scadenza fissa di 1.000 L.) e l'apparato fin qui costruito consente di determinare ciò che crucialmente interessa, ossia quanto il debitore dovrà pagare alla scadenza:

$$\text{somma dovuta} = 1.000 \times (1+10\%)^2 = 1.210$$

L'apparato costruito è decisamente meno efficace per valutare il risultato che ci si può aspettare dalla stipulazione di un'o.f.

quando, come realisticamente accade, questa interagisce con l'ambiente circostante.

Supponiamo — per intenderci — che il creditore nell'operazione appena considerata si chieda su quale disponibilità potrà contare tra quattro anni, ossia due dopo la scadenza del prestito, nell'ipotesi considerata certa che il debitore faccia onore ai suoi impegni e, quindi, nell'ipotesi che tra due anni paghi le L. 1.210 che deve, e che tale somma sia reimpiegata nei due anni successivi alle condizioni che il mercato offrirà, per es., comprando, in sequenza, due Buoni del Tesoro annuali. Cercando di esplorare questa "coda" dell'operazione difficilmente il creditore potrà contare su una qualche stabilità temporale dei tassi di interesse per cui dovrà arricchire il suo strumentario con leggi di capitalizzazione non contrattuali, ma empiriche, nelle quali i tassi di interesse possono (magari selvaggiamente) cambiare nel tempo.

Altre importanti applicazioni di questi schemi si hanno quando si studiano operazioni finanziarie in presenza di inflazione e si vogliono valutare i risultati delle stesse in termini reali. Tale esigenza si presenta concretamente in àmbito aziendale anche con riferimento a questioni di contenzioso. Non è infrequente che la magistratura chieda, separatamente, valutazioni in temini reali e monetari. Quand'anche un'o.f. sia costruita con una legge di capitalizzazione usuale, e quindi segua, in termini monetari, una geometria semplicissima (crescita del montante nel tempo lineare, esponenziale, iperbolica), la corrispondente dinamica in termini reali "sporca" inevitabilmente tale geometria in quanto i tassi d'inflazione, che sono quantità non contrattuali, possono variare nel tempo anche in modo clamoroso e reclamano dunque modelli più capaci. Tra breve presenteremo modelli che sono più largamente sodisfacenti.

1.7.2 Leggi di capitalizzazione con due variabili

(a)

Obiettivo della parte terminale di questo capitolo è mostrare come le menzionate interazioni con i mercati finanziari suggeriscano l'introduzione di una nozione nuova, quella di *legge finanziaria con due variabili.* Si cercano formule che esprimono

il montante d'un impiego unitario con tassi d'interesse che possono variare nel tempo. In tale caso, non basta, naturalmente, dichiarare la durata di un impiego per valutarne il risultato, ma si deve almeno dichiararne qual è il momento d'inizio e qual è quello finale: ecco le due variabili che compaiono nel nome!

Si desidera costruire una modellistica del tipo seguente:

$$\text{fattore di montante} = F(\text{data d'inizio, data di fine})$$

In particolare ci interesserà che questi modelli finanziari "evoluti":

- incorporino la possibilità del tutto realistica che tali tassi d'interesse varino in qualunque momento;
- preservino, in qualche caso almeno, la proprietà di scindibilità così comoda ed importante per l'esecuzione dei calcoli e così rilevante come indice d'efficienza dei mercati finanziari.

(b)

Indicando con x, y le date di inizio e fine, rispettivamente di un impiego, un fattore di montante sarà una funzione del tipo $F(x, y)$ e si può, almeno in prima battuta, pensare che il suo valore sia determinato da quanto accade nell'intervallo di tempo da x a y. Consideriamo l'impiego su 4 anni sopra delineato. Nei primi due anni il tasso di capitalizzazione composta è 10%. Se il valutatore avanzasse l'ipotesi che, scaduto tale impiego d'apertura, i tassi d'interesse salgano e, precisamente, che si potrà comprare, tra due anni, un Buono del Tesoro annuale con rendimento dell'11%, e che si potrà replicare l'impiego nel quart'anno al tasso dell'11,5%, chiamando 0 la data iniziale (adesso) e 4 la data finale, il fattore di montante che descriverebbe la dinamica quadriennale dell'impiego sarebbe:

$$F(0,4) = (1 + 10\%)^2 \times (1 + 11\%) \times (1 + 11,5\%) = 1,4975565$$

Non è disperante aspettarsi di ritrovare la scindibilità. Pensiamo, per es., ad un'interruzione a metà intervallo di tempo. Ci serviranno i due fattori di montante:

$$F(0,2) = (1 + 10\%)^2 = 1,21$$
$$F(2,4) = (1 + 11\%)(1 + 11,5\%)$$

e troveremo che:

$$\begin{aligned} F(0,2)F(2,4) &= (1+10\%)^2(1+11\%)(1+11,5\%) = \\ &= 1,4975565 = F(0,4) \end{aligned}$$

(c)
Una *legge di capitalizzazione con due variabili* è caratterizzata da una funzione di due variabili $F(x, y)$, con $y \geq x$, essendo x e y le epoche di inizio e fine del processo di capitalizzazione. Se, per es., si impiegasse in capitalizzazione composta per n periodi:

$$(x, x_1); (x_1, x_2); \ldots; (x_{n-1}, y)$$

vigendo all'interno di ciascuno di essi i tassi rispettivi:

$$i_1, i_2, \ldots, i_n$$

il fattore di montante sarebbe:

$$F(x,y) = (1+i_1)^{x_1-x}(1+i_2)^{x_2-x_1}\ldots(1+i_n)^{y-x_{n-1}}$$

Le leggi finanziarie con una variabile si possono pensare come caso speciale di quelle in esame qualora la dipendenza del fattore di montante da x, y sia di un tipo particolare, ossia quando x, y entrino in giuoco soltanto per differenza:

$$F(x,y) = f(y-x)$$

In questo caso, posto $y - x = t$ si ritorna alla modellistica ben nota. In tal caso non contano le date di inizio e fine, ma basta la durata di un impiego per valutarne il risultato.

Nei parr. seguenti delineeremo sommariamente come adeguare le formule usuali al caso realistico di tassi variabili.

Capitalizzazione semplice

(a)
Nel caso d'invarianza di tasso il fattore di montante in capitalizzazione semplice ha questa struttura:

$$\text{fattore di montante} = 1 + \text{tasso} \times \text{tempo}$$

Per comprendere il "nodo" della questione basta considerare il caso in cui il "tempo", durata dell'impiego, possa essere diviso

in due periodi con durate rispettive "durata prima" e "durata seconda":

$$\text{tempo} = \text{durata prima} + \text{durata seconda}$$

periodi nei quali vigono i due tassi rispettivi "tasso primo" e "tasso secondo".

In maniera affatto equivalente a quella seguita dagli Istituti di credito nell'appuramento dei conti correnti, il fattore di montante appropriato è:

$$1 + \text{tasso primo} \times \text{durata prima} + \text{tasso secondo} \times \text{durata seconda}$$

Sia, per intenderci, il caso d'un impiego annuale per il quale nei primi sei mesi vige il tasso del 10% e nel secondo dell'11%. Il fattore di montante è:

$$1 + \frac{1}{2} \times 10\% + \frac{1}{2} \times 11\% = 1,105$$

(b)
Nel caso di più variazioni di tasso le complicazioni non sono concettuali, ma meramente di natura computistica. Consideriamo un orizzonte biennale, ripartito in tre periodi di durate rispettive 1 anno, 6 mesi e 6 mesi. Supponiamo che nel primo anno il tasso d'interesse sia 10%, mentre nei due semestri che seguono esso sale di mezzo punto (percentuale) al semestre. Il fattore di montante risulta:

$$1 + 10\% + 10,5\% \times \frac{1}{2} + 11\% \times \frac{1}{2} = 1,2075$$

(c) In generale, assumendo che l'intervallo di tempo da x a y possa suddividersi in n intervalli di durate rispettive t_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), cosicché $y = x + \sum_{s=1}^{n} t_s$, nei quali operano i tassi d'interesse i_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), il fattore di montante risulta:

$$F(x,y) = 1 + \sum_{s=1}^{n} i_s t_s$$

Frequentemente conviene approssimare processi del genere assumendo che il tasso d'interesse possa variare continuamente. Detto

$i(s)$ il tasso che vige in s, dette x, y le epoche iniziale e finale dell'impiego, si avrà :

$$F(x,y) = 1 + \int_x^y i(s)\mathrm{d}s$$

Supponiamo, tanto per fare un esempio, che nel periodo da x a y si assuma un tasso variabile linearmente secondo una legge del tipo:

$$i(s) = i_x + m(s - x)$$

Il fattore di montante risulta:

$$F(x,y) = 1 + \int_x^y [i_x + m(s-x)]\mathrm{d}s = 1 + i_x(y-x) + $$
$$+ m\left[y^2/2 - xy - x^2/2 + x^2\right]$$

Capitalizzazione composta

(a)

Nel caso d'invarianza di tasso il fattore di montante in capitalizzazione composta ha questa struttura:

$$\text{fattore di montante} = (1 + \text{tasso})^{\text{tempo}}$$

Consideriamo il solito caso in cui il "tempo", durata dell'impiego, possa essere diviso in due periodi con durate rispettive "durata prima" e "durata seconda":

$$\text{tempo} = \text{durata prima} + \text{durata seconda}$$

periodi nei quali vigono i due tassi rispettivi "tasso primo" e "tasso secondo".

Il fattore di montante è:

$$(1 + \text{tasso primo})^{\text{durata prima}} \times (1 + \text{tasso secondo})^{\text{durata seconda}}$$

Sia, per intenderci, il caso d'un impiego annuale per il quale nei primi sei mesi vige il tasso del 10% e nel secondo dell'11%. Il fattore di montante è:

$$(1 + 10\%)^{1/2}(1 + 11\%)^{1/2} \simeq 1,104989$$

(b)

Nel caso di più variazioni di tasso vediamo in che cosa consistono le complicazioni di calcolo. Consideriamo un orizzonte biennale, ripartito in tre periodi di durate rispettive 1 anno, 6 mesi e 6 mesi. Supponiamo che nel primo anno il tasso d'interesse sia 10%, mentre nei due semestri che seguono esso salga di mezzo punto (percentuale) al semestre. Il fattore di montante è:

$$(1 + 10\%)\ (1 + 10,5\%)^{\frac{1}{2}}\ (1 + 11\%)^{\frac{1}{2}} \simeq 1,218247$$

(c)

In generale, assumendo che l'intervallo di tempo da x a y possa suddividersi in n intervalli di durate rispettive t_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, cosicché $y = x + \sum_{s=1}^{n} t_s$, nei quali operano i tassi d'interesse i_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, il fattore di montante risulta:

$$F(x,y) = \prod_{s=1}^{n} (1 + i_s)^{t_s}$$

La descrizione di processi del genere con tasso d'interesse che possa variare continuamente richiede qualche nozione aggiuntiva che sarà esposta oltre. Rinviamo al par. sulla *capitalizzazione continua* il completamento di questa presentazione.

Capitalizzazione con interessi (semplici) anticipati

(a)

Nel caso di costanza del tasso il fattore di montante in capitalizzazione semplice ha questa struttura:

$$\text{fattore di montante} = 1 + \text{tasso} \times \text{tempo}$$

Di nuovo consideriamo il caso in cui il "tempo", durata dell'impiego, possa essere diviso in due periodi con durate rispettive "durata prima" e "durata seconda":

$$\text{tempo} = \text{durata prima} + \text{durata seconda}$$

periodi nei quali vigono i due tassi rispettivi "tasso primo" e "tasso secondo". In questo caso tali tassi non sono tassi d'interesse ma tassi di sconto commerciale.

Il fattore di montante appropriato è:

$$\frac{1}{1 - \text{durata prima} \times \text{tasso primo} - \text{durata seconda} \times \text{tasso secondo}}$$

Per es., nel caso d'un impiego annuale per il quale nei primi sei mesi vige il tasso del 10% e nel secondo dell'11%. Il fattore di montante è:

$$\frac{1}{1 - (10\% \times 1/2 + 11\% \times 1/2)} \simeq 1,11732$$

(b)
Nel caso di più variazioni di tasso si complicano un po' i conti. Consideriamo il solito orizzonte biennale, ripartito in tre periodi di durate rispettive 1 anno, 6 mesi e 6 mesi. Supponiamo che nel primo anno il tasso di sconto sia 10%, mentre nei due semestri che seguono esso salga di mezzo punto (percentuale) al semestre. Il fattore di montante risulta:

$$\frac{1}{1 - (10\% \times 1 + 10,5\% \times 1/2 + 11\% \times 1/2)} \simeq 1,26183$$

(c) In generale, assumendo che l'intervallo di tempo da x a y possa suddividersi in n intervalli di durate rispettive t_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), cosicché $y = x + \sum_{s=1}^{n} t_s$, nei quali operano i tassi di sconto d_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), il fattore di montante risulta:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - \sum_{s=1}^{n} d_s t_s}$$

Frequentemente conviene approssimare processi del genere assumendo che il tasso di sconto possa variare continuamente. Detto $d(s)$ il tasso che vige in s, dette x, y le epoche iniziale e finale dell'impiego, si avrà:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - \int_x^y d(s)\mathrm{d}s}$$

Osservo un punto importante che differenzia questo caso da quello apparentemente simile della capitalizzazione a interessi semplici. Uno dei motivi che rende concretamente interessante l'idea di tasso che varia nel tempo è studiare contratti con tasso d'interesse che dipende da più variabili di riferimento e può, dunque, cambiare durante l'intiera vita dell'operazione. Questa "indicizzazione" del tasso va vista come uno strumento di (semi-)automatico allineamento delle condizioni d'un determinato contratto alle condizioni di mercato. Nello spirito di un contratto con interessi (semplici o composti) *posticipati* tali meccanismi s'integrano perfettamente e — aggiungeremmo — dovrebbero costituire in un certo senso la norma. Diversa è la situazione d'un contratto a interessi (semplici) anticipati. In esso le parti pattuiscono una liquidazione immediata dei compensi per l'attività finanziaria, accollandosi entrambe gli opposti rischi di non allineamento. Appare piuttosto innaturale che nel contempo considerino la possibilità di rivedere le condizioni finanziarie di prestazioni che... già sono state eseguite. Segue a questo allora che contratti a interessi semplici anticipati *non* dovrebbero contenere alcuna clausola di indicizzazione. La modellistica sopra proposta ha comunque qualche interesse perché il regime di capitalizzazione a interessi semplici anticipati viene frequentemente usato come regime formale di costruzione di contratti più che come regime che sostanzialmente determina e individua le prestazioni delle parti. In questa luce è ovvio l'atteggiamento riscontrato nella pratica di chi dice: "visto che s'indicizza tutto, perché non indicizzare anche un tasso di sconto commerciale?"

1.7.3 Leggi di attualizzazione con due variabili

(a)
Se si passa al problema dell'attualizzazione non si deve introdurre un nuovo apparato, bastando utilizzare la nozione di regime coniugato o di legge coniugata, già vista nel caso di leggi finanziarie con una variabile, che può essere tranquillamente esteso al caso di leggi con due variabili. Si tratta, semplicemente di prendere il generico fattore di capitalizzazione:

$$\text{fattore di montante} = F(\text{data d'inizio}, \text{data di fine})$$

e considerarne il reciproco:

$$\frac{1}{F(\text{data d'inizio}, \text{data di fine})} = \Phi(\text{data di fine}, \text{data d'inizio})$$

Esso ci dice quale sia il valore alla "data d'inizio" di 1 lira disponibile alla "data di fine". Ne possiamo parlare come di un *fattore di sconto* per una legge (o per un regime) con due variabili.

Si noti la scelta di notazione assolutamente raccomandabile. Con fattori finanziari che caratterizzano leggi con due variabili, la prima variabile è la data di partenza, la seconda quella di arrivo. Nel caso di capitalizzazione la seconda è maggiore della prima, viceversa nel caso dell'attualizzazione.

(b)

I fattori di sconto che caratterizzano i regimi coniugati di quelli usuali in ipotesi di tassi variabili, con l'usuale significato dei simboli, sono i seguenti:

Cap. semplice $\qquad \Phi(y,x) = \left(1 + \sum_{s=1}^{n} i_s t_s\right)^{-1}$

Cap. composta $\qquad \Phi(y,x) = \prod_{s=1}^{n} (1 + i_s)^{-t_s}$

Cap. a int. (sempl.) ant. $\qquad \Phi(y,x) = 1 - \sum_{s=1}^{n} d_s t_s$

(c)

Volendo formalizzare l'ultima osservazione fatta nella parte (a) e introdurre la nozione di *legge finanziaria con due variabili*, nozione che ingloba quelle di legge di capitalizzazione e legge di attualizzazione, si può usare un simbolo anodino quale $L(x,y)$ con questo significato:

$$L(x,y) = \begin{cases} F(x,y) \text{ se } x \leq y \text{ (fattore di montante)} \\ \\ \Phi(x,y) = 1/F(y,x) \text{ se } x \geq y \text{ (fattore di sconto)} \end{cases}$$

1.7.4 Intensità d'interesse

(a)

Un procedimento generale per descrivere la *performance* di una data forma d'impiego in un assegnato intervallo di tempo consiste nel calcolare quale tasso di interesse semplice avrebbe condotto al medesimo risultato. Si consideri un investimento azionario semplicissimo. Un soggetto investe L. 1.000 per comprare un'azione che dopo 3 anni rivende a L. 1.240, non avendo conseguito alcuna entrata (per es. a titolo di dividendo) nell'arco del triennio.

