MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24
Corso di laurea in Economia Aziendale e Management
Università di Modena e Reggio Emilia

Fascicolo n. 3

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

- *Tasso medio di variazione, derivata di una funzione, retta tangente*
- *Derivate delle funzioni elementari*
- *Regole di calcolo delle derivate*
- *Teoremi di de L'Hopital*
- *Derivabilità e continuità*
- *Equazione della retta tangente in* $P(x_0, f(x_0))$, *differenziale primo*
- *Formula di Taylor*
- *Massimi e minimi locali e assoluti, criterio di monotonia*
- *Massimi e minimi nei vari domini*
- *Le funzioni costo marginale, ricavo marginale*
- *Funzioni convesse e concave*
- *Esercizi ed applicazioni*

Prof.ssa Carla Fiori
Prof. Carlo Alberto Magni

Università di Modena e Reggio Emilia

Calcolo differenziale per funzioni a una variabile

Docente: Carlo Alberto Magni
Revisione, integrazioni ed editing: Carlo Alberto Magni

1. Calcolo differenziale (1) – Tasso medio di variazione (rapporto incrementale)

0:00:00 Intro
0:00:29 Definizione e intuizione
0:05:18 Formalizzazione
0:07:23 Tasso medio di variazione da una tabella
0:28:20 Tasso medio di variazione da un grafico
0:39:48 Tasso medio di variazione da una formula
0:49:49 Riepilogo
0:54:30 Outro

2. Calcolo differenziale (2) – Derivata di una funzione

0:00:00 Intro
0:00:18 Limite del tasso medio di variazione
0:11:20 Significato geometrico del limite del tasso medio di variazione
0:21:50 Tasso istantaneo di variazione
0:24:57 Derivata
0:28:57 Derivabilità di una funzione (in un punto)
0:33:11 Derivata di una funzione lineare affine
0:37:38 Punto angoloso e cuspide
0:39:27 Derivata destra e sinistra
0:44:16 Punto angoloso e cuspide (continua)
0:50:17 Outro

ERRORE IN 0:24:38 - è 100 km in un'ora (non 60 km)

3. Calcolo differenziale (3) – Derivate, limiti e rette tangenti

0:00:00 Intro
0:00:12 Analisi della derivata mediante grafico e retta tangente
0:08:12 Derivabilità di una funzione in un insieme
0:12:57 Tre modi per intendere la derivata
0:15:10 Applicazione (meteorologia)
0:24:13 Calcolo delle derivate mediante i limiti?
0:26:13 Outro

4. Calcolo differenziale (4) – Tecniche di derivazione

0:00:00 Intro
0:00:19 Derivate e calcolo dei limiti
0:11:53 Derivate delle funzioni elementari
0:20:44 Regole di calcolo per le derivate
0:27:04 Esempi

0:39:49 Derivazione di funzioni composte (2 componenti)
0:40:43 Esercizio 1
0:44:02 Esercizio 2
0:47:57 Derivata logaritmica e funzione potenza
0:50:07 Esercizio 3
0:52:11 Derivazione di funzioni composte (3 componenti)
0:53:58 Esercizio 4
0:56:34 Esercizio 5
0:57:44 Esercizio 6
1:02:01 Derivata di f(x) elevata a g(x)
1:08:16 Esercizio 7
1:09:55 Esercizio 8
1:11:00 Derivata di a elevato a g(x)
1:14:48 Outro

CORREZIONE: 01:10:35 – non è $\frac{1}{x}\sin x$ bensì $\frac{1}{x}\ln(\sin x)$

5. Calcolo differenziale (5) – Teoremi di de L'Hopital

0:00:00 Intro
0:00:17 Teoremi di de L'Hopital
0:05:49 Esercizio 1
0:09:43 Esercizio 2
0:19:08 Esercizio 3
0:26:43 Outro

6. Calcolo differenziale (6) – Derivabilità e continuità

0:00:00 Intro
0:00:19 Derivabilità implica continuità: enunciato e dimostrazione
0:07:44 Relazione logica tra derivabilità e continuità
0:15:59 Outro

7. Calcolo differenziale (7) – Equazione della retta tangente e differenziale primo

0:00:00 Intro
0:00:19 Equazione della retta tangente
0:02:54 Esercizio 1
0:06:09 Esercizio 2
0:09:06 Approssimazione della funzione con l'equazione della retta tangente
0:18:22 Differenziale primo
0:22:40 Applicazione (costo della produzione)
0:27:23 Applicazione (mercati finanziari)
0:34:26 Outro

8. Calcolo differenziale (8) – Criterio di monotonia

0:00:00 Intro
0:00:18 Relazione tra derivata e monotonia di una funzione
0:04:20 Teorema di Lagrange
0:08:04 Criterio di monotonia: enunciato

0:17:16 Criterio di monotonia: dimostrazione
0:31:54 Funzione costante e derivata
0:37:52 Esercizio 1
0:40:56 Esercizio 2
0:45:41 Esercizio 3
0:53:19 Monotonia separata - Esercizio 4
1:04:06 Monotonia separata - Esempio 1
1:05:24 Monotonia separata - Esempio 2
1:10:10 Crescenza in un punto
1:10:52 Esercizio 5
1:14:35 Outro

9. Calcolo differenziale (9) – Massimi e minimi assoluti

0:00:00 Intro
0:00:18 Massimo e minimo assoluto
0:07:44 Massimo, minimo e immagine f(A)
0:13:38 Massimo e minimo assoluto vs estremo superiore e inferiore
0:22:15 Pluralità di punti di massimo e minimo
0:25:40 Teorema di Weierstrass
0:35:44 Teorema dei valori intermedi o di Darboux
0:43:19 Outro

10. Calcolo differenziale (10) – Massimi e minimi relativi

0:00:00 Intro
0:00:18 Massimo e minimo relativo (o locale)
0:17:25 Massimi e minimi di una funzione costante
0:20:45 Esempio
0:30:02 Outro

11. Calcolo differenziale (11) – Ricerca di massimi e minimi relativi (funzioni continue)

0:00:00 Intro
0:00:20 Il Teorema di Fermat
0:04:09 Enunciato del Teorema di Fermat
0:05:38 Dimostrazione del Teorema di Fermat
0:13:06 Teorema di Fermat: condizione necessaria ma non sufficiente
0:17:15 Punti stazionari
0:19:35 Punti critici
0:24:31 Condizioni sufficienti
0:29:01 Condizioni del prim'ordine e condizioni del second'ordine
0:32:01 Esercizio 1
0:40:00 Esercizio 2
0:50:22 Punti di non derivabilità
1:11:04 Punti di frontiera
1:22:01 Riepilogo
1:23:15 Outro

12. Calcolo differenziale (12) – Ricerca di massimi e minimi relativi (punti di discontinuità)

0:00:00 Intro

13. Calcolo differenziale (13) – Ricerca di massimi e minimi assoluti - Introduzione

14. Calcolo differenziale (14) – Ricerca di massimi e minimi in dominio chiuso e limitato

INTEGRAZIONE: Al minuto 0:34:50 (Esempio 2): x=1 è punto di minimo relativo e anche assoluto

15. Calcolo differenziale (15) – Ricerca di massimi e minimi in dominio non chiuso o non limitato (teoria)

16. Calcolo differenziale (16) – Ricerca di massimi e minimi in dominio non chiuso o non limitato (esercizi)

0:00:00 Intro
0:00:18 Esercizio 1a
0:08:30 Esercizio 1b
0:10:52 Esercizio 1c
0:14:01 Esercizio 1d
0:16:30 Esercizio 1e
0:24:02 Esercizio 2
0:38:20 Outro

17. Calcolo differenziale (17) – Ricerca di massimi e minimi assoluti – Regola generale

0:00:00 Intro
0:00:17 Può il minimo dei minimi relativi essere maggiore del massimo dei massimi relativi?
0:07:17 Metodo generale per la ricerca dei massimi e minimi assoluti
0:16:37 Procedura generale per la ricerca di massimi e minimi assoluti
0:17:45 Outro