Posso descrivere il risultato dell'impiego dicendo che quel soggetto ha investito a tasso d'interesse semplice dell'8%. Basta infatti che cerchi quale tasso avrebbe condotto al medesimo risultato:

$$1.000\,(1 + \text{tasso} \times 3) = 1.240$$

onde:

$$\text{tasso} = \frac{1.240 - 1.000}{1.000 \times 3} = 0,08 = 8\%$$

Tale tasso si dice di solito *intensità media d'interesse (nel triennio)*.

Tale nozione può essere riferita a intervalli di tempo molto lunghi o anche brevissimi. Usualmente quando si prende un intervallo di tempo così breve da poterlo chiamare "istante", la relativa intensità d'interesse è detta *intensità istantanea d'interesse*. I nostalgici e/o gli anglofili[8] la chiamano anche *forza d'interesse*.

(b)

Si consideri una legge di capitalizzazione con due variabili, descritta dal fattore di montante $F(x,y)$ e si consideri la possibilità di prolungare un impiego iniziatosi in x dal momento y all'epoca successiva $y+h$ (pensando h positivo). In tale prolungamento d'impiego il fattore di montante operante è:

$$g(x,y,h) = \frac{F(x,y+h)}{F(x,y)}$$

e ci dice quanto si riscuote in $y+h$ per ogni lira di montante non riscosso in y. Si tratta, in sostanza, del fattore di montante *virtuale* da y a $y+h$ per una lira inizialmente impiegata in x. E' denominato *fattore di montante di proseguimento* da y a $y+h$ per impieghi iniziatisi in x. Nel caso di leggi finanziarie con una variabile: $F(x,y) = f(y-x) = f(t)$, il montante di proseguimento da t a $t+h$ è dato da $f(t+h)/f(t)$.

Se si volesse descrivere tale impiego con la capitalizzazione semplice si dovrebbe utilizzare quel tasso i tale che:

$$F(x,y+h) = F(x,y)(1+ih)$$

[8] I primi perché una volta s'usava in italiano "forza d'interesse", i secondi perché in inglese si parla di *force of interest*.

ossia:

$$i = i(x,y,h) = \frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{F(x,y)h} = \frac{g(x,y,h) - 1}{h}$$

Esaminiamo un caso speciale e studiamo il comportamento di $i(x,y,h)$ quando l'arco di tempo d'ampiezza h svanisce.

Supponiamo che:

$$F(x,y) = (1 + 10\%)^{y-x}$$

descriva la legge di capitalizzazione che c'interessa: è una volgare legge di capitalizzazione composta al 10%.

Fissiamo $x = 5$, $y = 10$ e consideriamo intervalli di ampiezze sempre più piccole: 1,1/2,1/3,...,1/10. La tavola seguente esibisce i valori che in corrispondenza assume il tasso $i(x,y,h)$:

Ampiezza dell' intervallo h	Valore di $i(5,10,h)$
1	0,1
1/2	0,09761769634
1/3	0,09684034637
1/4	0,09645475634
1/5	0,09622438246
1/6	0,09607120664
1/7	0,09596199407
1/8	0,09588019312
1/9	0,09581663437
1/10	0,09576582777

Come si vede, i valori del tasso i si stabilizzano man mano che rimpicciolisce l'ampiezza dell'intervallo. Nella parte successiva del paragrafo si preciserà e confermerà questo comportamento rivelato da qualche esperimento numerico. L'intensità istantanea d'interesse è il valore verso il quale si stabilizza $i(x,y,h)$ quando h si avvicina indefinitamente a 0.

(c)

Si consideri l'espressione sopra costruita per l'intensità d'interesse:

$$i = i(x,y,h) = \frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{F(x,y)h} = \frac{g(x,y,h) - 1}{h}$$

Se assumiamo che F, pensata come funzione del suo secondo argomento, sia differenziabile, esiste il limite per $h \to 0$ di $i(x,y,h)$, denotato nel seguito con $\delta(x,y)$:

$$\begin{aligned}\delta(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{F(x,y)h} = \\ &= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{F(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y} \ln F(x,y)\end{aligned}$$

La funzione $\delta(x,y)$ si dice *intensità istantanea d'interesse* di F in y per impieghi iniziatisi in x.

Se, per esempio:

$$F(x,y) = (1 + i_x)^{y-x}$$

l'intensità istantanea d'interesse risulta:

$$\delta(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \ln F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y-x) \ln(1+i_x) = \ln(1+i_x)$$

Nel caso in cui una legge di capitalizzazione con due variabili fosse sostanzialmente una legge con una variabile:

$$F(x,y) = f(y-x) = f(t) \text{ con } t = y - x$$

l'intensità istantanea d'interesse $\delta(y-x) = \delta(t)$ è:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

1.7.5 Capitalizzazione continua

(a)

La nozione sopra delineata di intensità istantanea d'interesse ci suggerisce un modo estremamente utile di pensare la dinamica "in piccolo" di una qualunque legge di capitalizzazione.

Attraverso l'esempio numerico riportato nella parte **(b)** possiamo cogliere il fatto fondamentale: *qualunque legge di capitalizzazione agisce istantaneamente come una legge di capitalizzazione semplice che fa maturare interessi semplici sul "capitale" rappresentato dal montante fino a quel momento accumulato e con tasso d'interesse proprio l'intensità istantanea.*

Questo fatto può essere descritto anche dicendo che un qualunque processo di capitalizzazione può essere pensato come se fosse di *capitalizzazione continua*: gli interessi semplici prodotti istante per istante sono immediatamente reinvestiti ed iniziano a produrre, a loro volta, altri interessi.

(b)

Cominciamo con lo stimare con maggior cura attorno a quale valore si stabilizzi l'intensità d'interesse. Tale valore può calcolarsi assumendo un intervallo di tempo sufficientemente piccolo. Comunque si ha[9]:

$$\delta(5,10) \simeq 0,09531$$

cui già ci si era avvicinati con la tabella prima riportata.

Gli interessi esattamente maturati tra 10 e $10+1/100$ sono:

$$F(5,10+1/100)-F(5,10) = 1,1^{10+1/100-5)}-1,1^{10-5)} \simeq 0,0015357$$

Possiamo valutarli approssimativamente come interessi semplici:

$$F(x,y) \times \delta(x,y) \times h \simeq 1,1^{10-5} \times 0,09531 \times 1/100 \simeq 0,00153498$$

effettivamente vicino al valore "esatto".

(c)

La differenziabilità di F rispetto al suo secondo argomento implica:

$$F(x,y+h) = F(x,y) + h\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + o(h) \text{ per } h \to 0$$

da cui:

$$F(x,y+h) - F(x,y) = F(x,y)\frac{1}{F(x,y)}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}h + o(h)$$

ossia:

$$F(x,y+h) - F(x,y) = F(x,y)\delta(x,y)h + o(h)$$

[9] Nella parte (c) i curiosi trovano gli strumenti per valutare autonomamente tale quantità.

Questa formula ci dice che la crescita istantanea di $F(x,y)$ è ben approssimabile con gli interessi semplici calcolati su $F(x,y)$ a tasso $\delta(x,y)$.

Nel caso speciale di leggi finanziarie con una variabile si può descrivere la dinamica del montante in ipotesi di differenziabilità del fattore di montante f attraverso l'equazione:

$$f(t+h) - f(t) = f(t)\delta(t)h + o(h)$$

Un caso di grande importanza pratica è quello in cui $\delta(t) = \delta$ costante. Si riprenda l'equazione scritta sopra, si divida per h a membro a membro:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t)\delta + \frac{o(h)}{h}$$

Se $h \to 0$ il secondo membro converge a $f(t)\delta$, allora converge anche il primo e, per definizione di derivata, convergere a $f'(t)$. Per l'unicità del limite deve aversi:

$$f'(t) = \delta f(t)$$

da cui:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \mathrm{D}\ \ln f(t) = \delta$$

Le funzioni con derivata costante (e pari a δ) sono tutte e sole le lineari affini con coefficiente angolare δ:

$$\log f(t) = \delta t + q$$

Fatto $t = 0$ resta $\log f(0) = q$. Poiché $f(0) = 1$ deve essere $q = 0$ e quindi $\log f(t) = \delta t$. Se ne trae:

$$f(t) = e^{\delta t}$$

Trattandosi di una funzione esponenziale, il regime finanziario con una variabile caratterizzato da intensità istantanea d'interesse costante è il regime della capitalizzazione composta. E' naturale indagare sul legame tra il parametro δ ed il tasso annuo d'interesse i, più comunemente usato nella pratica. Perché un parametro δ ed un parametro i individuino la stessa legge finanziaria deve valere per ogni t l'uguaglianza:

$$e^{\delta t} = (1+i)^t$$

Elevando a $1/t$ ambo i membri si ottiene la fondamentale relazione:

$$e^{\delta} = 1+i$$

dalla quale si possono trarre le due relazioni:

$$\begin{cases} \delta = \ln(1+i) \\ i = e^{\delta} - 1 \end{cases}$$

che, rispettivamente, forniscono l'intensità istantanea d'interesse in funzione del tasso annuo e viceversa. Si noti che l'intensità istantanea d'interesse era già comparsa sotto mentite spoglie sopra, quando si parlò di confronto tra regimi di capitalizzazione.

1.7.6 L'ASSENZA DI ARBITRAGGIO (SCINDIBILITÀ)

(a)

Già s'è detto che cosa significa *scindibilità* e della sua importante interpretazione come *assenza di possibilità di arbitraggio.* E' semplicemente la proprietà delle leggi finanziarie per le quali le interruzioni con immediata ripresa dell'investimento non hanno riflessi sul risultato finale.

E' naturale chiedersi quali leggi di capitalizzazione a due variabili posseggano questa proprietà. Detto, al solito, F il generico fattore di montante e considerate tre date, iniziale, intermedia e finale deve valere:

$$F(\text{iniziale}, \text{finale}) = F(\text{iniziale}, \text{intermedia}) \times F(\text{intermedia}, \text{finale})$$

Vi sono due importanti risultati che, in maniera diversa, caratterizzano i processi di capitalizzazione scindibili. Forniamo qui sotto le due caratterizzazioni:

1. Una legge di capitalizzazione con due variabili è scindibile se e solo se il fattore di capitalizzazione $F(x,y)$ si può rappresentare come fattore di montante di proseguimento relativo ad una legge con una variabile f. Ossia se e solo se esiste f:

$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

2. Una legge di capitalizzazione con due variabili che ammetta[10] intensità istantanea d'interesse $\delta(x,y)$ è scindibile se e solo se tale intensità non dipende dall'epoca di inizio dell'impiego, ossia non dipende da x, ma dipende, al più, dal momento y in cui agisce.

(b)

Non è difficile comprendere il significato finanziario intuitivo delle due condizioni.

La *prima condizione* caratterizza le leggi scindibili dicendoci che sono quelle che "cavalcano" nel periodo tra x e y un processo di capitalizzazione qualsiasi, rappresentato da una generica legge di capitalizzazione con una variabile.

La *seconda condizione*[11] chiarisce tale "cavalcata" in termini di tasso d'interesse. Scindibilità vuol dire che la redditività di un impiego in un dato momento è la stessa qualunque sia l'epoca alla quale l'impiego si è iniziato. Tale redditività dipende, al più, dal momento in cui si manifesta (y), ma non dal momento in cui era stata stipulata l'o.f. in discorso.

(c)

Vediamo come provare le due condizioni:

Prima condizione — Se, con $x \le z \le y$:

$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

si ha:

$$F(x,z)F(z,y) = \frac{f(z)}{f(x)}\frac{f(y)}{f(z)} = \frac{f(y)}{f(x)} = F(x,y)$$

[10]Quando abbiamo incontrato la nozione di intensità istantanea d'interesse non s'è detto che l'intensità potrebbe non esistere. In realtà basta che il grafico di $F(x,y)$, con x fissato, al variare di y sia "liscio" affinché l'intensità esista.

[11]Nota come *condizione di F.P. Cantelli*, dal nome di chi per primo la segnalò.

Dunque la condizione è sufficiente. Per provare che è necessaria, muoviamo dalla condizione di scindibilità:

$$F(x,z)F(z,y) = F(x,y)$$

Poiché il secondo membro non contiene z, possiamo fissare il valore di tale grandezza: $z = z^*$. Conseguenza di questo è che i due fattori a primo membro divengono funzione di una sola variabile: $F(x,z^*) = g(x)$, $F(z^*,y) = f(y)$ onde:

$$g(x)f(y) = F(x,y)$$

Poiché per ogni x deve aversi $F(x,x) = 1$, l'ultima equazione scritta comporta che per tutti i valori di x sia $g(x)f(x) = 1$, da cui:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

onde:

$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

che è proprio la rappresentazione indicata.

Seconda condizione — Cominciamo col provare la necessità della condizione in ipotesi di differenziabilità di F rispetto al secondo argomento. Da:

$$F(x,z)F(z,y) = F(x,y)$$

si trae:

$$\ln[F(x,z)] + \ln[F(z,y)] = \ln[F(x,y)]$$

Quest'uguaglianza è un'identità: essa deve valere per tutte le scelte delle variabili in giuoco. Pensando primo e secondo membro dell'uguaglianza come funzioni di y, essi sono due modi diversi di descrivere *la stessa* funzione. Discende allora che se si derivano (rispetto a y) ambo i membri s'ottiene lo stesso risultato[12]. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln[F(x,z)] + \ln[F(z,y)]) = \frac{\partial}{\partial y}\ln[F(x,y)]$$

[12] A meno di non sbagliare la derivata. Ma speriamo di no!

Poiché, a primo membro, il primo addendo non dipende da y e quindi ha derivata nulla, l'uguaglianza si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln[F(z,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[\ln[F(x,y)]]$$

Detta δ l'intensità istantanea d'interesse si ha finalmente:

$$\delta(z,y) = \delta(x,y)$$

che ci dice esattamente quanto ci aspettiamo: "Se vuoi la scindibilità devi avere tasso che agisce in y, $\delta(.,y) = \delta(y)$ indipendente dall'epoca di decorrenza dell'impiego".

Provare la proposizione inversa, ossia che dalla condizione (di Cantelli):

$$\delta(x,y) = \delta(y)$$

discende la scindibilità non è difficile ed è foriero di interessanti conseguenze collaterali.

Si prenda tale intensità istantanea d'interesse $\delta(t)$ e si consideri la seguente ovvia uguaglianza:

$$\int_x^y \delta(s)\mathrm{d}s = \int_x^z \delta(s)\mathrm{d}s + \int_z^y \delta(s)\mathrm{d}s$$

Una primitiva di δ è, per definizione, $\ln F$, cosicché l'uguaglianza diviene:

$$|\ln F(x,s)|_x^y = |\ln F(x,s)|_x^z + |\ln F(z,s)|_z^y$$

onde:

$$\ln\left[\frac{F(x,y)}{F(x,x)}\right] = \ln\left[\frac{F(x,z)}{F(x,x)}\right] + \ln\left[\frac{F(z,y)}{F(z,z)}\right]$$

che banalmente si riscrive:

$$F(x,z)F(z,y) = F(x,y)$$

che è il nostro punto d'arrivo.

E' interessante segnalare un passaggio intermedio per il suo significato finanziario. Poiché:

$$\int_x^y \delta(s)\mathrm{d}s = \ln F(x,y)$$

si ottiene:

$$F(x,y) = e^{\int_x^y \delta(s)ds}$$

Tale relazione ci dice che una qualunque legge con due variabili scindibile si può pensare come una legge di capitalizzazione composta continua con intensità istantanea d'interesse $\delta(.)$ comunque variabile. Questa è la formula sopra preannunciata e per la quale eravamo in debito con il lettore.

Si noti che se $\delta(.) = \delta$ costante, ci si riduce a:

$$F(x,y) = e^{\int_x^y \delta ds} = e^{\delta(y-x)}$$

da cui, ponendo $y - x = t$:

$$F(x,y) = f(y-x) = f(t) = e^{\delta t}$$

e ritroviamo la cara, vecchia capitalizzazione composta a tasso costante.

Un'ultima osservazione. Nel caso di leggi con una variabile, per le quali:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \delta(t)$$

l'indipendenza dalla decorrenza dell'impiego che caratterizza la scindibilità implica la costanza di $\delta(.)$. Sopra già abbiamo visto che se $\delta(.) = \delta$ si ritrova la capitalizzazione composta a tasso costante. Segue a questo che la condizione di scindibilità per leggi con una variabile (differenziabili) è ricompresa nella condizione di Cantelli.

1.7.7 Valutazioni in termini reali

(a)

Vediamo in quest'ultimo paragrafo una sorta di "calcolo finanziario" in presenza d'inflazione. Ancorché appena accennata la trattazione consentirà di fare interessanti considerazioni di pratica rilevanza. Illustreremo, per es., i motivi per cui una parte non trascurabile delle modalità fissate dalla magistratura per la liquidazione di ammontari dovuti in seguito alla chiusura di cause giudiziarie siano logicamente mal fondate. Non occorre che distinguiamo la trattazione in funzione dei vari regimi finanziari usuali.

2

Calcoli su rendite

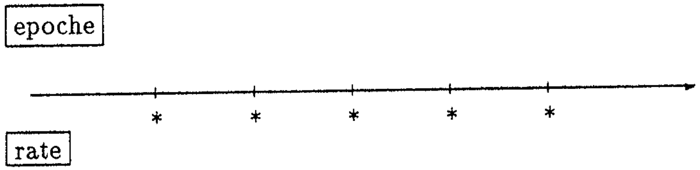
(a)
Molto frequentemente si presenta nella pratica l'esigenza di considerare più somme di danaro, spesso tutte dello stesso segno (tutte entrate o tutte uscite), ciascuna con una sua scadenza e si vogliono riportare queste somme di danaro tutte ad una stessa scadenza, sostituendole con un unico ammontare monetario.