18. Calcolo differenziale (18) – Derivate seconde e di ordine successivo

0:00:00 Intro
0:00:18 Derivata seconda
0:05:17 Derivate di ordine successivo
0:08:04 Esercizio 1 (velocità e accelerazione)
0:11:18 Esercizio 2 (velocità e accelerazione)
0:13:40 Ricerca di massimi e minimi con la derivata seconda
0:23:04 Regola generale
0:24:42 Esercizio 3
0:30:12 Esercizio 4 (massimizzazione del ricavo)
0:42:50 Esercizio 5 (massimizzazione del ricavo)
0:48:05 Outro

19. Calcolo differenziale (19) – Funzioni convesse e funzioni concave

0:00:00 Intro
0:00:19 Funzioni convesse e funzioni concave
0:16:10 Funzioni sia convesse sia concave
0:18:41 Esempi
0:23:15 Punti di flesso
0:29:01 Outro

20. Calcolo differenziale (20) – Convessità per funzioni derivabili

0:00:00 Intro
0:00:14 Convessità
0:00:57 Convessità e rette tangenti
0:04:48 Criterio di convessità per funzioni derivabili due volte
0:13:49 Perché una funzione convessa ha derivata prima crescente?
0:18:19 Derivata prima e derivata seconda
0:22:45 Riepilogo
0:23:54 Classificazione dei punti di flesso
0:36:45 Nota a margine sulla derivata seconda nulla

0:39:59 Esercizio
0:52:57 Outro

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Nello studio di una funzione reale di variabile reale ha particolare importanza il **rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, detto anche **tasso di variazione medio**, perché indica quanto varia la y al variare di x .

$$\textbf{Tasso di variazione medio} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

In generale, fissato un punto $x_0 \in A$ e un incremento Δx tale che $x_0 + \Delta x_0 \in A$, il tasso medio di variazione di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ nell'intervallo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ è espresso da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

o, scrivendo h al posto di Δx,

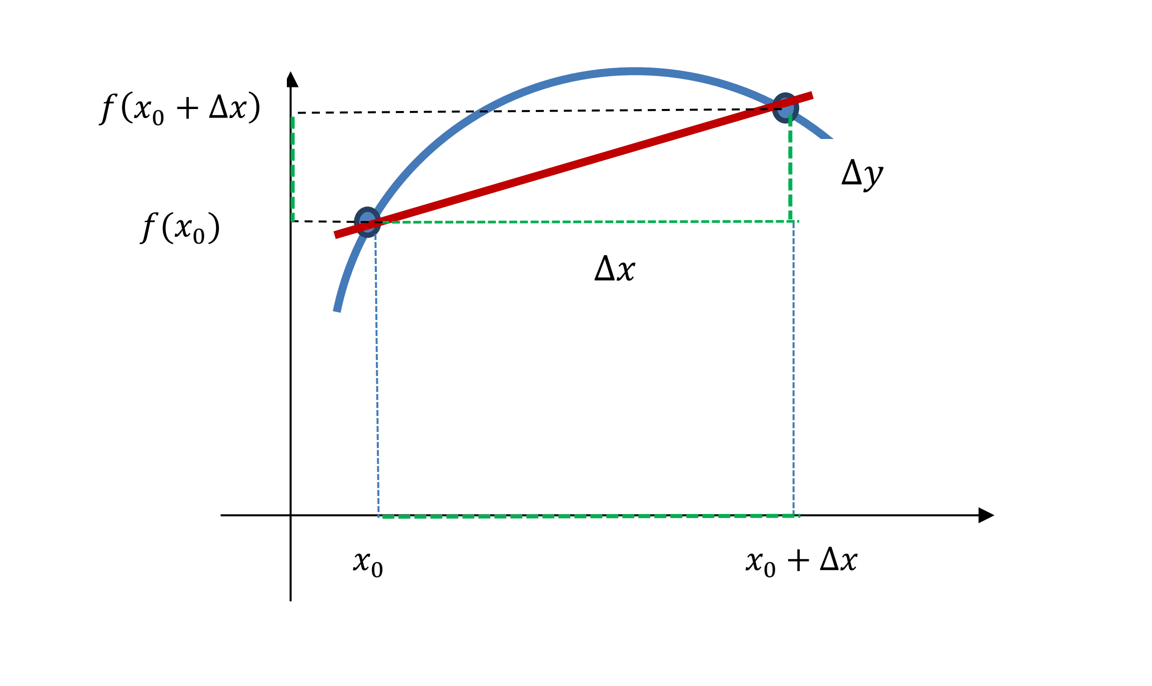
$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oppure, ponendo $x = x_0 + \Delta x$, il tasso medio di variazione di f nell'intervallo $[x_0, x]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Se $f(x) = mx + q$, il grafico della funzione è una retta e abbiamo dimostrato (fascicolo. 2) che il tasso di variazione medio rimane **costante** ossia è indipendente sia dal valore dell'incremento sia dal punto x_0 dove si calcola la variazione di x . Inoltre risulta
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$
- Se $f(x)$ non è una funzione lineare (o lineare affine) ossia non è rappresentata da una retta, allora il tasso di variazione medio dipende sia dal valore dell'incremento sia dal punto in cui si calcola la variazione di x.

Dal punto di vista grafico, il tasso di variazione medio di $\boldsymbol{f}$ in un intervallo $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x}]$ è la pendenza della retta che congiunge i punti $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))$ e $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$



Tasso di variazione medio = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

TASSO DI VARIAZIONE MEDIO

Sia t=0 l'anno 1995

Anno, t		**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Prezzo azione A, $S_A(t)$		**20**	**18**	**16**	**14**	**12**	**10**

Anno, t		**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Prezzo azione B, $S_B(t)$		**20**	**20**	**20**	**30**	**20**	**10**

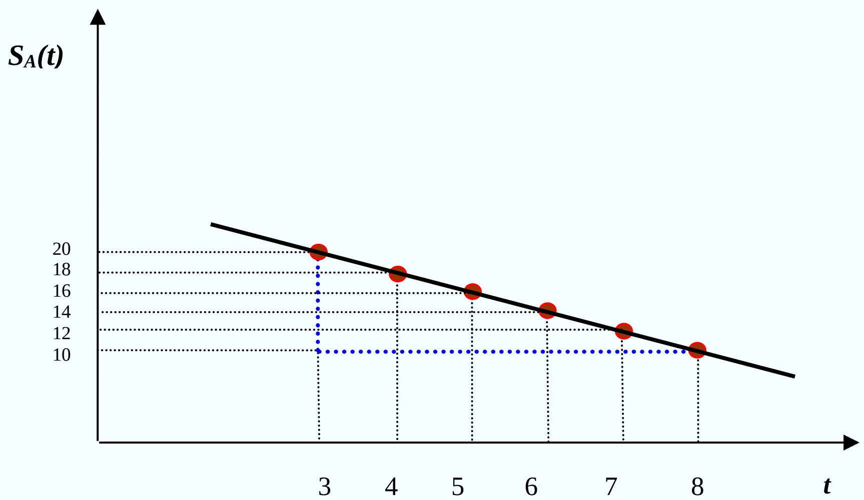
Calcoliamo il tasso di variazione medio tra il 1998 e il 2003, cioè per $3 \leq t \leq 8, t \in N$

$$t_0 = 3, \quad t = 8, \quad \Delta t = 5$$

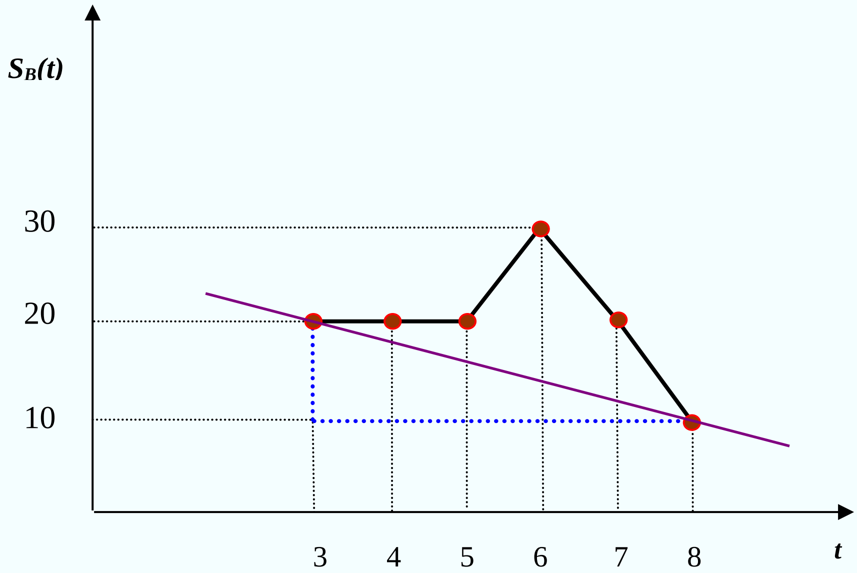
$$\frac{S_A(8) - S_A(3)}{8-3} = \frac{10-20}{5} = -2\,€ \qquad \text{all'anno}$$

$$\frac{S_B(8) - S_B(3)}{8-3} = \frac{10-20}{5} = -2\,€ \qquad \text{all'anno}$$

Sia per le azioni A che per le azioni B troviamo la stessa variazione media ma, come mostrano i grafici, il comportamento del prezzo delle azioni A e quello delle azioni B è molto diverso.

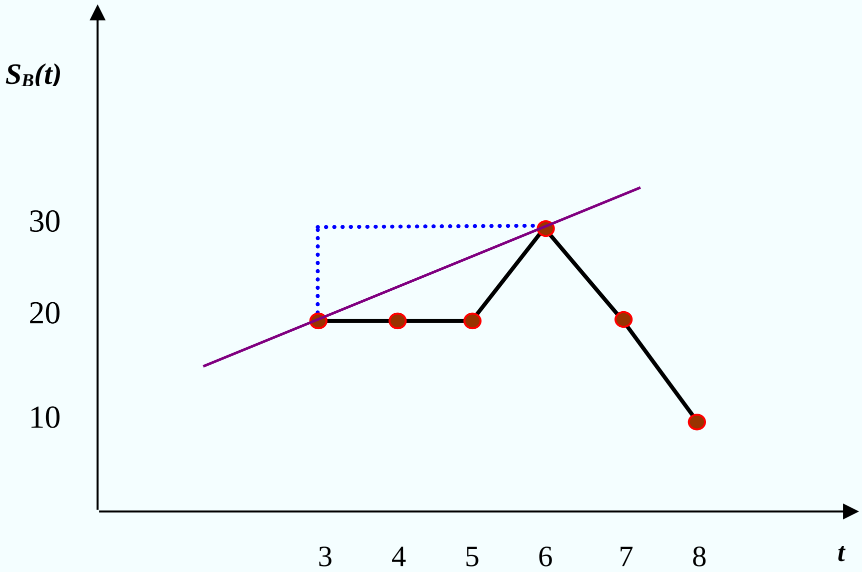


<u>*Azioni A*</u>: -2 è la pendenza della retta che congiunge i punti $(3, 20)$ e $(8, 10)$.
Tutti i punti del grafico stanno su una stessa retta e pertanto trovo lo stesso tasso di variazione medio anche se lo calcolo tra punti diversi da quelli considerati: *il prezzo delle azioni è sempre diminuito e in modo costante.*



Azioni B: -2 è la pendenza della retta che congiunge i punti (3, 20) e (8, 10).

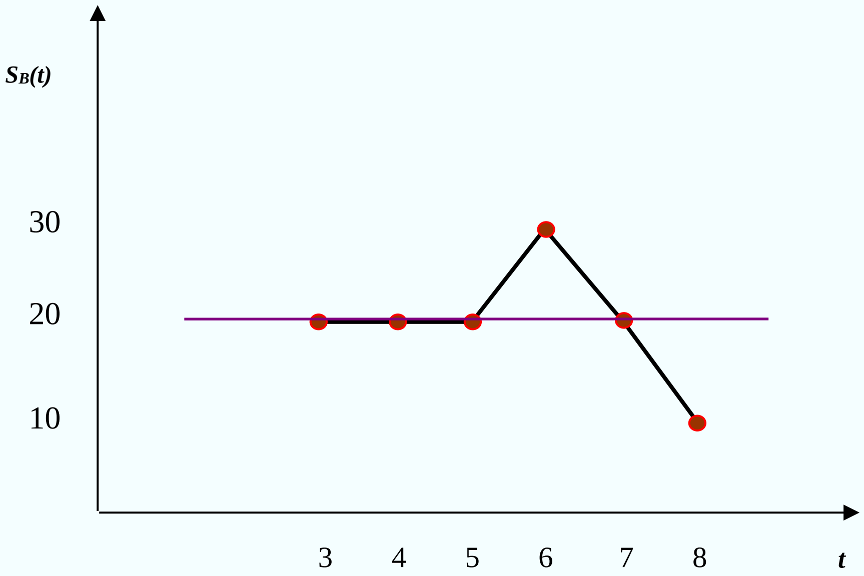
Ma a differenza delle azioni A del caso precedente, il prezzo delle azioni non è sempre diminuito. Il grafico non è più una retta e per questo il tasso di variazione medio dipende dai punti che considero per calcolarlo. Ad esempio, se calcolo il tasso di variazione medio fra i punti (3, 20) e (6, 30) ottengo $3.\overline{3}$ e sembra che il prezzo delle azioni in questo intervallo di tempo sia sempre aumentato mentre è aumentato solo tra $t = 5$ e $t = 6$.



$$t_0 = 3, \quad t = 6, \quad \Delta t = 3$$

$$\frac{S_B(6) - S_B(3)}{6-3} = \frac{30-20}{6-3} = 3.\overline{3}$$

Se calcolo il tasso di variazione medio fra i punti (3, 20) e (7, 20) ottengo 0 e sembra che il prezzo delle azioni in questo intervallo di tempo sia rimasto costante mentre in realtà non è così.

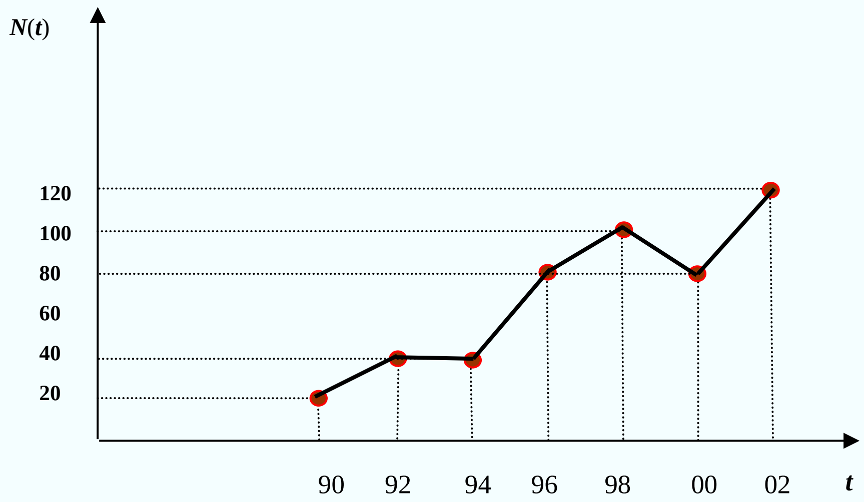


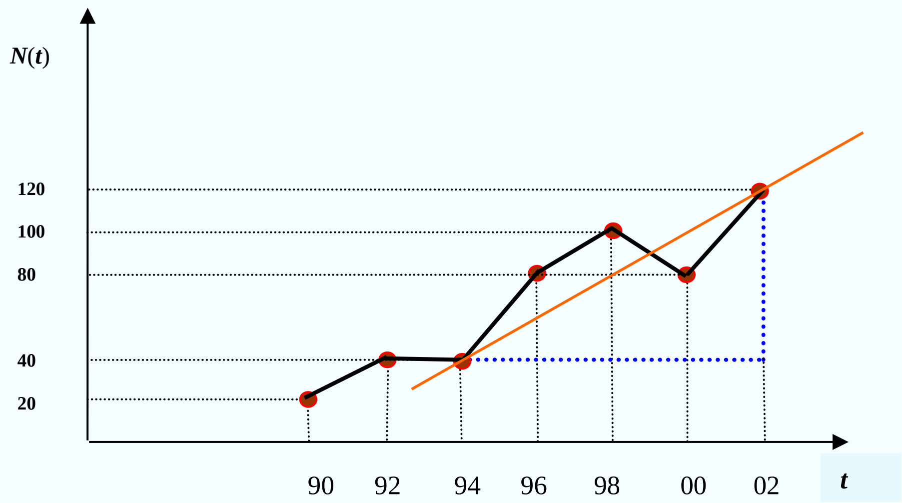
$$t_0 = 4, \quad t = 7, \quad \Delta t = 3$$

$$\frac{S_B(7) - S_B(4)}{7-4} = \frac{20-20}{7-4} = 0$$

Esercizio.