La sequenza delle somme di danaro si chiama *rendita*, le singole somme di danaro si chiamano *rate* della rendita. Frequentemente, ma non necessariamente, le scadenze, ossia le epoche alle quali si riscuoteranno o si pagheranno le rate sono equidistanti, ed hanno cadenza mensile, bimestrale, trimestrale, annua ecc. In presenza di tale genere di regolarità si parla di *rendite periodiche*, e, in particolare, rispettivamente, di *rendite mensili, bimestrali, trimestrali, annue*. Esamineremo dapprima le rendite annue, dicendo poi che cosa va modificato per trattare le rendite con cadenze inferiori all'anno, che si dicono rendite *frazionate*. Nel *corpus* della matematica finanziaria si prendono in considerazione anche rendite periodiche con periodicità superiore all'anno, le c.d. rendite *poliennali*. Il loro scarso interesse attuale ci sconsiglia di prenderle in considerazione.

Ci si possono aspettare delle facilitazioni di calcolo quando le scadenze sono regolarmente distribuite nel tempo e gli ammontari delle rate sono costanti o variano in maniera sufficientemente regolare. Ci occuperemo, nell'intento di trovare semplificazioni, soltanto del caso di rendite a rata costante. Anche se per altri casi esistono semplificazioni, queste avevano interesse in passato, quando i calcoli erano usualmente fatti a mano. In ipotesi attuale e realistica di calcoli fatti automaticamente, queste semplificazioni non meritano più grande attenzione. Daremo infatti alcune formule generalissime, applicabili a qualunque fattispecie.

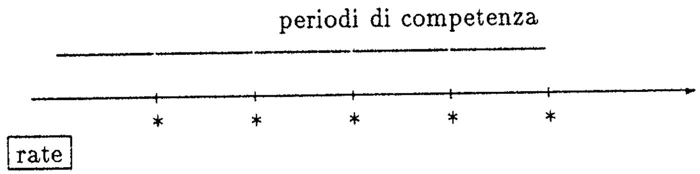
Una nozione importante che riguarda le rendite periodiche è connessa alla loro interpretazione come rendite anticipate o posticipate.

Consideriamo versamenti mensili, raffigurati con asterischi in corrispondenza ai punti su un asse dei tempi che rappresentano le loro scadenze, assunte mensili:



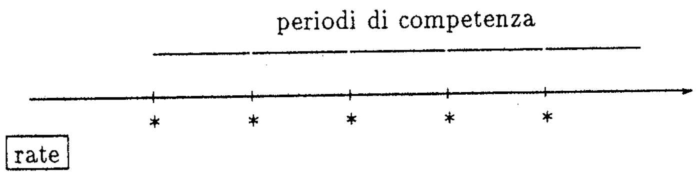
Pagamenti ogni mese fanno pensare a controprestazioni regolarmente distribuite nel tempo. Esaminiamo le due situazioni che nella pratica comunemente si incontrano. Se, per es., tali versamenti mensili fossero canoni di *leasing*, la controprestazione è la disponibilità del bene, se rate di una rateazione, la controprestazione è la disponibilità del capitale, cosicché, in genere, ad ogni versamento si può far corrispondere un periodo di competenza (rappresentato con un trattino), che si chiude proprio con il versamento della rata corrispondente o si apre con tale versamento:

I possibilità:



In questo caso, rispetto al periodo di competenza, il versamento della rata è posticipato.

II possibilità:



In questo caso, rispetto al periodo di competenza, il versamento della rata è anticipato.

Si parla, nel primo caso, di *rendite posticipate* e nel secondo di *rendite anticipate.*

La *decorrenza* di una rendita è l'epoca di inizio del primo periodo di competenza ed è quindi un periodo prima della prima rata nel caso posticipato, all'atto della prima rata nel caso anticipato.

Interessa, come s'è detto, riportare tutte le rate d' una rendita ad una medesima scadenza. Di particolare interesse pratico è calcolare quanto vale l'intiera rendita ad una scadenza non posteriore a quella della prima rata o non anteriore alla scadenza dell'ultima. Si parla, nel primo caso di *valore attuale* o *valore scontato* della rendita, nel secondo di *montante* della rendita. In assenza di specificazioni il valore attuale si calcola alla decorrenza, il montante alla fine dell'ultimo periodo di competenza. Questo comporta che il valore attuale di una rendita pensata posticipata si calcola un periodo prima della prima scadenza, il suo montante all'atto dell'ultimo versamento; il valore attuale di una rendita pensata anticipata si calcola all'atto della prima scadenza, mentre il montante un periodo dopo l'ultima.

Quando si calcola un valore attuale, diciamo 3 periodi prima della prima scadenza di dice che si considera la rendita differita. Se si pensa la rendita anticipata il differimento è di 3 periodi, se si pensa la rendita anticipata di 2.

Abbiamo insistito nello scrivere "se si pensa" perché una rendita, dal punto di vista del calcolo finanziario, può pensarsi anticipata o posticipata, come si preferisce. Basta poi "aggiustare" il differimento.

In generale, per calcolare il montante di una rendita ad una scadenza qualsiasi, si sommano i montanti delle singole rate a tale scadenza, mentre per calcolare il valore attuale di una rendita si sommano i valori attuali delle singole rate.

I montanti si ottengono, ovviamente, moltiplicando le singole rate per i fattori di montante corrispondenti, i valori attuali si ottengono moltiplicando le singole rate per i corrispondenti fattori di sconto.

Graficamente i due procedimenti sono illustrati sotto. Consideriamo una rendita che prevede le seguenti rate alle scadenze indicate a partire da oggi:

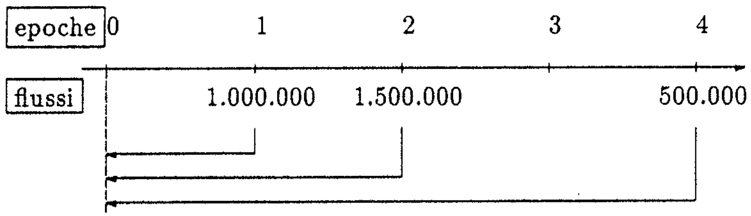
Scadenza	Ammontare della rata
0	-
1	1.000.000
2	1.500.000
3	-
4	500.000

Per il calcolo del valore attuale, per es. all'epoca 0, si debbono "riportare indietro" le somme disponibili alle scadenze 1, 2 e 4 attraverso un'opportuno processo di attualizzazione.

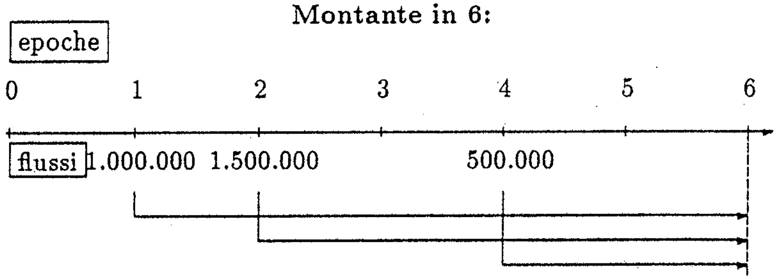
Per il calcolo del montante, per es. all'epoca 6, si debbono "portare avanti" tali somme dalle loro scadenze fino all'epoca 6.

Graficamente si ha:

Valore attuale in 0:



Montante in 6:



(b)

Prendiamo l'esempio numerico di cui al precedente paragrafo ed eseguiamo i calcoli usando per l'attualizzazione una legge di sconto razionale a tasso d'interesse 10%, mentre per la capitalizzazione useremo una legge a interessi anticipati con tasso di sconto 15%.

Nel caso del valore attuale si ha:

$$\text{val. att.} = \frac{1.000.000}{1+0,1\times 1} + \frac{1.500.000}{1+0,1\times 2} + \frac{500.000}{1+0,1\times 4} =$$

$$= 1.000.000/1,1 + 1.500.000/1,2 + 500.000/1,4 \simeq 2.516.234$$

$$\text{mont.} = \frac{1.000.000}{1-0,15\times 5} + \frac{1.500.000}{1-0,15\times 4} + \frac{500.000}{1-0,15\times 2} \simeq 8.464.286$$

(c)

Una rendita è caratterizzata da n scadenze $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (che pensiamo ordinate in senso crescente) e dai corrispondenti ammontari delle rate $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

La valutazione d'una rendita siffatta sia da farsi con una legge di capitalizzazione f o di attualizzazione ϕ.

Il montante $M(T)$ ad una scadenza T ($T \geq t_n$) si otterrà sommando i montanti delle singole rate:

$$M(T) = \sum_{s=1}^{n} r_s f(T - t_s)$$

Il valore scontato ad una scadenza t (che precede tutte le t_s), si otterrà sommando i valori attuali delle rate:

$$A(t) = \sum_{s=1}^{n} r_s \phi(t_s - t)$$

2.1 Uso di leggi esponenziali

2.1.1 INTRODUZIONE

Quando le rate di una rendita sono costanti ed equidistanti e quando la legge finanziaria usata è una legge esponenziale (di interesse o sconto composto) vi sono alcune significative semplificazioni rispetto al piatto calcolo di una somma di valori attuali o di montanti di rate. I risultati si possono ottenere attraverso la semplice moltiplicazione dell'ammontare della rata per un opportuno coefficiente, spesso ottenibile facilmente con una calcolatrice o, addirittura, rintracciabile sulle tavole finanziarie.

Facciamo prima conoscenza con questi simboli, per vederne successivamente l'uso in concreto.

Rendite annue a rata costante

Consideriamo il seguente schema di rendita:

epoche	0	1	2	...	9	10
flussi		1	1	...	1	1

Essa è costituita da 10 rate unitarie con scadenze $1, 2, 3, \ldots, 10$. Pensiamo il tempo espresso in anni.

Il valore attuale a sconto composto, calcolato all'epoca 0, di tutte queste rate unitarie, che si potrebbe calcolare banalmente sommando i dieci valori attuali delle 10 rate può essere letto su apposite tavole o calcolato con un apposito tasto di una calcolatrice finanziaria. Se $0,05 = 5\%$ è il tasso di interesse relativo al periodo di tempo unitario (quello che passa tra una rata e l'altra, nel caso in esame: l'anno), il valore attuale della rendita descritta si indica con il seguente simbolo:

$$a_{\overline{10}|5\%}$$

che si legge "a posticipato figurato 10 a tasso 5%". I due parametri: 10 e $5\% = 0,05$ sono, ovviamente, numero di rate e tasso. L'aggettivo "posticipato" si riferisce al fatto che la rendita viene considerata posticipata: ne viene calcolato il valore attuale un periodo prima della prima scadenza. Spesso, quando non occorre indicare il tasso di calcolo (per es. perché è sottinteso), si usa ometterlo nel simbolo e si scrive:

$$a_{\overline{10}|}$$

Supponendo di aver a disposizione una tavola finanziaria o una calcolatrice, troveremmo:

$$a_{\overline{10}|5\%} \simeq 7,72173493$$

Qualora la rata non fosse unitaria, ma, mettiamo, di 100 lire, l'analogo valore attuale si otterrebbe moltiplicando per il coefficiente trovato l'ammontare della rata.

Supponiamo, per intenderci, che lo schema della rendita sia il seguente:

epoche	0	1	2	...	9	10
flussi		100	100	...	100	100

Il suo valore scontato in 0 sarebbe:

$$100 \times a_{\overline{10}|} = 100 \times 7,72173497 \simeq 772$$

Volendo calcolare il montante in 10, all'atto della scadenza dell'ultima rata, invece di sommare i montanti delle singole rate, è equivalente moltiplicare l'ammontare della rata annua per un apposito coefficiente, analogo al precedente, che si denota con:

$$s_{\overline{10}|0,05}$$

che si legge "s posticipato figurato 10 a tasso 0,05".

Tale coefficiente può leggersi su apposite tavole finanziarie o calcolarsi con una macchinetta. Esso vale:

$$s_{\overline{10}|0,05} = 12,57789254$$

e ne può esser fatto un uso analogo a quello sopra visto per il calcolo di valori attuali. Anche per esso è tollerata l'omissione del tasso.

Qualora il valore attuale fosse calcolato all'atto della scadenza della prima rata o il montante fosse calcolato un anno dopo la scadenza dell'ultima si parla di rendite anticipate e gli analoghi coefficienti si ottengono sostituendo ad a e s, rispettivamente $\ddot{a}$ e $\ddot{s}$. Ovviamente i valori numerici di questi coefficienti risultano lievemente diversi. Normalmente essi non si leggono direttamente sulle tavole finanziarie perché possono da esse ricavarsi con un semplicissimo calcolo mentale. Consideriamo infatti lo schema dei versamenti di una rendita anticipata di una lira/anno per 10 anni:

epoche	0	1	2	...	9	10
flussi	1	1	1	...	1	

Isoliamone provvisoriamente il primo termine:

epoche	0	1	2	...	9	10
flussi	$\boxed{1}$	1	1	...	1	

Essa si riduce ad una rendita posticipata, analoga alla precedente, di durata 9.

epoche	0	1	2	...	9	10
flussi	1	1	1	...	1	

Il suo valore attuale è:

$$a_{\overline{9}|0,05} = 7,107821676$$

Se ora aggiungiamo la rata provvisoriamente dimenticata, che vale 1 e non abbisogna di attualizzazione, otteniamo:

$$\ddot{a}_{\overline{10}|0,05} = 1 + a_{\overline{9}|0,05} \simeq 1 + 7,107821676 = 8,107821676$$

Analogamente, per una rendita anticipata di cui si voglia calcolare il montante all'atto dell'ultima scadenza si può sfruttare una relazione del tipo:

$$\ddot{s}_{\overline{10}|0,05} = s_{\overline{11}|0,05} - 1 \simeq 13,20678716$$

di evidente significato.

Analogamente si trattano problemi in cui si vuole attualizzare una rendita siffatta *tot* anni prima della prima scadenza e calcolarne il montante *tot* anni dopo l'ultima. Facciamo soltanto un semplice esempio. Lo schema della rendita sia il seguente:

epoche	0	1	2	3	4	5	...	10
flussi					100	100	...	100

Se ne voglia calcolare il valore attuale in 0. Conviene inserire tre "rate-fantasma" da 100 lire alle scadenze 1,2,3, ottenendo:

epoche	0	1	2	3	4	5	...	10
flussi		100	100	100	100	100	...	100

Il valore attuale della "rendita arricchita" è:

$$100a_{\overline{10}|}$$

Per avere il valore attuale della rendita di partenza basta togliere da questo ammontare il valore scontato delle "rate-fantasma":

$$100a_{\overline{3}|}$$

e s'ottiene:

$$100a_{\overline{10}|} - 100a_{\overline{3}|} = 100\left(a_{\overline{10}|} - a_{\overline{3}|}\right)$$

poiché, a tasso del 5%:

$$a_{\overline{10}|} = 7,72173493 \ ; \ a_{\overline{3}|} = 2,72324803$$

il valore scontato della rendita è:

$$100(7,72173493 - 2,72324803) = 100 \times 4,9984869 \simeq 500$$

Frequentemente, nella pratica, si deve dividere per $a_{\overline{n}|}$ o per $s_{\overline{n}|}$. Questo è tipico della soluzione di problemi inversi: "Qual è la rata tale che il valore attuale risulta *tot*?", ecc.

Dividere per un coefficiente è aritmeticamente equivalente a moltiplicare per il suo reciproco. Sulle tavole finanziarie si trovano ordinariamente tabulate quantità del tipo seguente:

$$1/a_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i} \ ; \ 1/s_{\overline{n}|i} = \sigma_{\overline{n}|}$$

$$1/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{\alpha}_{\overline{n}|i} \ ; \ 1/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{\sigma}_{\overline{n}|}$$

Si trovano, per es., i seguenti due valori:

$$a_{\overline{10}|0,1} \simeq 6,144567106$$

$$\alpha_{\overline{10}|0,1} \simeq 0,1627453949$$

Volendo trovare quale rata annua pagabile posticipatamente per 10 anni dà al 10% un valore attuale di lire 100.000, possiamo eseguire il calcolo, a scelta, come segue:

$$\text{rata} = 100.000/a_{\overline{10}|0,1} \simeq 100.000/6,144567106 \simeq 16.275$$

oppure:

$$\text{rata} = 100.000\alpha_{\overline{10}|0,1} \simeq 100.000 \times 0,1627453949 \simeq 16.275$$

(b)

Per i coefficienti a ed s, siano essi anticipati o posticipati, si possono ottenere espressioni comode per il calcolo. Prendiamo, per es., $a_{\overline{10}|0,05}$.

Sarebbe pura follia calcolarlo come somma:

$$a_{\overline{10}|0,05} = 1/1,05 + 1/1,052 + \ldots + 1/1,0510 \simeq$$

$$\simeq 0,9523809524 + 0,9070294785 + \ldots + 0,6139132535 \simeq 7,72173493$$

Si ottiene lo stesso risultato con questa semplice sequenza di operazioni:

$$(1 - 1,05^{-10})/0,05 \simeq 7,72173493$$

ossia, in generale:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Per il montante si ottiene, analogamente:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Non indichiamo analoghe espressioni per i coefficienti relativi a rendite anticipate.

Naturalmente si possono dare espressioni opportune anche per i reciproci $\alpha_{\overline{n}|i}$ e $\sigma_{\overline{n}|i}$ (sia anticipati sia posticipati di a ed s).

(c)

Poniamo, per brevità, $y = a_{\overline{n}|i}$ e $v = 1/(1+i)$. Si ha:

$$y = v + v^2 + \ldots + v^n$$

Moltiplicando ambo i membri per $u = 1 + i$ si ha:

$$uy = 1 + v + \ldots + v^{n-1}$$

Sottraendo a membro a membro le due ultime equazioni scritte si ottiene:

$$uy - y = 1 - v^n$$

onde:

$$y = \frac{1 - v^n}{i}$$

che è l'espressione annunciata precedentemente per $a_{\overline{n}|i}$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Sfruttando la proprietà di scindibilità della capitalizzazione composta si trova:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}.u^n = \frac{1-v^n}{i}.u^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Rendite frazionate

Molto frequentemente nella pratica pagamenti periodici costanti non hanno cadenza annuale, ma molto più ravvicinata (mensile, bimestrale, semestrale). E' il caso di canoni di locazione, di rate di rimborso di mutui, di finanziamenti, ecc.