Il seguente grafico rappresenta le vendite dei veicoli bifuel (benzina/gpl) espresso in migliaia.
Si chiede di stimare il tasso di variazione medio di N(t) nell'intervallo [1994, 2002].





$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(2002)-N(1994)}{2002-1994}=\frac{120-40}{8}=10 \quad \text{mila veicoli all'anno}$$

10 è la pendenza della retta che congiunge i due punti (1994, 40) e (2002, 120).

Abbiamo ricavato il tasso di variazione medio. Ora mostriamo come applicare la definizione di tasso di variazione medio a partire dall'espressione analitica di una funzione, applicandone la definizione. Consideriamo il seguente esempio.

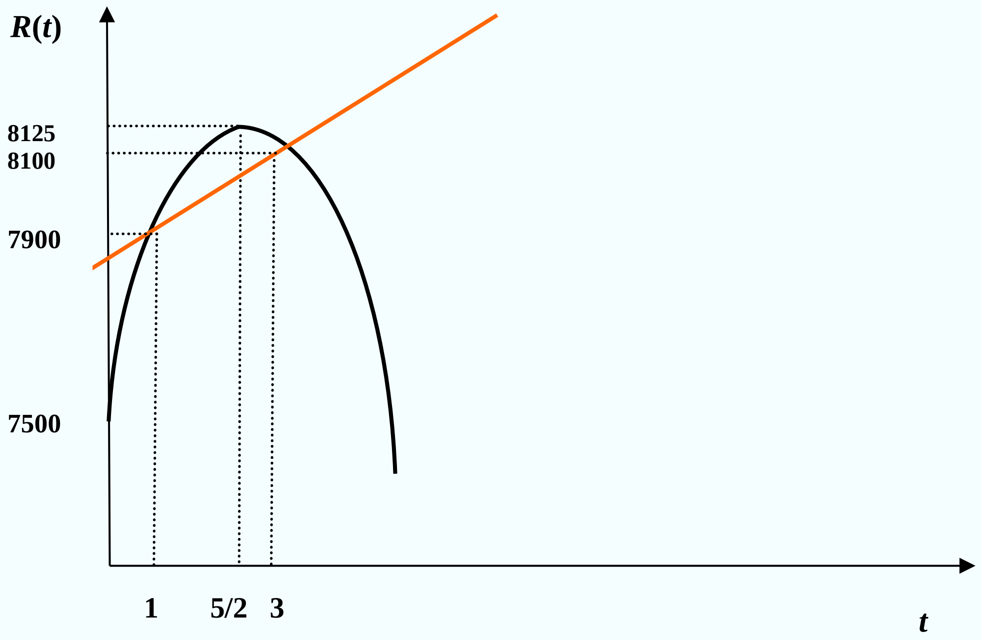
Le vendite di un'azienda sono approssimabili secondo la funzione

$$\boldsymbol{R(t) = 7500 + 500t - 100t^2}$$

Il tasso di variazione medio delle vendite nell'intervallo di tempo [1, 3] è:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t}=\frac{R(3)-R(1)}{3-1}=\frac{(7500+500\cdot 3-100\cdot 3^2)-(7500+500\cdot 1-100\cdot 1^2)}{2}$$
$$=\frac{8100-7900}{2}=100$$

Come si vede dal grafico della funzione, il valore del rapporto di variazione medio trovato non rispecchia il reale andamento delle vendite che nell'intervallo [1, 3] non sono sempre in crescita ma lo sono solo in $\left[1,\frac{5}{2}\right]$.



Calcoliamo ora il tasso di variazione medio delle vendite nell'intervallo $[3, 3+\Delta t]$

Δt	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\frac{\Delta R}{\Delta t}$	–200	–110	–101	–100.1	–100.01	–100.001

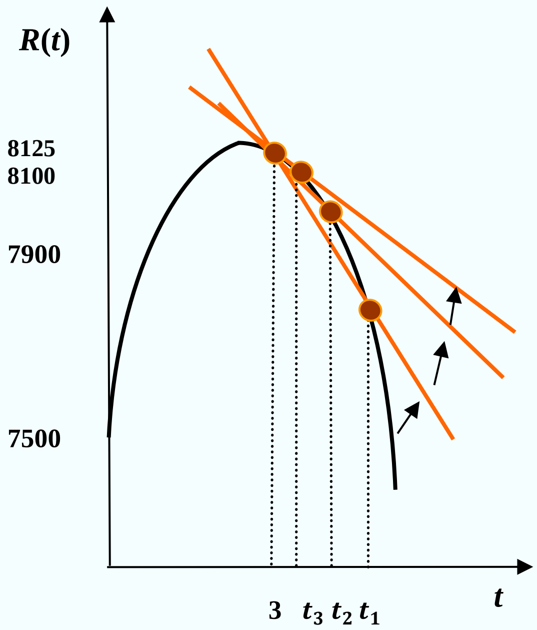
Quando $\Delta t \to 0^+$, ossia quando $t + \Delta t$ tende a 3 da destra, il rapporto incrementale tende a (si avvicina a) -100 .

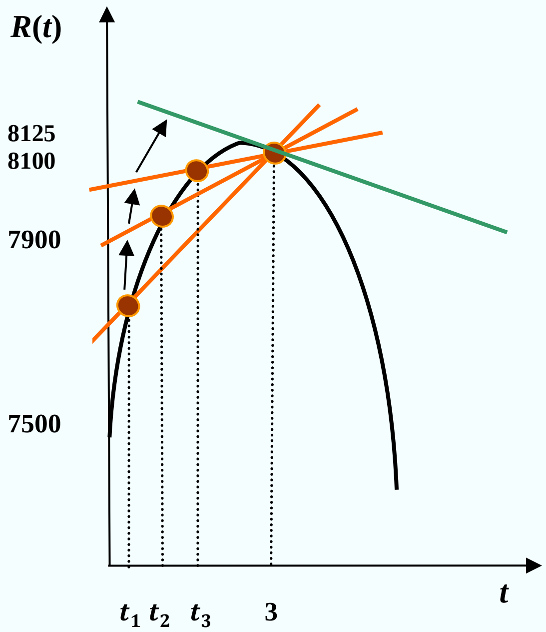
Se ora consideriamo il rapporto incrementale $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ nell'intervallo $[3+\Delta t, 3]$ con $\Delta t < 0$, ritroviamo che quando $\Delta t \to 0^-$, ossia quando $t + \Delta t$ tende a 3 da sinistra, esso tende ancora a -100 .

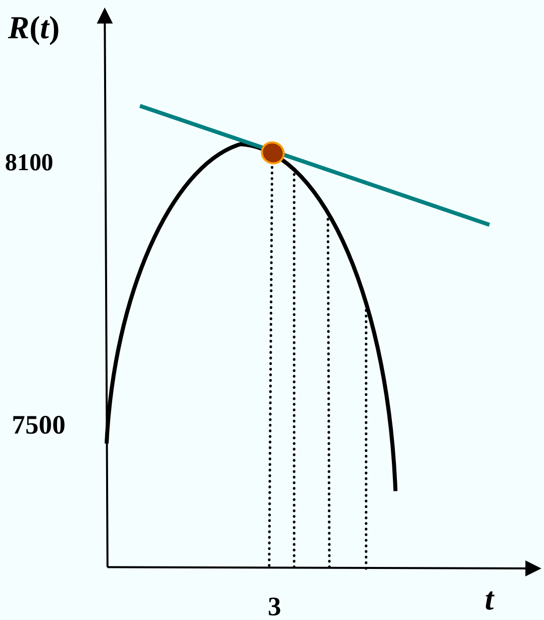
Δt	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\frac{\Delta R}{\Delta t}$	0	-90	-99	-99.9	-99.99	-99.999

Essendo $\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{\Delta R}{\Delta t} = -100$, possiamo affermare che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = -100$$







È importante osservare che dal punto di vista geometrico il numero -100 è la pendenza della retta tangente al grafico di $R(t)$ nel punto $P(3;\ 8100)$.

Il numero $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta t}$ prende il nome di *tasso di variazione istantaneo*.

Tasso di variazione istantaneo $= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Prima della fondamentale prossima definizione, ricordiamo che le seguenti scritture sono tutte equivalenti: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (con $h = x - x_0$)

DEFINIZIONE. Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 \in [a,b]$ se esiste, finito, il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

In modo equivalente, la derivata può essere definita da un punto di vista geometrico.

DEFINIZIONE. Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, si dice **derivabile in x_0** $\in [a,b]$ se nel punto $(x_0, f(x_0))$ del suo grafico esiste la retta tangente e questa ha pendenza $m \in \mathbb{R}$. Il numero m si dice **derivata** di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Una funzione **non** è derivabile in x_0 se il grafico della funzione in x_0

- non ha tangente (fig. 1, *punto angoloso*);
- ha tangente una retta di equazione $x = k$ (fig. 2, *cuspide*)

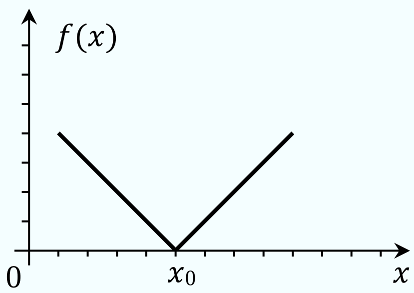


fig. 1

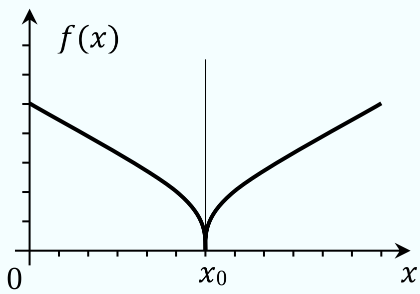


fig. 2

In questi due casi il limite del rapporto incrementale non esiste (*punto angoloso*) oppure è $\pm\infty$ (*punto cuspide*).

Se esiste finito il limite destro (rispettivamente sinistro), si dice che la funzione è **derivabile a destra** (rispettivamente sinistra) e si parla di **derivata destra** (rispettivamente sinistra):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

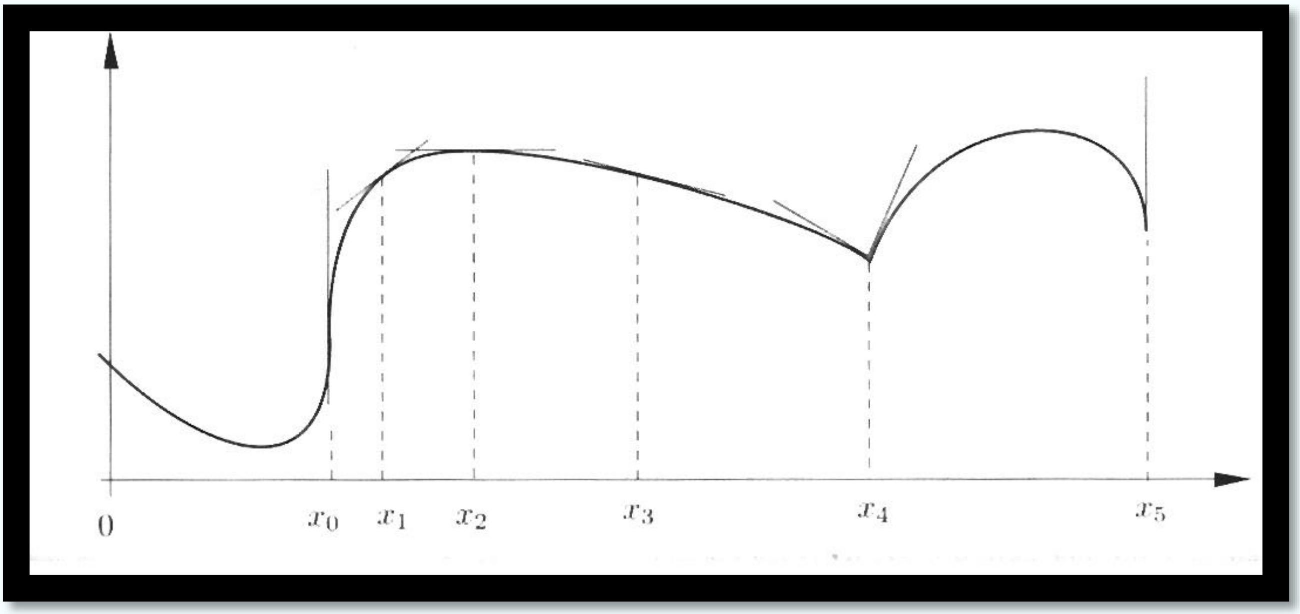
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

Ovviamente, una funzione è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se e solo se esistono finiti i limiti destro e sinistro e questi sono uguali:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

La derivata destra e la derivata sinistra rappresentano evidentemente la pendenza della retta tangente a destra e a sinistra nel punto P=(x_0, $f(x_0)$).

Analizziamo il seguente grafico



- In $x = 0$, la funzione è derivabile a destra e $f'_+(0) < 0$
- In x_0 la funzione non è derivabile perché $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$.
- Risulta $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) < 0$ perché le tangenti hanno, rispettivamente, pendenza positiva, nulla, negativa.
- In x_4 la funzione non è derivabile perché $f'_-(x_4) < 0$, $f'_+(x_4) > 0$.
- In x_5 la funzione non è derivabile, perché $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_5+h)-f(x_5)}{h} = -\infty$.

DEFINIZIONE. Una funzione f si dice **derivabile nell'intervallo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (può essere tutto $\mathbb{R}$) se è derivabile in ogni punto dell'intervallo. La derivata (o derivata prima) si indica con:

$$f'(x_0) \quad , \quad Df(x_0) \quad , \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdots$$

Riassumendo

La derivata di una funzione f in un punto x

1. è il **limite del rapporto incrementale** di f quando l'incremento h tende a zero ;
2. rappresenta il **tasso di variazione istantaneo** di f nel punto x ;
3. esprime la **pendenza della retta tangente** al grafico di f nel punto x .

Applicazione (Meteorologia). *In una mattina d'autunno la temperatura dell'aria dopo le ore 7.00 è indicata dalla seguente funzione (f = gradi centigradi, x = tempo in ore)*

$$f(x) = 10 + 2x^2$$

Qual è il tasso di variazione istantaneo (derivata) alle ore 9.00?

Occorre calcolare la derivata della funzione nel punto $x_0 = 2$ (dalle 7 alle 9 sono 2 ore)

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10 + 2(2+\Delta x)^2 - 18}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10 + 8 + 2(\Delta x)^2 + 8\Delta x - 18}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2\Delta x + 8) = 8$$

Applicazione (Ricavi). *Le vendite complessive di latte d'avena di un'azienda sono, a tutt'oggi, pari a 1.5 ettolitri, e aumentano a un ritmo di 2 ettolitri al mese.*

Se oggi è il 31 dicembre, quanti ettolitri di latte d'avena avrà complessivamente venduto fra un anno?

Qual è il tasso medio di incremento delle vendite totali tra il 31 marzo e il 31 luglio?

Soluzione

t= tempo espresso in mesi (t=0 è il 31 dicembre)

$f(t)$ = ettolitri di latte d'avena venduto fino all'epoca $t \geq 0$.