Che cosa cambia nella valutazione finanziaria di questi insiemi di prestazioni?

Non cambia nulla dal punto di vista della filosofia generale di calcolo, ma bisogna tener conto del più fitto presentarsi nel tempo delle prestazioni.

Ricevere, per fissare le idee, 1.000.000 alla fine di un dato anno è peggio che ricevere due rate di 500.000 lire ciascuna a distanza di 6 e 12 mesi rispettivamente.

E' interessante mostrare allora che la valutazione di una rendita frazionata (per es. semestrale) si può ottenere dalla valutazione della corrispondente rendita annua mediante una correzione per frazionamento. Questo è, in effetti, uno dei modi di fare il calcolo. Un altro modo è quello consistente nel calcolare il tasso d'interesse periodale, con riferimento al periodo intercorrente tra due rate e lavorare come se si trattasse di anni. Questo approccio periodale è, di fatto, il secondo approccio che può essere seguito.

Illustro con un esempio le due maniere di procedere.

Sia da valutare in 0 una rendita mensile di 100.000 che dura tre anni. Il tasso d'interesse (annuo effettivo) sia 15%.

Secondo il primo approccio si deve anzitutto computare la somma annua complessivamente versata:

$$100.000 \times 12 = 1.200.000$$

Si deve poi attualizzare la rendita come se fosse annua:

$$1.200.000 a_{\overline{3}|0,15} \simeq 1.200.000 \times 2,283225117 \simeq 2.739.870$$

Questa valutazione è però imprecisa perché non tiene conto del frazionamento mensile dei pagamenti. Le tavole finanziarie riportano fattori di correzione per frazionamento sia per rendite anticipate sia per rendite posticipate. Tali fattori dipendono sia dal tasso di interesse sia dalla frequenza (12 nel caso mensile) di pagamento delle rate. Tale fattore vale, nel caso in esame:

$$1,067015677$$

cosicché il valore attuale corretto si ottiene da quello impreciso moltiplicandolo per questo fattore di correzione:

$$2.739.870 \times 1,067015677 \simeq 2.923.484$$

Alternativamente si può calcolare il tasso mensile effettivo equivalente al 15% esso risulta:

$$1,1714917\%$$

e procedere poi al calcolo di:

$$100.000 a_{\overline{36}|0,011714917} = 100.000 \times 29,23484387 \simeq 2.923.484$$

Questo secondo procedimento comporta il calcolo di un coefficiente ad un tasso non tondo e questo, lavorando con le tavole finanziarie, dà qualche inconveniente perché bisogna procedere per interpolazione. Per fortuna, comunque, ormai le tavole finanziarie appartengono alla preistoria del calcolo finanziario!

Lo stesso coefficiente di correzione che vale per l'attualizzazione serve anche a correggere il calcolo di montanti.

(b)

Basta che indichi come si ottengono i *fattori di correzione*.

La loro struttura è molto semplice se descritta in termini di tasso nominale e tasso effettivo. Precisamente, con riferimento ad un dato tasso effettivo, al suo tasso nominale equivalente convertibile tante volte quant'è la frequenza annua di pagamento delle rate, per rendite posticipate il fattore di correzione è:

$$\text{fattore} = \frac{\text{tasso effettivo}}{\text{tasso nominale}}$$

mentre per rendite anticipate il fattore è:

$$\text{fattore} = \frac{\text{tasso effettivo}}{\text{tasso nominale}} \times (1 + \text{tasso effettivo})^{1/\text{frequenza}}$$

così, per es., nel caso sopra visto:

$$\text{tasso effettivo} = 15\%; \ \text{frequenza} = 12;$$

il tasso mensile equivalente è:

$$1,15^{1/12} - 1 = 1,1714917\%$$

il tasso nominale annuo convertibile 12 volte equivalente è:

$$12 \times 1,1714917\% = 14,0579003\%$$

il fattore di correzione per rendite posticipate è allora:

$$15/14,0579003 = 1,067015677$$

prima indicato.

Per rendite anticipate si dovrebbe ulteriormente moltiplicare tale fattore per:

$$1,011714917$$

nella fattispecie ottenendo:

$$1,079515677$$

così la valutazione prima data della rendita un mese prima della scadenza della prima rata, se si volesse alla scadenza della prima rata, sarebbe:

$$1.200.000 a_{\overline{3}|0,15} \times 1,079515677 =$$

$$= 1.200.000 \times 2,283225117 \times 1,0795156 \simeq 2.957.733$$

(c)

Mostriamo come nasce l'espressione sopra vista per il fattore di correzione. Siano n gli anni di durata di una rendita frazionata posticipata, sia m la frequenza annua dei pagamenti e sia R l'ammontare mensile degli stessi. Sia infine i il tasso annuo effettivo di interesse. Si ponga $v = 1/(1+i)$ e $u = 1+i$ e si indichi, al solito, con i_m il tasso periodale effettivo ($i_m = u^{1/m} - 1$).

Il valore attuale y della rendita è:

$$y = Rv^{1/m} + Rv^{2/m} + \ldots + Rv^{(mn)/m}$$

Moltiplicando ambo i membri per $u^{1/m}$ e sottraendo, si ha:

$$yu^{1/m} - y = R(1 - v^n)$$

onde:

$$y = R(1 - v^n)/i_m$$

e infine:

$$y = mR\frac{1 - v^n}{mi_m} = mR\frac{1 - v^n}{i} \times \frac{i}{j_m} = mRa_{\overline{n}|i} \times \frac{i}{j_m}$$

Il fattore di correzione per rendite frazionate anticipate si ricava analogamente ed è pari a:

$$\frac{i}{j_m}(1 + i)^{1/m}$$

Tavole finanziarie

(a)

Come già sopra scrivemmo, fa parte della preistoria del calcolo finanziario l'uso di tavole finanziarie che raccolgono i valori delle principali funzioni finanziarie fin qui viste. Non intendiamo qui descrivere tali tavole, ma soltanto delineare un procedimento che consente di utilizzarle per ottenere valori approssimati delle funzioni finanziarie che interessano, anche quando i parametri non coincidono perfettamente con quelli delle tavole medesime.

Il grosso difetto delle tavole numeriche è proprio fornire il valore delle funzioni finanziarie al variare di parametri (tempo, tasso, tipicamente!) con un certo passo (per es. anno per anno, quarto di punto per quarto di punto), costringendo a qualche... acrobazia quando interessasse lavorare su un valore intermedio dei parametri.

Ci spieghiamo con un esempio. Partiamo dal seguente stralcio di tavole finanziarie:

$(1+i)^n$

n	**23,50%**	**23,75%**
1	1,235000000	1,237500000
2	1,525225000	1,531406250
3	1,883652875	1,895115234
...	...	...

Usando tali tavole sia da valutare il montante di un capitale di 1.000.000 a interessi composti per 3 anni a tasso del 23,65%. Il valore che ci interessa non è fornito dalla tavola a causa della grossolanità del passo (1/4 di punto percentuale) che salta da 23,50% e 23,75%, omettendo 23,65%. Un modo per valutare approssimativamente $1,2365^3$ è supporre che, passando il tasso da 23,50% a 23,75%, il valore del fattore di montante cresca proporzionalmente. Si può costruire lo schema seguente:

$$0,25\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}23,50\\[2ex]23,65\end{array}\right\}0,15\\[2ex]23,75\end{array}\right. \qquad 0,01146235938\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1,883652875\\[2ex]1,883652875+p\end{array}\right\}p\\[2ex]1,895115234\end{array}\right.$$

dove sono poste in evidenza le differenze tra tassi e tra valori corrispondenti dei fattori.

La seguente proporzione traduce l'ipotesi prima menzionata:

$$0,25\% : 0,15\% = 0,01146235938 : p$$

Se ne ricava:

$$p = \frac{0,15 \times 0,01146235938}{0,25} \simeq 0,006877415628$$

onde:

$$1,2365^3 \simeq 1,883652875 + 0,006877415628 \simeq 1,890530291$$

Il valore vero sarebbe:

$$1,2365^3 = 1,890524727$$

Il montante di 1.000.000 riesce allora approssimativamente pari a 1.890.530, mentre, più esattamente sarebbe 1.890.525, con una differenza di 5 lire.

(b)

Quando l'interpolazione riguarda addirittura due variabili il procedimento va applicato due volte.

Proponiamoci di valutare il montante di 1.000.000 dopo 2 anni e 3 mesi a tasso del 23,65%.

Conviene dapprima procurarci valutazioni approssimate a tasso del 23,65% dei fattori di montante per le durate di 2 e 3 anni.

Sui due anni si ha:

$$0,25\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}23,50\\[2ex]23,65\end{array}\right\}0,15\\[2ex]23,75\end{array}\right. \qquad 0,00618125\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1,52522500\\[2ex]1,52522500+p\end{array}\right\}p\\[2ex]1,53140625\end{array}\right.$$

onde:

$$p = \frac{0,15\% \times 0,00618125}{0,25\%} = 0,00370875$$

da cui:

$$1,2365^2 \simeq 1,525225 + 0,00370875 \simeq 1,52893375$$

Il valore vero che ci impegniamo a non usare sarebbe:

$$1,2365^2 = 1,52893225$$

Sui tre anni ci siamo già calcolati sopra l'approssimazione:

$$1,2365^3 \simeq 1,890530291$$

e possiamo allora costruire uno schema di interpolazione sul tempo analogo a quello usato prima sul tasso, previa osservazione che 2 anni e 3 mesi sono 2,25 anni:

$$1\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2\\[2ex]2,25\end{array}\right\}0,25\\[2ex]3\end{array}\right. \qquad 0,361596541\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1,52893375\\[2ex]1,52893375+p\end{array}\right\}p\\[2ex]1,890530291\end{array}\right.$$

Si trae:

$$p = \frac{0,25 \times 0,361596541}{1} = 0,09039913525$$

onde:

$$1,23652,25 \simeq 1,52893375 + 0,09039913525 = 1,619332885$$

mentre una valutazione meglio approssimata darebbe:

$$1,2365^{2,25} = 1,612266282$$

Il montante approssimato risulta di L. 1.619.333, mentre più precisamente esso sarebbe di L. 1.612.266, con una differenza nient'affatto trascurabile di lire 7.067.

Si evince da qui l'importanza di evitare le tavole finanziarie non appena questo sia possibile. Non di rado, nella gestione di contenzioso innanzi all'autorità giudiziaria si debbono giustificare richieste attraverso il ricorso alle tavole finanziarie, strumento di calcolo colà accettato. Per questo motivo ha senso infliggere ancor'oggi nozioni siffatte.

2.1.2 Uso di leggi di sconto commerciale

(a)

Nella pratica della vendita rateale è in uso il regime di capitalizzazione a interessi (semplici) anticipati e quindi la "quadratura" tra versamenti futuri dell'affidato e ammontare finanziato si traduce nell'uguaglianza tra il valore attuale con sconto commerciale dei versamenti futuri e, appunto, l'ammontare finanziato.

Questo fa sì che il tasso di sconto commerciale che fa quadrare le prestazioni delle due parti sia numericamente differente da quello di interesse composto che originerebbe lo stesso effetto.

Prendiamo una rateazione a 12 mesi con due sole rate, ciascuna di ammontare 5.000.000 con scadenze 6 e 12 mesi rispettivamente. Sia 20% il tasso di sconto commerciale adottato, l'ammontare finanziato risulta:

$$5.000.000 \times (1 - 0,20 \times 6/12) + 5.000.000 \times (1 - 0,20) = 8.500.000$$

E' importante capire che il 20% *non è il tasso di interesse composto* con cui l'operazione è stipulata. La cosa può essere direttamente constatata attualizzando a sconto composto le due rate:

$$\frac{5.000.000}{1,2^{1/2}} + \frac{5.000.000}{1,2} \simeq 8.731.021$$

Se si vuole quadratura, si deve aumentare il tasso di attualizzazione. Usando il tasso del 24,4444% si trova:

$$\frac{5.000.000}{1,24444^{1/2}} + \frac{5.000.000}{1,24444} \simeq 8.500.000$$

E' possibile fornire una formula che dà, in funzione delle rate della rendita (anche se variabili) e del suo valore attuale, il tasso di sconto commerciale che regge l'operazione. Tale formula è la seguente:

$$\text{tasso} = \frac{\text{somma delle rate} - \text{finanziato}}{\text{somma di rate} \times \text{scadenze rispettive}}$$

La controllo nel caso numerico semplice fin qui impiegato per illustrare questa convenzione di calcolo:

$$\text{tasso} = \frac{5.000.000 + 5.000.000 - 8.500.000}{5.000.000 \times 1/2 + 5.000.000 \times 1} = 20\%$$

Resta inteso, come già abbiamo visto nel primo capitolo, che il fatto che in una data operazione, quella usata in questo numero, "coabitino" il tasso di sconto commerciale 20% e il tasso d'interesse composto 24,4444% non significa affatto che ogni altra operazione al 20% di tasso di sconto commerciale quadri al tasso del 24,4444% di interesse composto. Valga il seguente esempio:

epoche (in anni)	0	1/2	1	3/2
flussi (in milioni)	−12	5	5	5

Attualizzando a tasso di sconto commerciale del 20% le tre rate da 5 milioni scadenti tra sei, dodici e diciotto mesi l'operazione quadra:

$$12.000.000 = 5.000.000[(1-0,20\times0,5)+(1-0,20)+(1-0,20\times1,5)]$$

Il tasso interno di interesse composto dell'operazione è, stavolta del 25,5395%, superiore al precedente. Naturalmente si controlla facilmente come segue che il tasso è l'annunciato:

$$5.000.000\left(1,255395^{-1/2}+1,255395^{-1}+1,255395^{-3/2}\right)\simeq$$
$$\simeq 12.000.000$$

(b)

Consideriamo ora un'operazione di rateazione più "seria", con rate mensili, e mostriamo come si possano semplicemente collegare rata e tasso di sconto commerciale che regge l'operazione.

L'ammontare finanziato sia 1.000.000, a fronte del quale il soggetto finanziato si impegni a pagare 11 rate mensili costanti (la prima a 60 giorni).

Sia R l'ammontare ignoto della rata. Questo è lo schema dei flussi di cassa dell'operazione:

epoche (in anni)	0	1/12	2/12	3/12	...	11/12	12/12
flussi (in lire)		0	R	R	...	R	R

Se il tasso di sconto commerciale è del 20% la rata R deve risolvere l'equazione:

$$1.000.000=$$
$$=R\left[\left(1-0,2.\frac{2}{12}\right)+\left(1-0,2.\frac{3}{12}\right)+\ldots+\left(1-0,2.\frac{12}{12}\right)\right]$$

L'espressione in parentesi quadre si riscrive come segue:

$$[11-0,2\times(2+3+\ldots+12)/12]=9,71\overline{6}$$

cosicché:

$$R=1.000.000/9,71\overline{6}\simeq 102.916$$

Chiediamoci ora: "Salendo la rata mensile a 110.000, quale diventa il nuovo tasso di sconto commerciale?"

La risposta scaturisce dal calcolo seguente:

$$\text{tasso}=\frac{11\times 110.000-1.000.000}{110.000\times[2/12+3/12+\ldots+12/12]}=29,752\%$$

eseguito con la formula annunciata poco sopra, nella parte (a) di questo numero.

(c)

Non è difficile tradurre in termini algebrici generali quanto fin qui visto. Sia A il valore attuale di una rendita, calcolato a sconto commerciale, con tasso di sconto d. Se le rate della rendita sono $R_1, R_2, \ldots, R_n$ e scadono alle epoche $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tutte queste grandezze sono legate dalla relazione:

$$A=\sum_{s=1}^{n}R_s(1-dt_s)$$

Da quest'equazione si traggono due risultati di notevole importanza pratica.

Il primo fornisce il tasso di sconto commerciale in funzione di rate, scadenze e valore attuale:

$$d=\frac{\sum_{s=1}^{n}R_s-A}{\sum_{s=1}^{n}R_st_s}$$

Il secondo, in funzione di un profilo temporale desiderato delle rate:

$$R_s/R_1=\rho_s \qquad s=1,2,\ldots,n$$

ove le ρ_s sono assegnate (con $\rho_1=1$), l'ammontare delle rate

Osservato, infatti, che riesce:

$$R_s=R_1\rho_s$$

si ottiene:

$$R_1=\frac{A}{\sum_{s=1}^{n}\rho_s(1-dt_s)}$$

che dà la prima rata. Moltiplicando poi R_1 per i vari ρ_s si ottengono le rate successive.

Facciamo notare che se le ρ_s sono tutte unitarie si ricade nel caso largamente più diffuso anche se non esclusivo di rate costanti.

Mostriamo con un semplice esempio come applicare la formula. Si supponga di voler trovare 3 rate semestrali che stiano tra di loro nei rapporti seguenti:

prima rata 100%;
seconda rata 90%;
terza rata 110%;

Supponiamo che il valore attuale sia 1.000.000 e che il tasso di sconto commerciale prescelto sia 20%. Vogliamo trovare le tre rate.