Fra t mesi le vendite complessive saranno $f(t) = 1.5 + 2t$ e quindi fra un anno (12 mesi) saranno $f(12) = 25.5$. Pertanto, il tasso medio di incremento delle vendite totali tra il 31 marzo ($t = 3$) e il 31 luglio ($t = 7$), è

$$\frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{15.5 - 7.5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Il tasso medio di incremento delle vendite totali nel periodo tra il 31 marzo e il 31 luglio è di 2 ettolitri al mese (cioè ogni mese si vendono due ettolitri di latte d'avena). Il tasso istantaneo e il tasso medio coincidono perché la funzione è affine (cioè, del tipo $y = mx + q$).

DERIVATA delle FUNZIONI ELEMENTARI

- Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, una funzione costante. Allora $f'(x) = 0$, infatti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

- Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$, infatti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2hx}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 2x) = 2x$$

- Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$. Allora $f'(x) = m$, infatti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m.$$

Si dimostra che le funzioni elementari ammettono la derivata in ogni punto del loro campo di esistenza, fa eccezione la funzione valore assoluto e la funzione radice quadrata, che non sono derivabili in $x = 0$.

Tabella delle derivate delle funzioni elementari	
funzione $f(x)$	derivata $f'(x)$
$f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{Q}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x} \qquad x \in \mathbb{R}_0^+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a^x \qquad a > 0$	$f'(x) = a^x \; ln \; a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x \qquad x \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Esempi.

1. $f(x) = 9$ ha come derivata $f'(x) = 0$

2. $f(x) = x^3$ ha come derivata $f'(x) = 3x^2$

3. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ha come derivata $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

4. $f(x) = x^{-5}$ ha come derivata $f'(x) = -5x^{-6}$

5. $f(x) = 7^x$ ha come derivata $f'(x) = 7^x ln\, 7$

6. $f(x) = log_3 x$ ha come derivata $f'(x) = \frac{1}{x} log_3 e = \frac{1}{x\, ln3}$

REGOLE di CALCOLO delle DERIVATE

Regola 1 - Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la loro somma, il loro prodotto e il loro quoziente (purché il denominatore sia diverso da zero). Valgono le seguenti regole di calcolo:

1. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

2. $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

3. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x)\neq 0$.

5. $(cf)'(x)=cf'(x),\qquad c\in\mathbb{R}$

Esempi.

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\sqrt{x}$ ha come derivata $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x)=x^2-7x+8$ ha come derivata $f'(x)=2x-7$

3) $f(x)=x^2 ln\, x$ ha come derivata $f'(x)=2x ln\, x+x^2\cdot\frac{1}{x}$

4) $f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x^2}$ ha come derivata $f'(x)=\frac{(3x^2+2)x^2-(x^3+2x+1)2x}{(x^2)^2}$

5) $f(x)=7x^3$ ha come derivata $f'(x)=7\cdot 3x^2$

Regola 2 - DERIVATA della FUNZIONE COMPOSTA

Se g è una funzione derivabile in x e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x e si ha :

Regola di derivazione a catena

$$(f \circ g)'(x) \quad = \quad f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

In particolare, risulta :

$$D \; ln\, g(x) = \frac{g\,'(x)}{g(x)}$$

$$D \;\; g(x)^n = ng(x)^{n-1} \cdot g\,'(x)$$

Nel caso di tre funzioni componenti, f, g, r e tali che la funzione $f \circ g \circ r$ sia derivabile nel suo dominio, si ha:

Regola di derivazione a catena

$$(f \circ g \circ r)'(x) = f'\left(g\big(r(x)\big)\right) \cdot g'\big(r(x)\big) \cdot r'(x)$$

Esempi.

1) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ ha come derivata $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$.

2) $h(x) = ln(\,2x^3 + x)$ ha come derivata $h'(x) = \frac{6x^2+1}{2x^3+x}$

3) $h(x) = (3x^2 + 2x - 5)^3$ ha come derivata $h'(x) = 3\;(3x^2 + 2x - 5)^2(6x + 2)$

4) $h(x) = \ln x^2$ ha come derivata $h'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x$

5) $h(x) = \ln^2 x$ ha come derivata $h'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

Esempio. $h(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 3x)}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 + 3x)}} \cdot \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)$$

Esempio. $t(x) = \ln \sqrt{x^{-3}}$

$$t'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^{-3}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^{-3}}} \cdot (-3x^{-4}) = -\frac{3x^{-4}}{2x^{-3}} = -\frac{3}{2x}$$

Regola 3 - Se f e g sono funzioni derivabili in x e $f(x)$ è una funzione positiva, si ha :

$$D f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

questa uguaglianza è ottenuta ricordando che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$. In particolare, si ha

$$D\ a^{g(x)} = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$D\ e^{g(x)} = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Esempi.

1. $h(x) = x^x$ ha come derivata $h'(x) = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$

2. $h(x) = e^{x^2+3x}$ ha come derivata $h'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x + 3)$

3. $h(x) = 10^{2x+1}$ ha come derivata $h'(x) = 10^{2x+1} \cdot 2 \cdot \ln 10$

Come abbiamo visto, per determinare la derivabilità di una funzione in un punto x_0 è necessario calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Esiste un teorema che consente di verificare se una funzione è derivabile in x_0 senza calcolare il suddetto limite.

Teorema del limite della derivata
Sia $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e sia $\boldsymbol{f(x)}$ continua in $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e derivabile in $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_0}) \cup (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{b})$. Se

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f'(x)}$$

esiste ed è finito, allora $\boldsymbol{f(x)}$ è derivabile in $\boldsymbol{x_0}$ e risulta $\boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f'(x)}$.

Questo teorema è particolarmente utile quando il limite del rapporto incrementale è ostico o quando la funzione è definita a tratti, e può essere utilizzato anche per dimostrare che una funzione non è derivabile in x_0.

REGOLA PRATICA
Data una funzione continua in un intervallo, se sussistono problemi relativi alla derivabilità in un solo punto $\boldsymbol{x_0}$, si calcolano le derivate per $\boldsymbol{x > x_0}$ e per $\boldsymbol{x < x_0}$; si calcolano poi i limiti di queste derivate (rispettivamente destro e sinistro). Se i limiti esistono finiti ed uguali la funzione è derivabile; se essi sono finiti e diversi la funzione non è derivabile ed ha un punto angoloso; se essi non esistono non è detto che la funzione non sia derivabile: è necessario utilizzare la definizione di derivata e calcolare il limite del rapporto incrementale per verificare la derivabilità o meno.

ESEMPIO.
Si verifichi se la funzione $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 2 & \text{se } x \le 1 \\ -(x-1)^3 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
è derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione.
Applicando la definizione, calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^3+2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)^3+2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -(x-1)^2 = 0$$

Essendo $f'_-(1) = f'_+(1)$, la funzione è derivabile in $x = 1$ e risulta $f'(1) = 0$.

Alternativamente, sfruttiamo il Teorema del limite della derivata. Infatti, la funzione è continua su $(-\infty, +\infty)$, essendo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

e $f(1) = 2 = \lim_{x\to 1} f(x)$. Inoltre, la funzione è derivabile nell'insieme $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ trattandosi, per entrambi gli intervalli, di funzione polinomiale. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema del limite della derivata. Calcoliamo la derivata di $f(x)$ su $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$:

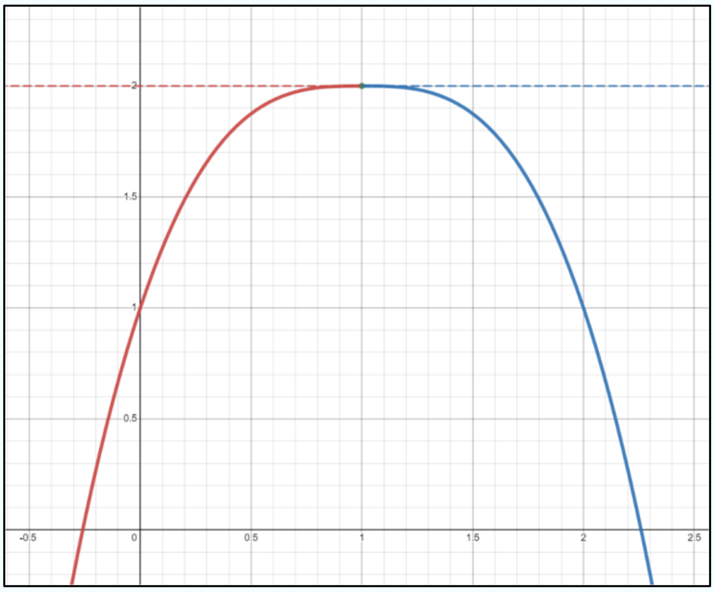
$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -3(x-1)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 3(x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -3(x-1)^2 = 0$$

Essendo $\lim_{x\to 1^-} f'_-(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f'_+(x)$, la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e risulta $f'(1) = 0$.



ESEMPIO.

Si verifichi se la funzione $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + 16 & \text{se } x \leq 2 \\ 4x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

è derivabile in $x = 2$.

<u>Soluzione</u>.

Applicando la definizione, calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^3+16-16}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^3}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x-2)^2=0=f'_-(2)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x^2-16}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}4(x+2)=16=f'_+(2)$$

Essendo $f'_-(2)\neq f'_+(2)$, la funzione non è derivabile in $x=2$.

Alternativamente, sfruttiamo il Teorema del limite della derivata. Infatti, la funzione è continua su $(-\infty,+\infty)$, essendo

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=16=\lim_{x\to 2^+}f(x)$$

e $f(2)=16=\lim_{x\to 2}f(x)$. Inoltre, la funzione è derivabile nell'insieme $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ trattandosi, per entrambi gli intervalli, di funzioni polinomiali. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema del limite della derivata. Calcoliamo la derivata di $f(x)$ su $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$:

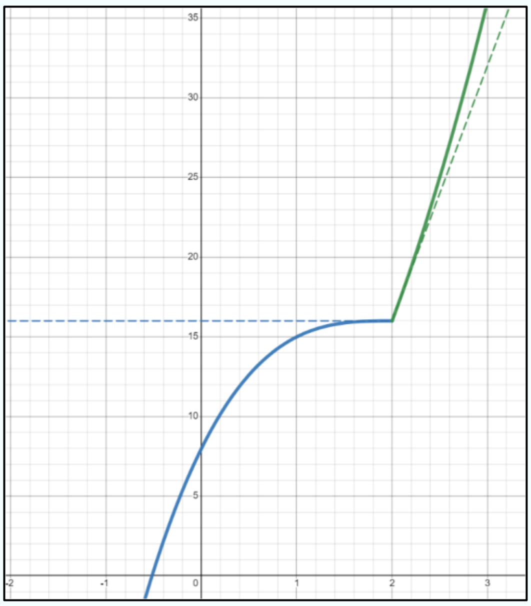
$$f'(x)=\begin{cases}3(x-2)^2 & \text{se } x\leq 2\\ 8x & \text{se } x>2\end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 2^-}f'(x)=\lim_{x\to 2^-}3(x-2)^2=0$$

$$\lim_{x\to 2^+}f'(x)=\lim_{x\to 2^+}8x=16$$

Essendo $\lim_{x\to 2^-}f'(x)=0\neq 16=\lim_{x\to 2^+}f'(x)$, la funzione non è derivabile in $x=2$.



ESEMPIO.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ ax - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Determinare, se possibile, a in modo che la funzione sia continua e derivabile ovunque.

<u>Soluzione</u>.
La funzione è continua e derivabile in $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; è inoltre continua in $x = 2$ se

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 = \lim_{x \to 2^+} (ax - 4) = 2a - 4$$

cioè, se $a = 4$. Quindi, la funzione può essere derivabile solo se $a = 4$, cioè

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 4x - 4 & x > 2 \end{cases}$$

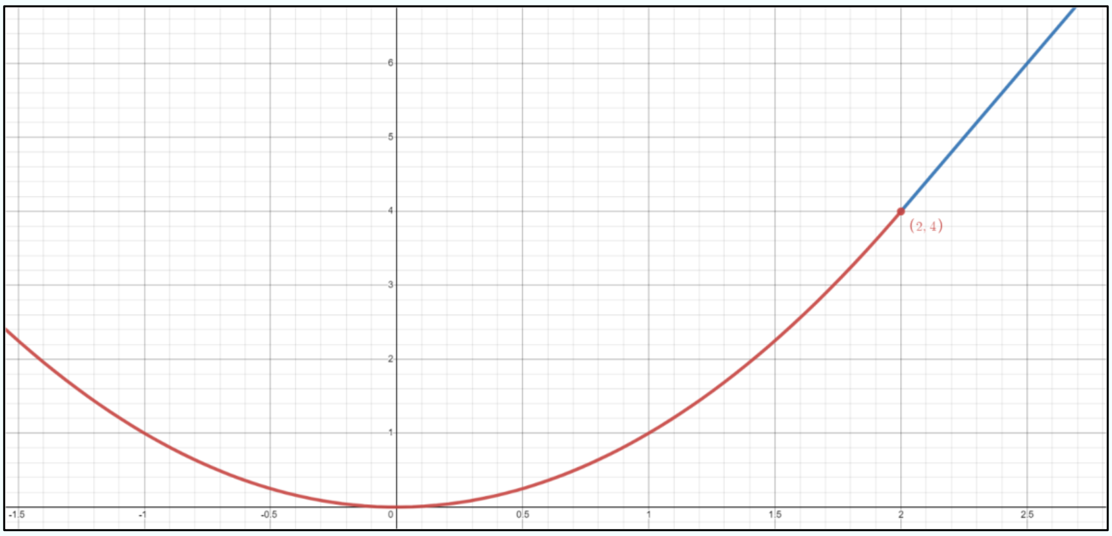
Calcoliamo la derivata di questa funzione per $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 4 = \lim_{x \to 2^+} 4,$$

la funzione è derivabile in $x = 2$ e la derivata è $f'(2) = 4$.



TEOREMI di de L'Hôpital

Per calcolare limiti che si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, possono essere utili i teoremi di de L'Hôpital (1661 - 1704). Occorre però precisare che questi teoremi non sempre sono di aiuto perché, anche se applicabili, può accadere che il limite del rapporto delle derivate sia più difficile del limite dato.

TEOREMA. *Siano f(x) e g(x) due funzioni derivabili in un intorno di x_0, dove x_0 è un numero reale oppure $\pm\infty$, e siano tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ per x "vicino" ad x_0. Se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TEOREMA. *Siano f(x) e g(x) due funzioni derivabili in un intorno di x_0, dove x_0 è un numero reale oppure $\pm\infty$, e siano tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ per x "vicino" ad x_0. Se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esercizio 1. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

Siamo nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, le funzioni sono derivabili e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital. Otteniamo $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$ quindi anche il limite della funzione data esiste e si ha $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Esercizio 2. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x-1}$.

Siamo nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, le funzioni sono derivabili e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital. Otteniamo $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{ax^{a-1}}{1} = a$ quindi anche il limite della funzione data esiste e si ha $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x-1} = a$.

Esercizio 3. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Siamo nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, le funzioni sono derivabili e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi possiamo applicare il teorema di L'Hôpital. Otteniamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ quindi anche il limite della funzione data esiste e si ha $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

DERIVABILITÀ e CONTINUITÀ

TEOREMA. *Se una funzione è derivabile nel punto x_0, allora in questo punto la funzione è continua.*

Dimostrazione - Per $x \neq x_0$ risulta $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$ e pertanto

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0) \qquad \blacksquare$$

ATTENZIONE - Il viceversa del teorema **non** vale, ossia se una funzione è continua nel punto x_0 **non è detto** che in x_0 sia anche derivabile (esempio nei punti angolosi e cuspidi).

EQUAZIONE della RETTA TANGENTE in $P(x_0; f(x_0))$

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto A e sia $P(x_0; f(x_0))$ un punto del suo grafico. Ricordando che l'equazione della generica retta per P con pendenza $m \in \mathbb{R}$ è $y - y_0 = m(x - x_0)$ e che $m = f\,'(x_0)$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P(x_0; f(x_0))$ è

$$\boldsymbol{y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)}$$

Esercizio 1. *Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione* $y = 3x^2 - 2x + 7$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 2$.