Si ha:

$$\rho_1 = 1 \ ; \ \rho_2 = 0,9; \ \rho_3 = 1,1$$

Dalla formula sopra scritta si deduce:

$$R_1 = \frac{1.000.000}{1\,.(1-0,2\,.\frac{6}{12}) + 0,9 \times (1-0,2\,.\frac{12}{12}) + 1,1(1-0,2\,.\frac{18}{12})}$$

onde:

$$R_1 \simeq 418.410$$

La prima rata è di lire 418.410, la seconda s'ottiene prendendone il 90% e l'ultima maggiorandola del 10%:

$$R_2 \simeq 376.569; \ R_3 \simeq 460.251$$

3

Applicazioni aziendali classiche

Ci proponiamo di introdurre in questo capitolo alcuni schemi di calcolo finanziario che si basano sugli strumenti elementari fin qui presentati e che consentono di analizzare operazioni finanziarie concrete giungendo talora a risultati non banali.

I punti trattati saranno i seguenti tre (nei tre prossimi paragrafi):

(a) analisi dinamica di un'operazione finanziaria e piano d'ammortamento;

(b) guadagno netto attualizzato di un'operazione finanziaria;

(c) tasso effettivo di un'operazione finanziaria.

Nel capitolo quarto presenteremo l'impiego delle nozioni di cui ai punti **(b)** e **(c)** (guadagno netto attualizzato e tasso effettivo) per la soluzione di problemi di scelta e, in generale, per l'effettuazione di calcoli di convenienza economica. In questo capitolo ci limiteremo a introdurre tali nozioni.

3.1 Nozioni, usi e tecniche di costruzione di piani di ammortamento

Consideriamo un'operazione di finanziamento. Un soggetto riceve una determinata somma subito e s'impegna a pagare in futuro somme di danaro a fronte di tale finanziamento, somme comprensive di capitale ed interessi.

Costruire il piano d'ammortamento per l'operazione significa scomporre tali somme in capitale ed interessi e seguire, per tal via, l'andamento temporale dell'operazione finanziaria. Sono evidenti i motivi d'interesse di tale scomposizione: la velocità di rimborso del debito contribuisce a determinare il rischio dell'operazione per il finanziatore, in caso di interruzione patologica del contratto, prima della scadenza prefissata, per regolare le prestazioni di chiusura è necessario sapere "a che punto si era" con l'estinzione graduale del debito, in molti casi la parte di interessi dei versamenti fatti da un affidato è fiscalmente deducibile ed interessa quindi certificare quanto di un versamento è fatto a titolo di capitale e quanto a titolo di interesse.

A questi quesiti si risponde facilmente se l'operazione finanziaria da analizzare è stata costruita in modo elementare ossia specificando inizialmente quali sono gli ammontari dei versamenti a titolo di capitale, da maggiorare, scadenza per scadenza con gli interessi di competenza del periodo. Nella pratica però per numerosi e serissimi motivi si preferisce costruire l'operazione finanziaria in modo finanziario, specificando subito quali sono i versamenti complessivi (per capitale + interessi) che il debitore farà e proponendosi, successivamente, di scomporre tali versamenti in capitale e interessi. Si incontrano, in questo secondo caso, difficoltà maggiori, anche se, generalmente, il problema può essere risolto.

3.1.1 Impostazione elementare

(a)

Il punto di partenza dell'impostazione elementare è del tutto intuitivo: perché un piano di rimborso d'un debito "chiuda", sotto il profilo del capitale, è necessario e sufficiente che sommando i versamenti a titolo di capitale del debitore si ottenga l'ammontare finanziato.

Se consideriamo un finanziamento di ammontare 1 milione e se assumiamo rimborso in due anni con due versamenti uno dopo un anno e l'altro dopo due, è evidente che la somma delle due componenti di capitale deve ridare il milione prestato.

Per esempio, si potrebbe mettere in piedi un piano di rimborso convenendo i seguenti pagamenti a titolo di capitale:

- dopo un anno L. 300.000

- dopo due anni L. 700.000

La chiusura dell'operazione, sotto il profilo del capitale, è garantita dal fatto che la somma dei due versamenti a titolo di capitale dà, esattamente, l'ammontare prestato:

$$300.000 + 700.000 = 1.000.000$$

Supponiamo che il finanziatore chieda interessi al 10% annuo sull'operazione. Questo significa che i versamenti a titolo di capitale prima ipotizzati non sono tutto quello che il debitore verserà, ma dovrà affiancarli con versamenti a titolo di interesse. Non ci sono difficoltà di principio nel fare il calcolo. Durante il primo anno il debitore gode di un affidamento di L. 1.000.000: al 10% fanno L. 100.000 di interessi. Durante il second'anno l'affidamento scende a L. 700.000 e quindi gli interessi del second'anno saranno solo L. 70.000.

I versamenti complessivi del debitore alle due scadenze sono raccolti nel prospetto seguente, che evidenzia, altresì, come nel tempo variano debito residuo e debito estinto del debitore:

epoca	vers. capitale	vers. interessi	vers. totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	300.000	100.000	400.000	300.000	700.000
2	700.000	70.000	770.000	1.000.000	-

In gergo, i versamenti totali si chiamano *rate di ammortamento*, quelli a titolo di capitale *quote di capitale*, quelli a titolo di interessi *quote di interesse*, il *debito estinto* ad una data epoca è quanto già pagato a titolo di capitale fino a quell'epoca (inclusa), il *debito residuo* ad una data epoca è quanto rimane da pagare, a titolo di capitale, dopo quell'epoca.

Con le dizioni tradizionali, il prospetto precedente diviene:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	300.000	100.000	400.000	300.000	700.000
2	700.000	70.000	770.000	1.000.000	-

Questo è il piano d'ammortamento del debito alle condizioni indicate.

Non vi sono problemi di sorta per estendere la procedura di calcolo ad altri casi. Se, per es., l'ammortamento fosse da fare in 3 anni, con quote di capitale rispettive 200.000, 300.000 e 500.000 e se il tasso fosse 15% il piano d'ammortamento sarebbe il seguente:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	150.000	350.000	200.000	800.000
2	300.000	120.000	420.000	500.000	500.000
3	500.000	75.000	575.000	1.000.000	-

Il lettore che già non conoscesse con disinvoltura questi procedimenti di calcolo è invitato a ricostruirsi l'ultimo piano dato. Scoprirà così il semplice procedimento di calcolo da usare, che può così riassumersi:

I passo: compilazione della riga dell'epoca 0. Le cinque colonne del piano sono generalmente riempite con: 0 per i versamenti (quota di capitale, quota di interessi e rata), 0 per il debito estinto (all'inizio non si è estinto nulla), tutto il debito come debito residuo. Abbiamo scritto "generalmente" perché in molti casi concreti all'affidato non viene dato del danaro ma un bene non monetario (un'automobile, un bene strumentale, un edificio) e gli si chiede di effettuare immediatamente un versamento monetario. In tale caso nella colonna della quota di capitale all'epoca 0 va messo tale anticipo. Va messo 0 nella colonna degli interessi. Nella colonna della rata va rimesso tale anticipo, che va a finire anche nella colonna del debito estinto. Il debito residuo iniziale riesce pari al valore monetario del bene meno l'ammontare dell'anticipo. Presenteremo, dopo illustrato l'intiero algoritmo di calcolo del piano, un piano con anticipo.

Illustriamo ora, con riferimento all'esempio appena esaminato, come l'algoritmo funziona.

Dopo il I passo il piano si presenta come segue:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1					
2					
3					

II passo: compilazione della colonna delle quote di capitale. Si procede a sistemare nella colonna delle quote di capitale la frazione di debito che sarà ripagata in ciascun anno. Si ottiene:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000				
2	300.000				
3	500.000				
totale	1.000.000				

Si noti che il totale delle quote di capitale deve dare l'intiero debito.

III passo: compilazione della generica riga dopo quella dell'epoca 0. Il terzo passo è il più articolato. Si deve, anzitutto, calcolare la quota di interessi. Questo si fa prendendo il debito residuo nella riga precedente e moltiplicandolo per il tasso di interesse. Il prodotto si colloca nella colonna della quota di interessi. Si sommano poi quota di capitale e quota di interesse per avere la rata. Si aggiornano, infine, debito residuo ed estinto addizionando al primo e sottraendo dal secondo la quota di capitale della linea. Poi si passa alla riga successiva e si continua finché si è compilata tutta la tabella.

Descriviamo dettagliatamente i calcoli sul solito esempio.

epoca 1:

$$\text{quota interessi} = 1.000.000 \times 15/100 = 150.000$$

$$\begin{aligned} \text{rata} &= \text{quota capitale} + \text{quota interesse} = \\ &= 200.000 + 150.000 = 350.000 \end{aligned}$$

$$\text{deb. est. nuovo} = \text{deb. est. vecchio} + \text{quota di capitale} = 0 + 200.000 = 200.000$$

$$\text{deb. res. nuovo} = \text{deb. res. vecchio} - \text{quota di capitale} = 1.000.000 - 200.000 = 800.000$$

ed il piano parziale appare il seguente:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	150.000	350.000	200.000	800.000
2	300.000				
3	500.000				
totale	1.000.000				

epoca 2:

$$\text{quota interessi} = 800.000 \times 15/100 = 120.000$$

$$\text{rata} = \text{quota capitale} + \text{quota interesse} = 300.000 + 120.000 = 420.000$$

$$\text{deb. est. nuovo} = \text{deb. est. vecchio} + \text{quota di capitale} = 200.000 + 300.000 = 500.000$$

$$\text{deb. res. nuovo} = \text{deb. res. vecchio} - \text{quota di capitale} = 800.000 - 300.000 = 500.000$$

ed il piano parziale appare il seguente:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	150.000	350.000	200.000	800.000
2	300.000	120.000	420.000	500.000	500.000
3	500.000				
totale	1.000.000				

epoca 3:

$$\text{quota interessi} = 5800.000 \times 15/100 = 75.000$$

$$\text{rata} = \text{quota capitale} + \text{quota interesse} = 500.000 + 75.000 = 575.000$$

$$\text{deb. est. nuovo} = \text{deb. est. vecchio} + \text{quota di capitale} = 500.000 + 500.000 = 1.000.000$$

$$\text{deb. res. nuovo} = \text{deb. res. vecchio} - \text{quota di capitale} = 500.000 - 500.000 = 0$$

ed il piano completo è quello già dato sopra:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	150.000	350.000	200.000	800.000
2	300.000	120.000	420.000	500.000	500.000
3	500.000	75.000	575.000	1.000.000	-

Quando la cadenza dei versamenti non è annua, ma, per es., mensile, il procedimento si può applicare tranquillamente lavorando non più a tasso annuo, ma a tasso riferito al periodo di pagamento delle poste. Quando ad una scadenza di queste il debitore non versa nulla (ad es. nel caso di rateazioni mensili, con 2 mesi tra stipulazione del contratto e pagamento della prima rata, dopo un mese il debitore non paga nulla), la quota di capitale, di ammontare assoluto pari agli interessi maturati, è negativa e va portata ad aumento del debito residuo e a riduzione di quello estinto.

Nel n. successivo si troverà un esempio di piano d'ammortamento a cadenza mensile, mentre qui di seguito costruiamo un piano per un debito con una scadenza a versamento nullo. Sia sempre di 1.000.000 il debito, sia 10% il tasso di interesse e, sui tre anni, il piano dei versamenti a titolo di capitale sia il seguente:

all'epoca 0: L. 200.000
all'epoca 1: nulla
all'epoca 2: L. 500.000
all'epoca 3: L. 300.000

Naturalmente, la somma delle quote di capitale andrà aumentata per tener conto del fatto che all'epoca 1, poiché il debitore non paga nemmeno gli interessi, è come se contraesse un ulteriore debito, che salderà — supponiamo — un anno dopo.

Le condizioni di "chiusura" sono garantite perché la somma delle tre quote di capitale di partenza è L. 1.000.000. Vediamo come si presenta il piano:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000
1	−80.000	80.000	-	120.000	880.000
2	380.000	88.000	468.000	500.000	500.000
3	500.000	50.000	550.000	1.000.000	-

Si noti che la somma algebrica delle quote di capitale dà esattamente 1.000.000. A fronte della quota negativa di L. −80.000 dell'epoca 1 abbiamo supposto un *extra*-versamento a titolo di capitale di 80.000 un anno dopo.

(b)

Mostriamo in questo n. come si costruisce un piano d'ammortamento per un debito con pagamenti a cadenza mensile.

Sia L. 1.000.000 l'ammontare nominale d'un debito derivante dalla fornitura di un bene strumentale. Sia L. 200.000 l'ammontare dell'anticipo subito versato dal debitore. Questi s'impegni a pagare per 10 mesi (dal 2° all'11°) quote di capitale di ammontare costante, con maggiorazione della prima quota di capitale per tener conto del "buco" al primo mese. Il tasso annuo di interesse sia del 10%.

La costruzione del piano d'ammortamento può procedere come segue.

Calcoliamo subito il tasso d'interesse mensile equivalente al 10%. Esso riesce pari a:

$$1,1^{1/12} - 1 = 0,797414\%$$

L'inizio del piano d'ammortamento (tempo in mesi) è il seguente:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000

La compilazione della riga relativa all'epoca 1 richiede anzitutto il calcolo degli interessi per un mese sul debito di 800.000 a tasso

mensile dello 0,797415%. Si ottiene:

$$800.000 \times 0,797414/100 \simeq 6.379$$

Poiché al primo mese il debitore non versa nemmeno tali interessi, la quota di capitale al primo mese è allora pari all'ammontare degli interessi, ma cambiato di segno: −6.379. Siamo pronti per compilare la seconda riga del piano:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000
1	−6.379	6.379	-	193.621	806.379

Il procedimento di ammortamento nel primo mese va avanti... come i gamberi! Ma questo è del tutto naturale, visto che il debitore non paga nulla dopo un mese.

La quota di capitale base per i 10 mesi si ottiene, secondo i dati iniziali, dividendo 800.000 per 10:

$$800.000/10 = 80.000$$

quella del mese 2 va però aumentata di L. 6.379 per i motivi che sappiamo.

Eseguito il secondo passo il piano si presenta come segue:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000
1	−6.379	6.379	-	193.621	806.379
2	86.379				
3	80.000				
4	80.000				
5	80.000				
6	80.000				
7	80.000				
8	80.000				
9	80.000				
10	80.000				
11	80.000				

Può, a questo punto, partire la sua compilazione per ricorrenza, come a suo tempo descritto.

Per es., la riga 2 si ottiene come segue:

$$\text{quota interessi} = 806.379 \times 0,797414/100 = 6.430$$

$$\text{rata} = 86.379 + 6.430 = 92.809$$

$$\text{debito estinto} = 193.621 + 86.379 = 280.000$$

$$\text{debito residuo} = 806.379 - 86.379 = 720.000$$

ed il piano diviene:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000
1	−6.379	6.379	-	193.621	806.379
2	86.379	6.430	92.809	280.000	720.000
3	80.000				
4	80.000				
5	80.000				
6	80.000				
7	80.000				
8	80.000				
9	80.000				
10	80.000				
11	80.000				

Procedendo nella compilazione, anche con riferimento ai mesi successivi, si ottiene il piano d'ammortamento completo che riportiamo alla pagina seguente.

(c)

Sia S l'ammontare del debito iniziale, siano n i periodi considerati. Si denotino con i simboli: $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ le quote di capitale. La condizione di chiusura del procedimento di ammortamento richiede che:

$$K_0 + K_1 + K_2 + \ldots + K_n = S$$

Il debito estinto dopo s periodi ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$) è:

$$E_s = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots + K_s$$

il debito residuo dopo s periodi, che indicheremo con D_s, è pari alla differenza tra tutto il debito e l'estinto:

$$D_s = S - E_s = K_{s+1} + K_{s+2} + \ldots + K_n$$

Se i è il tasso di interesse periodale, la quota d'interessi relativa al periodo s-esimo ($s = 1, 2, \ldots, n$), che indicherò con I_s, si ottiene come segue:

$$I_s = iD_{s-1}$$

Naturalmente riesce sempre $I_0 = 0$.

Le rate R_s ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$) si ottengono, periodo per periodo, sommando quota di capitale e quota di interessi:

$$R_s = K_s + I_s$$

Queste formule consentono la costruzione del piano di ammortamento secondo l'impostazione elementare quando non vi siano "buchi" nei versamenti. Rinviamo al n. 3.1.2. la trattazione generale, anche in presenza di "buchi" perché in quel contesto essa riuscirà più semplice e naturale (per le formule si vedano, ovviamente le parti contraddistinte con la lettera **(c)**).

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	200.000	-	200.000	200.000	800.000
1	−6.379	6.379	-	193.621	806.379
2	86.379	6.430	92.809	280.000	720.000
3	80.000	5.741	85.741	360.000	640.000
4	80.000	5.103	85.103	440.000	560.000
5	80.000	4.466	84.466	520.000	480.000
6	80.000	3.828	83.828	600.000	400.000
7	80.000	3.190	83.190	680.000	320.000
8	80.000	2.552	82.552	760.000	240.000
9	80.000	1.914	81.914	840.000	160.000
10	80.000	1.276	81.276	920.000	80.000
11	80.000	638	80.638	1.000.000	-

3.1.2 IMPOSTAZIONE FINANZIARIA

(a)
Già s'è fatto cenno all'impostazione finanziaria. Si parte nell'analisi di un'operazione di finanziamento dai versamenti complessivi del debitore e ci si propone di scomporli in capitale e interessi oltre che di ricavare da questa scomposizione l'evoluzione temporale del debito estinto e del debito residuo. Questo può farsi in maniera diversa a seconda che si assuma pagamento degli interessi a fine o inizio di ciascun periodo. Nell'impostazione elementare prima vista tale pagamento si suppone sempre fatto a fine periodo. Quando si parte da versamenti non scomposti tale libertà d'interpretazione rimane. Anche se nella larga maggioranza dei casi di operazioni di finanziamento quella prescelta è la convenzione degli interessi pagati a fine periodo, per motivi che oltre illustrerò può concretamente interessare la costruzione di un piano a interessi periodali anticipati. Di questo scriveremo subito, mentre poi considereremo la maniera più naturale di costruire il piano di ammortamento: con interessi periodali posticipati.

Impostazione finanziaria: interessi periodali posticipati

(a)
La condizione di chiusura nel caso di impostazione finanziaria non è più in termini di quote di capitale, ma è data in termini di rate: il loro valore scontato a sconto composto, col tasso di interesse del prestito, deve dare l'ammontare del debito.

Consideriamo un'operazione di finanziamento di L. 1.000.000, a fronte della quale il debitore s'impegni a pagare le seguenti somme:

dopo 1 anno	L. 400.000
dopo 2 anni	L. 470.000
dopo 3 anni	L. 330.000

Sistemando i dati in un prospetto d'ammortamento troviamo quanto segue:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1			400.000		
2			470.000		
3			330.000		

La scomposizione dei versamenti del debitore può farsi soltanto se si conosce il tasso di interesse cui l'operazione è stipulata. Questo tasso è generalmente noto ed è bene controllarne la coerenza con gli altri dati. Se i è tale tasso bisogna che:

$$400.000/(1+i) + 470.000/(1+i)^2 + 330.000/(1+i)^3 = 1.000.000$$

Se il tasso non è noto ci si deve preoccupare di trovarlo risolvendo l'equazione nell'incognita i sopra scritta.

In generale l'equazione non si risolve esattamente con una formula, ma approssimativamente per via numerica. Riferiremo brevemente su quest'argomento in 3.3. Per il momento, controlliamo che 10% è il tasso tale che risulta sodisfatta la condizione di chiusura in coerenza con gli altri dati del problema.

Si ha:

$$400.000/1,1 + 470.000/1,1^2 + 330.000/1,1^3 =$$

$$= 363.636,\overline{36} + 388.429,7521 + 247.933,8843 = 1.000.000$$

come chiesto dalla condizione di chiusura.

Sfruttando la conoscenza del tasso possiamo ricostruire il piano.

La quota di interessi del primo anno si ottiene dal debito residuo iniziale (L. 1.000.000) al solito modo:

$$1.000.000 \times 10/100 = 100.000$$

Sottraendo tale quota d'interessi dalla rata di L. 400.000 si ottiene la quota di capitale del primo anno nella misura di:

$$400.000 - 100.000 = 300.000$$

Questo consente di aggiornare debito estinto e debito residuo:

$$\text{debito estinto} = 0 + 300.000 = 300.000$$

$$\text{debito residuo} = 1.000.000 - 300.000 = 700.000$$

Sistemando nel prospetto gli elementi trovati, si ha:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	300.000	100.000	400.000	300.000	700.000
2			470.000		
3			330.000		

A questo punto è evidente che con lo stesso procedimento possiamo continuare.

Osservato che la quota di interessi dell'epoca 2 deve essere:

$$700.000 \times 10/100 = 70.000$$

cosicché la quota di capitale riesce:

$$470.000 - 70.000 = 400.000$$

si perviene a questo piano parziale, cui manca soltanto l'ultima riga:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	300.000	100.000	400.000	300.000	700.000
2	400.000	70.000	470.000	700.000	300.000
3			330.000		

Osserviamo ora come il procedimento di ricostruzione del piano a partire dall'ammontare delle rate e del tasso sodisfaccia perfettamente anche la condizione di chiusura dell'impostazione elementare.

Il penultimo debito residuo è di L. 300.000, a tasso 10% gli interessi dell'ultimo anno sono:

$$300.000 \times 10/100 = 30.000$$

La quota di capitale che si ricava:

$$330.000 - 30.000 = 300.000$$

è quel che serve, esattamente... al centesimo, per estinguere il debito (l'ultimo debito residuo era proprio di L. 300.000). Il debito estinto all'anno precedente era L. 700.000 e con queste L. 300.000 arriviamo proprio a L. 1.000.000 e, dunque, il piano "chiude" perfettamente:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	300.000	100.000	400.000	300.000	700.000
2	400.000	70.000	470.000	700.000	300.000
3	300.000	30.000	330.000	1.000.000	-

Si noti che i debiti residui sono legati da un'interessante relazione che, opportunamente generalizzata, ci sarà utile in seguito.

Se il debitore volesse estinguere le sue pendenze in 1, dopo aver versato la rata scadente a quell'epoca dovrebbe versare il debito residuo, ossia L. 700.000. Se volesse estinguere il debito in 2, dopo il pagamento della rata corrispondente, la somma da versare sarebbe il debito residuo susseguente, L. 300.000.

I due debiti residui sono anche collegati nel seguente modo: il debito in 2 è pari al debito in 1, capitalizzato per un anno al tasso dell'operazione, deduzion fatta della rata scadente in 2. Precisamente:

$$700.000 \times (1 + 10/100) - 470.000 = 770.000 - 470.000 = 300.000$$

Questa proprietà descrive, anno per anno, qual è la legge di evoluzione del debito residuo, che cresce per effetto del passaggio del tempo, che fa maturare interessi e che diminuisce per effetto dei versamenti del debitore.

(b)

Consideriamo qui un problema analogo al precedente, dove assumeremo scadenze non necessariamente annue ed introdurremo, nel caso speciale in esame, la procedura generale di calcolo che sarà esposta formalmente nella sezione (c).

Il debito da ammortizzare sia di 1.000.000 ed il debitore si impegni ai seguenti pagamenti:

dopo 6 mesi L. 250.000
dopo 2 anni L. 426.100
dopo 3 anni L. 551.250

Le scadenze indicate possono pensarsi come scadenze semestrali con un po' di buchi, ma preferiamo presentare una maniera di costruire il piano d'ammortamento che associa una riga a ciascuna delle scadenze effettive, senza introdurre scadenze che richiedono quote di capitale negative ed altre amenità, come sopra visto.

Anche in questo caso bisogna anzitutto risolvere il problema del tasso, ossia trovare a quale tasso annuo i risulta:

$$250.000/(1+i)^{0,5}+426.100/(1+i)^2+551.250/(1+i)^3 = 1.000.000$$

Si controlla facilmente che il valore di i è 10,25%. Si ha infatti:

$$250.000/(1,1025)^{0,5} + 426.100/(1,1025)^2 + 551.250/(1,1025)^3 =$$

$$= 238.095,2381 + 350.553,5245 + 411.351,2374 = 1.000.000$$

Conviene cercare una formula di ricorrenza che lega i debiti residui. Il ragionamento che ci conduce a questa formula di ricorrenza è finanziariamente ovvio. Consideriamo un generico periodo di ammortamento, che intercorre tra le scadenze di due rate consecutive:

periodo

inizio fine

Se il debitore volesse "chiudere" l'operazione all'inizio del periodo dovrebbe, in assenza di penali di vario genere, versare al creditore il debito residuo calcolato all'inizio del periodo. Se non lo fa l'operazione procede. Supponiamo che il debitore riconsideri a fine periodo la possibilità di estinzione del suo debito subito dopo aver pagato la rata di fine periodo. La somma che dovrebbe pagare, ossia il debito residuo di fine periodo deve potersi ottenere anche col semplice calcolo seguente:

$$\text{debito a fine} = \text{debito a inizio} \times (1 + \text{tasso})^{\text{fine}-\text{inizio}} - \text{rata}$$

dove il tasso è precisamente il tasso dell'operazione.

Questo ragionamento è la naturale generalizzazione del ragionamento esposto in chiusura della sezione **(a)**.

La sua applicazione ci conduce facilmente all'ottenimento delle poste mancanti nel piano d'ammortamento.

Ora come ora quanto sappiamo è qui sotto riportato (tempo in anni):

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
0,5			250.000		
2			426.100		
3			551.250		

Applicando la relazione di ricorrenza tra debiti residui prima annunciata per calcolare il debito residuo dopo 6 mesi i calcoli da fare sono i seguenti:

$$\text{deb. residuo a 6 mesi} = \text{deb. res. iniziale} \times (1,1025)^{1/2} - 250.000$$

si ottiene:

$$\text{debito residuo a 6 mesi} = 1.000.000 \times 1,05 - 250.000 = 800.000$$

Se il debito residuo è diminuito di L. 200.000 (in quanto è passato da L. 1.000.000 a L. 800.000) vuol dire che di tale ammontare è la prima quota di capitale. Segue che la prima quota di interesse deve essere pari alla differenza tra prima rata e prima quota di capitale:

$$250.000 - 200.000 = 50.000$$

Questo risultato può controllarsi anche per altra via. In effetti al 10,25% annuo equivale il 5% semestrale e quindi, ragionando elementarmente sui semestri, dopo i primi sei mesi gli interessi maturati sono:

$$1.000.000 \times 0,05 = 50.000$$

come trovato per altra via.

Il nuovo debito estinto si ottiene dal vecchio (che era 0) addizionando la quota di capitale di L. 200.000. Si ottiene così la riga di competenza del primo versamento del piano:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
0,5	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2			426.100		
3			551.250		

Ora la "macchinetta" può esser fatta funzionare di nuovo per generare la riga di competenza dell'epoca 2.

$$\begin{aligned}\text{nuovo debito} &= \text{vecchio debito} \times 1.1025^{1,5} - \text{rata} = \\ &= 800.000 \times 1,157625 - 426.100 = 500.000\end{aligned}$$

Il debito residuo è calato di L. 300.000, allora la quota di capitale è di tale ammontare. Gli interessi si ottengono per differenza:

$$426.100 - 300.000 = 126.100$$

il nuovo debito estinto è pari al vecchio (L. 200.000) aumentato della quota di capitale corrente e sale quindi a L. 500.000. Il nostro piano ha una riga completa in più:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
0,5	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2	300.000	126.100	426.100	500.000	500.000
3			551.250		

Passiamo alla compilazione dell'ultima riga ed alla chiusura del piano.

Al solito, si parte dal nuovo debito:

$$500.000 \times 1,1025 - 551.250 = 551.250 - 551.250 = 0$$

Dopo il rituale sospirone di sollievo perché manifestamente il procedimento "chiude", osserviamo che l'ultima quota di capitale deve essere di L. 500.000. La quota di interessi esce, al solito, per differenza:

$$551.250 - 500.000 = 51.250$$

ed ecco il piano completo:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
0,5	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2	300.000	126.100	426.100	500.000	500.000
3	500.000	51.250	551.250	1.000.000	-

Volendo inserire "buchi", con conseguente comparsa di quote di capitale negative, come sopra visto, non occorrono con questo approccio cerimonie particolari. La "macchinetta" fornisce automaticamente tutti gli elementi di calcolo.

Mostriamo subito come il procedimento si inizia con riferimento all'ultimo esempio e volendo costruire il piano a cadenza rigorosamente semestrale. Daremo poi il risultato finale accompagnandolo con l'invito al lettore che non domina completamente queste tecniche a controllare i conti fatti dagli scriventi. Garantiamo immediato apprendimento del procedimento. Un piano a cadenza semestrale si presenta, con i dati di partenza che abbiamo, come segue (tempo in semestri):

epoca (semestri)	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1			250.000		
2					
3					
4			426.100		
5					
6			551.250		-

Calcoliamo il tasso semestrale equivalente al 10,25% annuo:

$$1,1025^{1/2} - 1 = 5\%$$

Il debito residuo dopo 6 mesi, ossia all'epoca 1 si ottiene come segue:

$$1.000.000 \times 1,05 - 250.000 = 800.000$$

e possiamo (ri)compilare la corrispondente riga del piano:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2					
3					
4			426.100		
5					
6			551.250		-

Il debito all'epoca 2 (6 mesi dopo) è dato, visto che a tale scadenza il debitore nulla versa, da:

$$800.000 \times 1,05 - 0 = 840.000$$

La quota di capitale, visto che il debito residuo è aumentato di L. 40.000, è di L. −40.000. Visto che la rata è nulla, la quota interessi, che si ottiene, al solito, per differenza, è:

$$0 - (-40.000) = 40.000$$

e con la nuova riga il piano diviene:

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2	−40.000	40.000	-	160.000	840.000
3					
4			426.100		
5					
6			551.250		-

Proseguendo si ottiene il piano completo che segue.

E' proprio questo il piano che suggeriamo ogni lettore si costruisca con le sue mani... a scopo terapeutico.

Si noti che l'assunzione di computo semestrale degli interessi conduce ad una diversa scomposizione dei versamenti del debitore in capitale ed interesse. E' questo un primo modo di rendersi conto della convenzionalità della costruzione di un piano d'ammortamento.

epoca	quota di capitale	quota di interessi	rata totale	debito estinto	debito residuo
0	-	-	-	-	1.000.000
1	200.000	50.000	250.000	200.000	800.000
2	−40.000	40.000	-	160.000	840.000
3	−42.000	42.000	-	118.000	882.000
4	382.000	44.100	426.100	500.000	500.000
5	−25.000	25.000	-	475.000	525.000
6	525.000	26.250	551.250	1.000.000	-

(c)

Non vi sono grossi problemi a formalizzare il procedimento di calcolo sopra delineato.

Se il debito è d'ammontare S e se i versamenti del debitore (eventualmente nulli) sono R_s ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$), fatti alle scadenze t_s ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$; con $t_0 = 0$) e i è il tasso d'interesse che regge l'operazione, la condizione di chiusura finanziaria è la seguente:

$$S = R_0 + \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^{t_n}}$$

Detto D_s il debito in t_s, subito dopo versata la rata R_s, si ottiene come segue:

$$D_0 = S - R_0$$

$$D_s = D_{s-1}(1+i)^{t_s - t_{s-1}} - R_s$$

Le quote di capitale K_s si ottengono così:

$$K_s = D_{s-1} - D_s$$

e le quote di interessi si ottengono per differenza dalle rate:

$$I_s = R_s - K_s$$

Attraverso questa relazione si possono costruire tutti i piani di ammortamento con impostazione finanziaria a interessi posticipati che interessano in pratica.

TASSO EFFETTIVO DI INTERESSE e TASSO EFFETTIVO DI SCONTO

Prof. Carlo Alberto Magni

TASSO EFFETTIVO DI INTERESSE

Si definisce tasso *effettivo di interesse* il rapporto

$$i(t) = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$$

che rappresenta l'interesse prodotto in un generico periodo $[t-1, t]$ da un euro di capitale investito in $t-1$. Si noti che

$$1 + i(t) = \frac{C_t}{C_{t-1}}$$

è il montante, a fine periodo, di un euro di capitale investito in $t-1$, e quindi

$$C_t = C_{t-1}\big(1 + i(t)\big).$$

cioè, C_t è il montante di C_{t-1}, capitalizzato di un periodo a tasso $i(t)$. Iterando la relazione di cui sopra per un'operazione finanziaria di durata n, si ottiene

C_1	$= C_0\big(1 + i(1)\big)$	
C_2	$= C_1\big(1 + i(2)\big)$	$= C_0\big(1 + i(1)\big)\big(1 + i(2)\big)$
C_3	$= C_2\big(1 + i(3)\big)$	$= C_0\big(1 + i(1)\big)\big(1 + i(2)\big)\big(1 + i(3)\big)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	$= C_{n-1}\big(1 + i(n)\big)$	$= C_0\big(1 + i(1)\big)\big(1 + i(2)\big)\big(1 + i(3)\big)\cdots\big(1 + i(n)\big)$

Ogni operazione finanziaria può quindi essere interpretata come un prestito stipulato con regime di interesse composto, dove il tasso composto è variabile e pari a $i(1), i(2), \dots, i(n)$, applicato rispettivamente al capitale $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ (che realizza appunto la composizione o capitalizzazione degli interessi).

TASSO EFFETTIVO DI SCONTO

Si definisce tasso *effettivo di sconto* il rapporto

$$d(t) = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_t}$$

che rappresenta lo sconto prodotto in un generico periodo $[t-1, t]$ da un euro di valore nominale disponibile all'epoca t. Si noti che

$$1 - d(t) = \frac{C_{t-1}}{C_t}$$

è il valore scontato, ad inizio periodo, di un euro di valore nominale disponibile in t, e quindi

$$C_{t-1} = C_t\big(1 - d(t)\big).$$

Cioè, C_{t-1} è il valore di C_t, scontato di un periodo a tasso $d(t)$. Iterando la relazione di cui sopra per un'operazione finanziaria di durata n, si ottiene

C_{n-1}	$= C_n\big(1 - d(n)\big)$	
C_{n-2}	$= C_{n-1}\big(1 - d(n-1)\big)$	$= C_n\big(1 - d(n)\big)\big(1 - d(n-1)\big)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_1	$= C_2\big(1 - d(2)\big)$	$= C_n\big(1 - d(n)\big)\big(1 - d(n-1)\big)\cdots\big(1 - d(2)\big)$
C_0	$= C_1\big(1 - d(1)\big)$	$= C_n\big(1 - d(n)\big)\big(1 - d(n-1)\big)\cdots\big(1 - d(2)\big)\big(1 - d(1)\big)$

Si noti che vale la seguente relazione:

$$1 + i(t) = \frac{1}{1 - d(t)}.$$

N.B. La differenza $C_t - C_{t-1}$ è detta *interesse* in un'ottica di capitalizzazione (il capitale è portato avanti nel tempo), *sconto* in un'ottica di sconto (il capitale è portato indietro nel tempo). Si tratta dello stesso concetto espresso con termini diversi.

Si può verificare, utilizzando le definizioni fornite sopra, che

- un prestito stipulato a tasso di interesse semplice i è tale che $i(t) = \frac{i}{1+i\cdot(t-1)}$
- un prestito stipulato a tasso di interesse composto i è tale che $i(t) = i$
- un prestito stipulato a tasso di sconto commerciale d è tale che $i(t) = \frac{d}{1-dt}$
- un prestito stipulato a tasso di interesse semplice i è tale che $d(t) = \frac{i}{1+it}$
- un prestito stipulato a tasso di interesse composto i è tale che $d(t) = \frac{i}{1+i}$
- Un prestito stipulato a tasso di sconto commerciale d è tale che $d(t) = \frac{d}{1-d\cdot(t-1)}$.

N.B. Il tasso $d(t) = \frac{i}{1+i}$ è una funzione costante, indipendente dal periodo considerato

Esercizio 1. Si calcoli il tasso di interesse effettivo e il tasso di sconto effettivo nel terzo anno per i seguenti prestiti:

- 100 euro, regime di interesse semplice, tasso di interesse contrattuale 5%
- 100 euro, regime di interesse composto, tasso di interesse contrattuale 5%
- 100 euro, regime di interesse anticipato, tasso di sconto contrattuale 5%

Soluzione. Tassi di interesse effettivi: 4.55%, 5%, 5.88%; tassi di sconto effettivi: 4.35%, 4.76%, 5.56%.

Per controllare che la soluzione sia corretta, si verifichi che, in ogni caso, risulta

$$1 + i(t) = \frac{1}{1 - d(t)}.$$

Si dice che il tasso effettivo di interesse $i(t)$ è equivalente al tasso effettivo di sconto $d(t)$.

Esercizio 2. Sia $i(4) = 0.15$ il tasso effettivo per un impiego di 4 periodi. Si determini il relativo tasso di sconto effettivo.

Soluzione. Dalla relazione $1 + i(t) = \frac{1}{1-d(t)}$, si ricava $d(t) = 1 - \frac{1}{1+i(t)}$. In particolare,

$$d(4) = 1 - \frac{1}{1 + i(4)} = 1 - \frac{1}{1 + 0.15} = 0.1304$$

Esercizio 3. Si consideri un impiego di $C_0 = 100$ euro stipulato con legge finanziaria semplice a tasso $i = 3\%$. Si calcoli il tasso effettivo di interesse nel primo, secondo, e terzo periodo.

Soluzione. $C_1 = 100(1 + 0.03) = 103, C_2 = 100(1 + 0.03 \cdot 2) = 106, C_3 = 100(1 + 0.03 \cdot 3) = 109$. I tassi effettivi nei vari periodi possono essere calcolati in due modi equivalenti:

$$i(1) = \frac{103 - 100}{100} = 0.03, \qquad i(2) = \frac{106 - 103}{103} = 0.0291, \qquad i(3) = \frac{109 - 106}{106} = 0.0283$$

oppure

$$i(1) = \frac{0.03}{1 + 0.03 \cdot 0} = 0.03, \qquad i(2) = \frac{0.03}{1 + 0.03 \cdot 1} 0.0291, \quad i(3) = \frac{0.03}{1 + 0.03 \cdot 2} = 0.028.3$$

Esercizio 4. Un ammontare di 150 euro viene impiegato per 3 periodi ai seguenti tassi di interesse effettivi: $i(1) = 2\%$, $i(2) = 3\%$, $i(3) = 5\%$. Si determinino i montanti alle varie epoche e l'interesse complessivo.

Soluzione. $C_1 = 150(1 + 0.02) = 153$, $C_2 = 153(1 + 0.03) = 157.59$, $C_3 = 165.47$. L'interesse complessivo è $I = 165.47 - 150 = 15.47$.

(In questo esercizio risulta evidente che la conoscenza del tasso *effettivo* di interesse rende inutile la conoscenza del regime di interesse. Non sappiamo quale regime di interesse sia applicato: il tasso effettivo di interesse è sufficiente per calcolare il montante.)

Esercizio 5. Si consideri un investimento in un conto all'epoca $t = 0$. Il conto si sviluppa secondo i seguenti saldi:

t	C_t
0	10 000.00
1	10 600.00
2	11 130.00
3	11 575.20
4	12 153.96

Si determinino i tassi effettivi di interesse e si determini il montante di €1500 investite per 4 periodi alle stesse condizioni del conto.

Soluzione.

t	$i(t)$
1	$\frac{10\,600}{10\,000} - 1 = 0.06$
2	$\frac{11\,130}{10\,600} - 1 = 0.05$
3	$\frac{11\,575.2}{11\,130} - 1 = 0.04$
4	$\frac{12\,153.96}{11\,575.2} - 1 = 0.05$

$$1500 \cdot (1 + 0.06)(1 + 0.05)(1 + 0.04)(1 + 0.05) = 1823.09.$$

N.B. Non si confondano i diversi simboli

simbolo	denota
$i(t)$	il tasso di interesse effettivo
$d(t)$	il tasso di sconto effettivo
i	il tasso di interesse (costante) del regime semplice o del regime composto (a seconda del contesto)
d	il tasso di sconto (costante) del regime di interesse anticipato
i_t	il tasso di interesse (variabile) del regime semplice o del regime composto (a seconda del contesto)
d_t	Il tasso di sconto (variabile) del regime di interesse anticipato

Piani di ammortamento

- *Relazione fondamentale*
- *Quota di capitale, quota di interesse, rata, tasso di interesse*
- *Condizioni di chiusura di un piano di ammortamento*
- *Impostazione elementare, impostazione finanziaria. Ammortamento italiano, ammortamento francese*
- *Ammortamento a tassi variabili*

Prof. Carlo Alberto Magni

Relazione fondamentale

$$\overbrace{\boldsymbol{C_t}}^{\textbf{credito residuo a fine periodo}} = \overbrace{\boldsymbol{C_{t-1}}}^{\textbf{credito residuo ad inizio periodo}} + \overbrace{\boldsymbol{iC_{t-1}}}^{\textbf{interesse}} - \overbrace{\boldsymbol{R_t}}^{\textbf{rata di rimborso}}$$

$$\overbrace{(R_t - iC_{t-1})}^{quota\ di\ capitale} = C_{t-1} - C_t$$

$$I_t = quota\ interesse = \quad iC_{t-1} \qquad K_t = quota\ capitale = C_{t-1} - C_t$$

$$R_t = rata\ di\ rimborso = \overbrace{C_{t-1} - C_t}^{K_t} + \overbrace{iC_{t-1}}^{I_t}$$

C_0 rappresenta l'ammontare finanziato all'inizio del primo periodo

$E_t = C_0 - C_t$ rappresenta il credito rimborsato o debito estinto. Dalla precedente, si deduce che, per ogni t, la somma di credito/debito residuo e debito estinto è pari all'ammontare finanziato:

$$E_t + C_t = C_0.$$

Da $K_t = C_{t-1} - C_t$ e $E_t = C_0 - C_t$ si ricava

$$E_1 = C_0 - C_1 = K_1$$

$$E_2 = C_0 - C_2 = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) = K_1 + K_2$$

$$E_3 = C_0 - C_3 = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + (C_2 - C_3) = K_1 + K_2 + K_3$$

$$\vdots$$

$$E_n = C_0 - C_n = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + \cdots + (C_{n-1} - C_n) = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$$

(i) Condizione di chiusura elementare

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = c_0$$

(ii) Condizione di chiusura (finanziaria) iniziale

$$C_0 = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

(iii) Condizione di chiusura (finanziaria) finale

$$C_n = 0$$

Teorema. Le tre condizioni di chiusura di un piano di ammortamento sono equivalenti.

Dimostrazione:

Poiché $K_t = C_{t-1} - C_t$ per ogni t, la condizione di chiusura elementare

$$K_1 + K_2 + K_3 + \cdots + K_n = C_0$$

può essere scritta come

$$(C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + (C_2 - C_3) + \cdots + (C_{n-2} - C_{n-1}) + (C_{n-1} - C_n) = C_0$$

Pertanto, la (i) è equivalente alla (iii).

Dalla relazione fondamentale si ha anche

$$C_t = c_0(1+i)^t - (R_1(1+i)^{t-1} + R_2(1+i)^{t-2} + \cdots + R_{t-1}(1+i) + R_t) \qquad \forall t \geq 1$$

e quindi $C_n = C_0(1+i)^n - (R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \cdots + R_{n-1}(1+i) + R_n)$, che implica

$$\frac{C_n}{(1+i)^n} = C_0 - \left(\frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n}\right)$$

Pertanto, la (ii) e la (iii) sono equivalenti. Per transitività, sono equivalenti anche la (i) e la (ii)

Q.E.D.

La relazione

$$\boldsymbol{C_t = C_0(1+i)^t - (R_1(1+i)^{t-1} + R_2(1+i)^{t-2} + \cdots + R_{t-1}(1+i) + R_t) \quad \forall t \geq 1}$$

è denominata
relazione "retrospettiva" del debito residuo

Dalla condizione di chiusura iniziale, si ha

$$C_0(1+i)^t = \left(\frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n}\right)(1+i)^t$$

$$= R_1(1+i)^{t-1} + R_2(1+i)^{t-2} + \cdots + R_n(1+i)^{t-n}$$

$$= [R_1(1+i)^{t-1} + R_2(1+i)^{t-2} + \cdots + R_{t-1}(1+i) + R_t] + \left[\frac{R_{t+1}}{1+i} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^{n-t}}\right]$$

Allora,

$$\boldsymbol{C_t = \frac{R_{t+1}}{1+i} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^{n-t}}}$$

La relazione

$$\boldsymbol{C_t = \frac{R_{t+1}}{1+i} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^{n-t}}}$$

è denominata relazione "prospettiva" del debito residuo

Piani di ammortamento ad impostazione elementare

Il creditore fissa il tasso contrattuale e le quote di capitale e ricava il resto

epoche	C	I	K	R	E
0	C_0			$-C_0$	0
1	$C_0 - K_1$	iC_0	K_1	$K_1 + iC_0$	$C_0 - C_1$
2	$C_1 - K_2$	iC_1	K_2	$K_2 + iC_1$	$C_0 - C_2$
3	$C_2 - K_3$	iC_2	K_3	$K_3 + iC_2$	$C_0 - C_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$C_{n-1} - K_n = 0$	iC_{n-1}	K_n	$K_n + iC_{n-1}$	$C_0 - C_n = C_0$

Esercizio. Costruire il piano di ammortamento di un finanziamento di cui si conoscono i seguenti dati: $n = 3, K_1 = 40, K_2 = 10, K_3 = 50, i = 10\%$.

	C	I	K	R	E
0	**100**				
1	**60**	**10**	**40**	**50**	**40**
2	**50**	**6**	**10**	**16**	**50**
3	**0**	**5**	**50**	**55**	**100**

Piani di ammortamento ad impostazione finanziaria

Il creditore fissa il tasso contrattuale e le rate di rimborso e ricava il resto

epoche	C	I	K	R	E
0	C_0			$-C_0$	0
1	$C_0(1+i)-R_1$	iC_0	R_1-iC_0	R_1	C_0-C_1
2	$C_1(1+i)-R_2$	iC_1	R_2-iC_1	R_2	C_0-C_2
3	$C_2(1+i)-R_3$	iC_2	R_3-iC_2	R_3	C_0-C_3
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	$C_{n-1}(1+i)-R_n=0$	iC_{n-1}	R_n-iC_{n-1}	R_n	$C_0-C_n=C_0$

Esercizio. Costruire il piano di ammortamento di un finanziamento di cui si conoscono i seguenti dati: $n=3, R_1=40, R_2=10, R_3=50, i=10\%$.

	C	I	K	R	E
0	**82.19**				
1	**50.41**	**8.22**	**31.78**	**40**	**31.78**
2	**45.45**	**5.04**	**4.96**	**10**	**36.74**
3	**0**	**4.55**	**45.45**	**50**	**82.19**

Se le quote di capitale sono costanti, il piano si dice "italiano"

epoche	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{E}$
0	C_0			$-C_0$	0
1	$C_0 - \frac{C_0}{n}$	iC_0	$\frac{C_0}{n}$	$K + iC_0$	$\frac{C_0}{n}$
2	$C_0 - \frac{2C_0}{n}$	iC_1	$\frac{C_0}{n}$	$K + iC_1$	$\frac{2C_0}{n}$
3	$C_0 - \frac{3C_0}{n}$	iC_2	$\frac{C_0}{n}$	$K + iC_2$	$\frac{3C_0}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$C_0 - \frac{nC_0}{n} = 0$	iC_{n-1}	$\frac{C_0}{n}$	$K + iC_{n-1}$	$\frac{nC_0}{n}$

Esempio. $C_0 = 900 \quad n = 3 \;\; i = 10\%$ ammortamento italiano

$$K = 900/3 = 300$$

epoche	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{E}$
0	900			–900	
1			300		
2			300		
3			300		

epoche	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{E}$
0	900			–900	0
1	600	90	300	390	300
2	300	60	300	360	600
3	0	30	300	330	900

$$300 + 300 + 300 = 900$$

$$900 = \frac{390}{1.1} + \frac{360}{1.1^2} + \frac{330}{1.1^3}$$

$$900(1.1)^3 - 390(1.1)^2 - 360(1.1) - 330 = 0$$

Si verifichi che la relazione fondamentale è valida:

$$C_0 = 900$$

$$C_1 = 900(1.1) - 390 = 600$$

$$C_2 = 600(1.1) - 360 = 300$$

$$C_3 = 300(1.1) - 330 = 0$$

Se le rate di rimborso sono costanti , il piano si dice “francese”

epoche	C	I	K	R	E
0	C_0			$-C_0$	0
1	$C_0(1+i)-R$	iC_0	$R-iC_0$	R	C_0-C_1
2	$C_1(1+i)-R$	iC_1	$R-iC_1$	R	C_0-C_2
3	$C_2(1+i)-R$	iC_2	$R-iC_2$	R	C_0-C_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$C_{n-1}(1+i)-R=0$	iC_{n-1}	$R-iC_{n-1}$	R	$C_0-C_n=C_0$

Esempio. $C_0=1000$ $n=4$ $i=20\%$ ammortamento francese

$$1000=\frac{R}{1.2}+\frac{R}{1.2^2}+\frac{R}{1.2^3}+\frac{R}{1.2^4}\Longrightarrow R=386.287$$

epoche	C	I	K	R	E
0	1000				
1	813.71	200.00	186.3	386.287	186.3
2	590.17	162.74	223.5	386.287	409.8
3	321.92	118.03	268.3	386.287	678.1
4	0	64.38	321.9	386.287	1000

$$186.3+223.5+268.3+321.9=1000$$

$$1000=\frac{386.287}{1.2}+\frac{386.287}{1.2^2}+\frac{386.287}{1.2^3}+\frac{386.287}{1.2^4}$$

$$1000(1.2)^4-386.287(1.2)^3-386.287(1.2)^2-386.287(1.2)-386.287=0$$

PRESTITI A TASSO VARIABILE

$$I_t = i_t C_{t-1}$$

$$\Downarrow$$

$$C_t = C_{t-1}(1+i_t) - R_t$$

$$R_t = \overbrace{C_{t-1} - C_t}^{K_t} + \overbrace{i_t C_{t-1}}^{I_t}$$

La condizione di chiusura finanziaria iniziale diventa

$$C_0 = \frac{R_1}{1+i_1} + \frac{R_2}{(1+i_1)\cdot(1+i_2)} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i_1)\cdot \ldots \cdot(1+i_n)}$$

Esempio. Ammortamento francese

$R = 130 \;\; n = 4$

Tasso di interesse

Primo anno	5%
Secondo anno	10%
Terzo anno	15%
Quarto anno	6%

epoche	C	I	K	R	E	*i*
0	€ 426.57					
1	€ 317.90	€ 21.33	€ 0.00	€ 130	€ 0.00	0.05
2	€ 219.69	€ 31.79	€ 90.00	€ 130	€ 90.00	0.1
3	€ 122.64	€ 32.95	€ 60.00	€ 130	€ 150.00	0.15
4	€ 0.00	€ 7.36	€ 100.00	€ 130	€ 250.00	0.06

$$426.57 = \frac{130}{1.05} + \frac{130}{1.05\cdot 1.1} + \frac{130}{1.05\cdot 1.1\cdot 1.15} + \frac{130}{1.05\cdot 1.1\cdot 1.15\cdot 1.06}$$

$$108.67 + 98.21 + 97.05 + 122.64 = 426.57$$

$$C_4 = 0$$

Esempio. Ammortamento ad impostazione elementare

$K_1 = 0,\ K_2 = 90, K_3 = 60, K_4 = 100 \quad n = 4$

Tasso di interesse

Primo anno	48.0%
Secondo anno	4.0%
Terzo anno	12.5%
Quarto anno	20.0%

epoche	C	I	K	R	E	i_t
0	250					
1	250	120	0	120	0	48%
2	160	10	90	100	90	4%
3	100	20	60	80	150	12.5%
4	0	20	100	120	250	20%

$$250 = \frac{120}{1.48} + \frac{100}{1.48 \cdot 1.04} + \frac{80}{1.48 \cdot 1.04 \cdot 1.125} + \frac{120}{1.48 \cdot 1.04 \cdot 1.125 \cdot 1.2}$$

$$0 + 90 + 60 + 100 = 250$$

$$C_n = 0$$

Valutazione di investimenti

- *Accettabilità di un progetto*
- *Valore di un progetto*
- *Valore attuale netto (VAN)*
- *Scelta tra investimenti*
- *Tasso interno di rendimento (TIR)*

Prof. Carlo Alberto Magni

ACCETTABILITÀ DI UN PROGETTO

Definizione. Si definisce **operazione finanziaria** o **progetto** qualsiasi vettore di flussi di cassa

$$F = [F_0,\ F_1, \dots ,F_n] \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Assunzione:

esistenza di un mercato dove è possibile investire fondi a tasso r

Si supponga di poter investire in un progetto che genera i flussi di cassa

$$[100, 200, 60]$$

alle epoche 1, 2, 3 rispettivamente. Il valore di mercato di questo progetto è la somma dei valori attuali dei flussi di cassa (rendita immediata posticipata valutata a tasso r):

$$V = \frac{100}{1+r} + \frac{200}{(1+r)^2} + \frac{60}{(1+r)^3};$$

ciò vuole dire che l'investitore può vendere sul mercato il progetto e incassare V euro. Sia $r = 10\%$.

$$V = \frac{100}{1.1} + \frac{200}{1.1^2} + \frac{60}{1.1^3} = 90.909 + 165.289 + 45.078 = 301.376$$

Supponiamo che il costo del progetto sia 250. Siccome $301.376 > 250$, il valore è maggiore del costo. Dunque, il progetto è conveniente (acquisto a 250 qualcosa che vale 301.376).

IL VALORE ATTUALE NETTO

Sia $F = [F_0, F_1, \dots , F_n]$ un progetto. Sia r il tasso di mercato.

Il valore di mercato del progetto è

$$\boldsymbol{V(r) = \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+r)^n}}$$

Supponiamo che il costo del progetto sia c_0. Allora il progetto conviene se e solo se il valore è maggiore del costo: $V(r) > c_0$

$$0 < V(r) - F_0 = \text{VAN}\,(r) = F_0 + \overbrace{\frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+r)^n}}^{\text{valore}}$$

Criterio del VAN. Sia r il tasso di interesse vigente sul mercato. Il progetto è accettabile (conveniente) se e solo se

$$\text{VAN}(r) > 0.$$

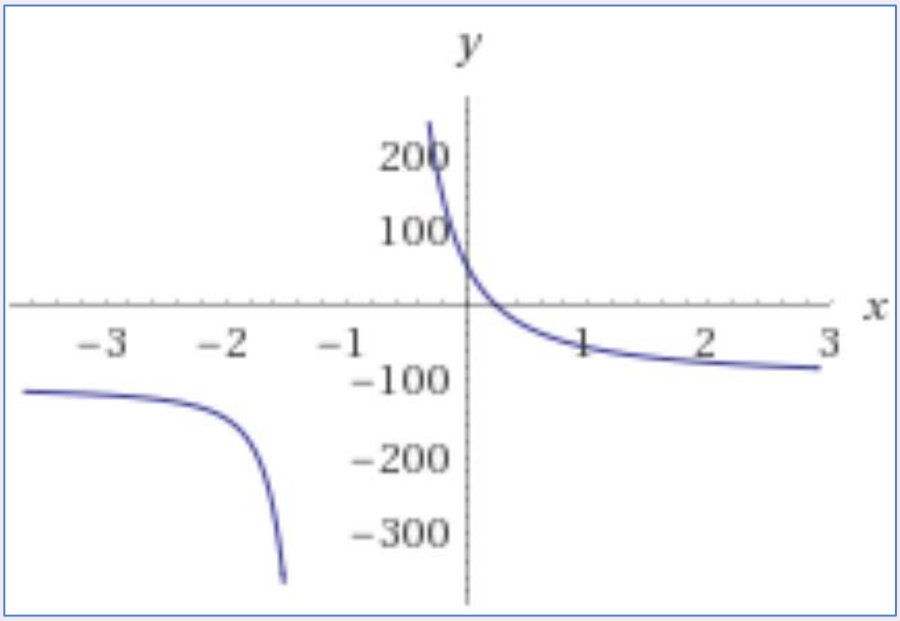
COSTO DEL CAPITALE

Il tasso r è comunemente definito costo (opportunità) del capitale. Si tratta del tasso di rendimento a cui si potrebbero investire i propri fondi. Rappresenta quindi la remunerazione che il capitale avrebbe se fosse investito sul mercato a tasso r .

Esempio. Sia $\vec{F} = (-100, 50, 50, 50)$ un progetto di investimento e sia $r = 5\%$ il costo del capitale.

$$VAN(x) = -100 + \frac{50}{1+x} + \frac{50}{(1+x)^2} + \frac{50}{(1+x)^3}$$

$$VAN(5\%) = -100 + \frac{50}{1+0.05} + \frac{50}{(1+0.05)^2} + \frac{50}{(1+0.05)^3} = 36.16$$



Il dominio appropriato della funzione è $(-1, +\infty)$ per cui trascuriamo l'intervallo $(-\infty, -1)$.

SCELTA TRA INVESTIMENTI

Si considerino due progetti A e B e si noti il VAN è una misura additiva, cioè

$$VAN^{A+B} = F_0^A + F_0^B + \frac{F_1^A + F_1^B}{1+r} + \frac{F_2^A + F_2^B}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F_n^A + F_n^B}{(1+r)^n} =$$

$$\left(F_0^A + \frac{F_1^A}{1+r} + \frac{F_2^A}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F_n^A}{(1+r)^n}\right)$$

$$+\left(F_0^B + \frac{F_1^B}{1+r} + \frac{F_2^B}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F_n^B}{(1+r)^n}\right) =$$

$= VAN^A + VAN^B.$

Allora, essendo $A = B + (A - B)$, l'additività del VAN implica

$$VAN^A = VAN^{B+(A-B)} = VAN^B + VAN^{A-B}.$$

Quindi, A può essere visto come un portafoglio costituito da B stesso e un progetto incrementale $A - B$. Dunque, il confronto tra A e B si riduce alla valutazione del progetto incrementale $A - B$. Se (e solo se) $VAN^{A-B} > 0$, $A - B$ è conveniente, cioè A è preferibile a B. Data l'additività del VAN, $VAN^{A-B} = VAN^A - VAN^B > 0$, cioè $VAN^A > VAN^B$.

Cioè, tra due progetti è preferibile quello che presenta il VAN maggiore.

Esempio.

$$A = (-100, 40, 50, 90) \qquad r = 2\%$$

$$VAN^A(2\%) = -100 + \frac{40}{1.02} + \frac{50}{1.02^2} + \frac{90}{1.02^3} = 72.08 > 0 \rightarrow conveniente$$

$$B = (-40, 0, 15{,}0{,}70) \qquad r = 2\%$$

$$VAN^B(2\%) = -40 + \frac{0}{1.02} + \frac{15}{1.02^2} + \frac{0}{1.02^3} + \frac{70}{1.02^3} = 39.09 > 0 \rightarrow conveniente$$

A è preferito a B

oppure $A - B = (-60, 40, 35, 90, -70) \rightarrow VAN^{A-B}(2\%) = 32.99$

E se il costo del capitale è variabile?

Sia r_t il tasso di mercato (costo del capitale) per impieghi che iniziano all'epoca $t-1$ e si concludono all'epoca t. In tal caso, $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ è la sequenza di tassi di mercato (cosiddetta struttura a termine o a scadenza dei tassi di interesse). In tal caso, il valore di un progetto è ottenuto come

$$V_0 = \frac{F_1}{1+r_1} + \frac{F_2}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)} + \cdots + \frac{F_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdot \dots \cdot (1+r_n)}$$
$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{\prod_{k=1}^{t}(1+r_k)}$$

che può anche essere riformulato come

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} F_t d_{t,0}$$

dove $d_{t,0} = 1/\prod_{k=1}^{t}(1+r_k)$ indica il fattore di sconto da t a 0. Pertanto,

$$VAN = V_0 - C_0 = \sum_{t=0}^{n} F_t d_{t,0}$$

con $d_{0,0} = 1$.

N.B. I fattori $d_{t,0}$ si possono ottenere ricorsivamente con la seguente formula:

$$d_{t,0} = \frac{d_{t-1,0}}{1+r_t}$$

Ad esempio, se $F = (-100, 50, 60, 70, 40)$ e $r = (10\%, 5\%, 8\%, 2\%)$, si ha

$$d_{0,0} = 1$$
$$d_{1,0} = \frac{d_{0,0}}{1+r_1} = \frac{1}{1+10\%} = 0.9091$$
$$d_{2,0} = \frac{d_{1,0}}{1+r_2} = \frac{0.9091}{1+5\%} = 0.8658$$
$$d_{3,0} = \frac{d_{2,0}}{1+r_3} = \frac{0.8658}{1+8\%} = 0.8017$$
$$d_{4,0} = \frac{d_{3,0}}{1+r_4} = \frac{0.8017}{1+2\%} = 0.7859$$

e quindi

$$VAN(10\%, 5\%, 8\%, 2\%) = -100 \cdot 1 + 50 \cdot 0.9091 + 60 \cdot 0.8658 + 70 \cdot 0.8017 + 40 \cdot 0.7859$$
$$= 84.9573$$

Esempio. $P = (-100, 40, 50, 90)$ $\qquad r_1 = 2\%, r_2 = 3\%, r_3 = 5\%.$

$$VAN = -100 + \frac{40}{1.02} + \frac{50}{1.02 \cdot 1.03} + \frac{90}{1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.05} = 68.39$$

oppure

$$d_{0,0} = 1, \qquad d_{1,0} = \frac{1}{1.02} = 0.980392, \ \ d_{2,0} = \frac{0.980392}{1.03} = 0.951837,$$
$$d_{3,0} = \frac{0.951837}{1.05} = 0.906511,$$

$$VAN = -100 + 40 \cdot 0.980392 + 50 \cdot +90 \cdot 0.906511 = 68.39$$

Nelle applicazioni si richiede spesso un parametro che misuri il rendimento, sulla base del quale poter prendere decisioni. Un tasso di rendimento è cognitivamente più semplice: la percezione di un rendimento in termini percentuali è più agevolmente comprensibile di un incremento della ricchezza dell'investitore in valore assoluto. Quindi, anche quando si potrebbe utilizzare il criterio del VAN, spesso si richiede il tasso di rendimento del progetto, per avere un'informazione ritenuta più intuitiva. Il tasso di rendimento più diffuso è il cosiddetto

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO (TIR)

INTERNAL RATE OF RETURN (IRR)

Kenneth Boulding (1935). The theory of a single investment,

Quarterly Journal of Economics

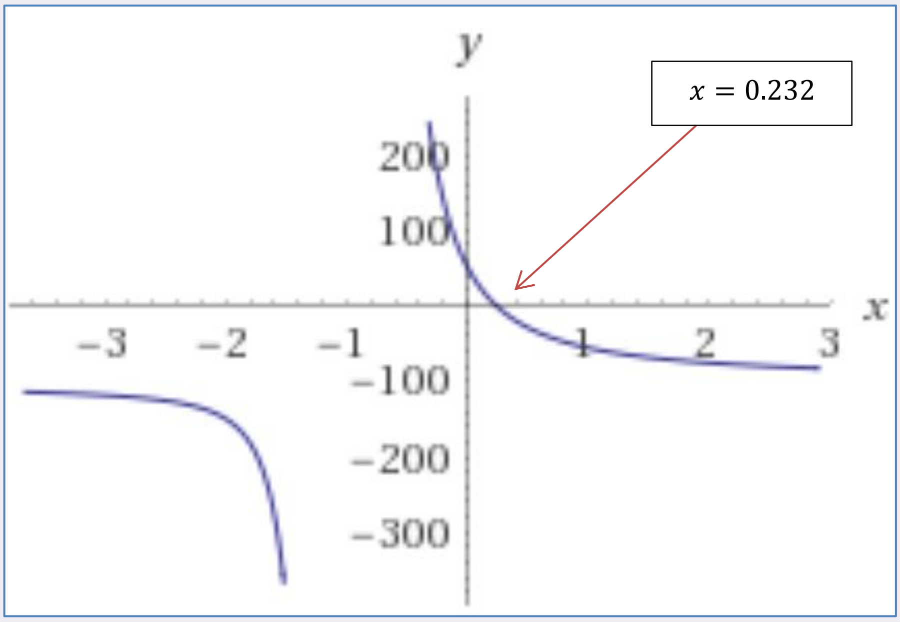
Definizione. Si dice tasso interno di rendimento un tasso i tale che $\mathrm{VAN}(i) = 0$.

Criterio del TIR: un investimento (risp. finanziamento) è accettabile/conveniente se il suo TIR è maggiore (risp. minore) del tasso di interesse sul mercato (costo opportunità del capitale). Tra due o più progetti è preferibile scegliere il progetto con TIR maggiore.

Esempio. Sia $F = (-100, 50, 50, 50)$ un progetto di investimento .

$$VAN(x) = -100 + \frac{50}{1+x} + \frac{50}{(1+x)^2} + \frac{50}{(1+x)^3} = 0$$

$$x = 23.2\%$$

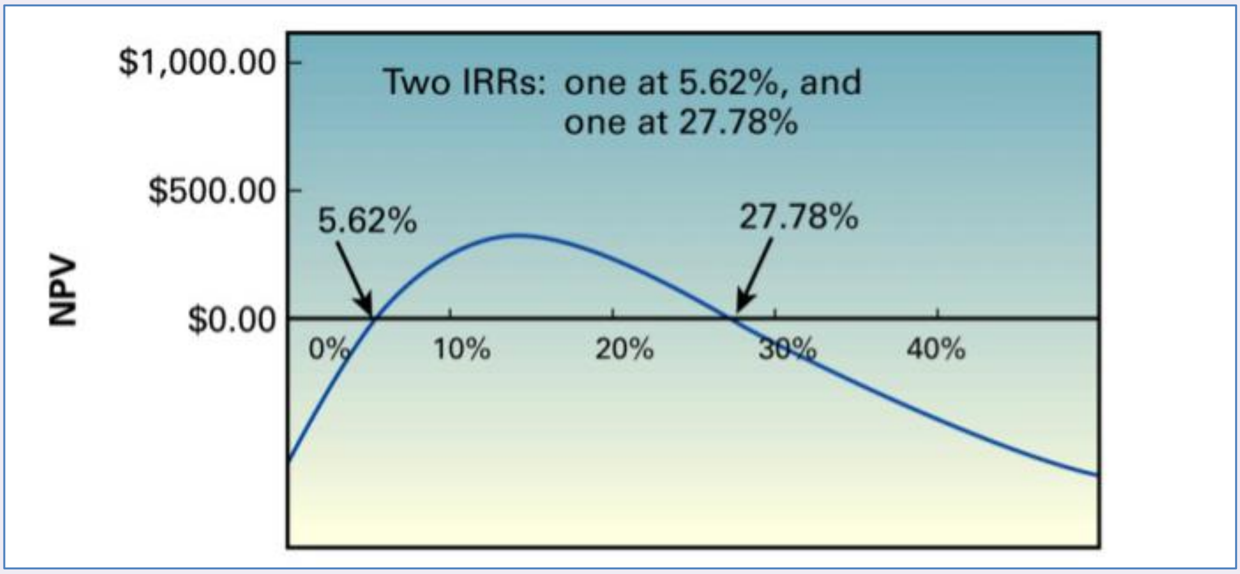


Alcuni problemi del TIR

(1) **l'equazione può avere soluzioni multiple**:

$$0 = -11000 + \frac{7500}{1+x} + \frac{7500}{(1+x)^2} + \frac{7500}{(1+x)^3} + \frac{7500}{(1+x)^4} - \frac{20000}{(1+x)^5}$$

$$i = 5.62\%, \qquad i = 27.78\%$$



qual è il TIR corretto?

(2) un'operazione finanziaria può avere natura sia di investimento sia di finanziamento:

Esempio: contratto finanziario con tasso contrattuale $i = 5\%$

epoche	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
flussi di cassa	–100	165	–163	205	–105

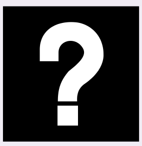
$$-100 + \frac{165}{1 + 0.05} + \frac{-163}{(1 + 0.05)^2} + \frac{205}{(1 + 0.05)^3} + \frac{-105}{(1 + 0.05)^4} = 0$$

Il tasso contrattuale rappresenta il un TIR dell'operazione. Determiniamo i capitali investiti ad ogni epoca secondo l'usuale relazione fondamentale.

Credito residuo	**Posizione finanziaria**
$\boldsymbol{C_0 = 100}$	INVESTIMENTO
$\boldsymbol{C_1 = 100(1.05) - 165 = -60}$	FINANZIAMENTO
$\boldsymbol{C_2 = -60(1.05) - (-163) = 100}$	INVESTIMENTO
$\boldsymbol{C_3 = 100(1.05) - 205 = -100}$	FINANZIAMENTO
$\boldsymbol{C_4 = -100(1.05) - (-105) = 0}$	

***Il TIR è tasso attivo o tasso passivo*?**

In alcuni periodi, il TIR è tasso di investimento, in altri periodi il TIR è tasso di finanziamento.



(3) **l'equazione può non avere soluzioni in campo reale**:

$$[-10, 30, -25]$$

$$-10 + \frac{30}{1+x} + \frac{-25}{(1+x)^2} = 0$$

dov'è il tasso di rendimento?

(4) **il tasso di mercato può non essere costante**:

$$r_1 = 10\%, r_2 = 15\%, r_3 = 5\%$$

come si applica il criterio del TIR?

(5) **Il criterio del TIR è incompatibile col principio di scelta tra progetti mutuamente esclusivi**:

$$\boldsymbol{F_A} = (-100{,}10{,}12{,}110)$$

$$\boldsymbol{F_B} = (-90{,}70{,}10{,}10,20)$$

$$i_{F_1} = 10.66\%$$

$$i_{F_2} = 12.22\%$$

$$r = 1\%$$

Secondo il criterio del TIR, F_2 è preferibile perché il suo TIR è maggiore. In realtà, questa decisione non soddisfa il principio di scelta tra investimenti, giacché $\mathrm{VAN}_{\mathrm{F_A}}(1\%) = 28.43 > \mathrm{VAN}_{\mathrm{F}_B}(1\%) = 18.04$ o, equivalentemente, $\mathrm{VAN}_{\mathrm{F_A-F_B}}(1\%) = 10.39 > 0$

Tutti questi (e altri) problemi mostrano che il TIR non è un indice soddisfacente

Soluzione? → **Corso di Principi e modelli per le decisioni manageriali**

(2° anno)