Soluzione La curva è il grafico della funzione $3x^2 - 2x + 7$, e quindi l'equazione della retta tangente in $P(2; f(2))$ è $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Poiché $f'(x) = 6x - 2$ risulta $f'(2) = 10$ ed essendo $f(2) = 15$, la retta tangente cercata ha equazione:

$$y = 15 + 10(x-2) = -5 + 10x.$$

Esercizio 2. *Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione* $y = e^{3x+1}$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 2$.

Soluzione La curva è il grafico della funzione $f(x) = e^{3x+1}$, e quindi l'equazione della retta tangente in $P(2; f(2))$ è $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Poiché $f'(x) = 3e^{3x+1}$ risulta $f'(2) = 3e^7$ ed essendo $f(2) = e^7$, la retta tangente cercata ha equazione:

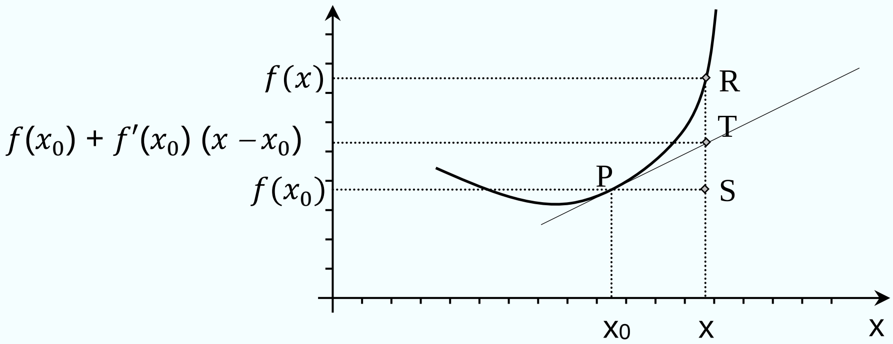
$$y = 3e^7x - 5e^7.$$

Esercizio 3. *Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione* $y = 2x + \ln x$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 1$.

Soluzione. La curva è il grafico della funzione $f(x) = 2x + \ln x$, e quindi l'equazione della retta tangente in $P(1; f(1))$ è $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Poiché $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ risulta $f'(1) = 3$ ed essendo $f(1) = 2$, la retta tangente cercata ha equazione:

$$y = 3x - 1.$$

La retta tangente gioca un ruolo importante nello studio della funzione che descrive un determinato fenomeno. L'idea è quella di "sostituire" una funzione data, con l'equazione della sua retta tangente in un punto di ascissa x_0, con x_0 vicino al punto x in cui si vuole calcolare la funzione. Nella figura sotto riportata il segmento RT rappresenta l'errore che si commette quando nel passare da x_0 a $x = x_0 + h$ anziché la funzione si considera la tangente in x_0. L'errore è tanto più piccolo quanto più x è vicino all'ascissa x_0 del punto di tangenza.



La quantità $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta una approssimazione di $f(x)$ tanto migliore quanto più x è vicino ad x_0 ; scriveremo

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad \text{per } h \to 0 \qquad (h = x - x_0)$$

Segue che la differenza tra primo e secondo membro tende a zero quando tende a zero l'incremento dato a x_0.
Cioè, *la retta tangente rappresenta una "buona" approssimazione della funzione nel punto x se il punto x è sufficientemente vicino a x_0.*

Il termine $f'(x_0) \cdot h$ si chiama **differenziale** (primo) della funzione in x_0 relativo all'incremento h . Il differenziale rappresenta l'incremento della y quando nel passare da x_0 a $x = x_0 + h$ anziché la funzione si considera la tangente in x_0 , in figura è rappresentato dal segmento TS. Il differenziale di una funzione $f(x)$ si indica con

$$d\,f(x) = f'(x)\,h \qquad \text{oppure} \qquad d\,f(x) = f'(x)\,dx \; .$$

In molte situazioni economiche h=1 è sufficiente per garantire una soddisfacente approssimazione. In tal caso,

$$f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot 1 = f(x_0) + f'(x_0)$$

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$$

cioè la derivata indica **approssimativamente** l'incremento della variabile dipendente quando ad x si aggiunge una unità.
Ad esempio, il costo marginale approssima l'incremento del costo relativo all'incremento di un'unità di produzione.

ESERCIZI

1. *Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione*

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

b) $f(x) = x \ln x$

c) $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{2x-3}$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$

e) $f(x) = \ln \ (x^2 - \sqrt{x})$

f) $f(x) = e^{2x}$

g) $f(x) = \frac{1}{\ln \ x}$

h) $f(x) = (2x^2 + 7)^3$

i) $f(x) = 3^{\ln \ x}$

l) $f(x) = (2x+1)^{x^3}$

m) $f(x) = x(\ln x \ - 1)$

n) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. *Siano f(x) e g(x) due funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *aventi le derivate prime uguali. Questo fatto è sufficiente per affermare che f(x) è uguale a g(x)?*

3. *Si consideri la funzione* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ *; si determini per quali valori di* x *essa non è derivabile.*

4. *Trovare l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione* $f(x) = x^3 - 2x$ *nel punto di ascissa* $x = 2$.

Soluzione. $f'(x) = 3x^2 - 2$, da cui $f'(2) = 12 - 2 = 10$. Essendo $f(2) = 4$, si ha l'espressione della retta tangente: $y = f(2) + f'(2)(x-2) = 4 + 10\,(x-2) = -16 + 10x$.

5. *Trovare i punti in cui la tangente alla curva di equazione* $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ *ha pendenza* -2 .

Soluzione La pendenza della retta tangente è la derivata della funzione, quindi deve essere $f'(x) = -2$. Si ha, quindi $f'(x) = \dfrac{x-(x+2)}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2} = -2$ se e solo se $x^2 = 1$, cioè $x = 1$ *oppure* $x = -1$

6. *Trovare i punti in cui la tangente alla curva di equazione* $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ *è perpendicolare alla retta di equazione* $x - 2y + 4 = 0$.

Soluzione I punti richiesti sono quelli in cui la tangente ha pendenza -2 e pertanto sono i punti di ascissa x tali che $f'(x) = -2$ da cui $\frac{-2}{(x-2)^2} = -2$ e pertanto sono i punti con $x = 3$ e $x = 1$.

7. *Trovare l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione* $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ *nel punto di ascissa* $x = 3$.

Soluzione $f'(x) = \frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ quindi $f'(3) = \frac{-3^2-1}{(3^2-1)^2} = \frac{-10}{64} = -0.15625$, da cui $y = f(3) + f'(3)(x-3) = \frac{3}{8} - 0.15625(x-3) = 0.84375 - 0.15625x$

8. *Determinare il differenziale primo di* $f(x) = \ln(x^2 - x)$ *in* $x_0 = 3$ *per* $h = 0.5$.

Soluzione $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$ quindi $df = f'(3) \cdot 0.5 = \frac{5}{6} \cdot 0.5 = \frac{5}{12}$

9. Considerando che $f(1) = 8$ e $f'(x) = 4\sqrt{x}$, si determini il valore approssimato di $f(1.3)$.

Soluzione $f(1.3) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0.3 = 8 + 4 \cdot 0.3 = 9.2$

Applicazione (Costo di produzione)

Un'azienda produce 200 kg di merce. Il costo di produzione relativo è 3500 euro. Una variazione della produzione comporterebbe una variazione del costo totale, e si stima che il tasso di variazione sia di 23 euro per kg. Qual è, approssimativamente, il costo di produzione se vengono prodotti 600 grammi in più?

Soluzione

$$C(x_0+h) \approx C(x_0) + C'(x_0)h$$

$x_0 = 200,$ $\quad C(200) = 3500,$ $\quad C'(200) = 23,$ $\quad h = 0.6$

$$C(200+0.6) \approx 3500 + \underbrace{23 \cdot 0.6}_{\text{differenziale}} = 3513.8$$

Applicazione (Mercati finanziari)

Il prezzo di un titolo azionario sta diminuendo ad un tasso di 0.1 euro al minuto. Il prezzo, in questo momento, è di 25 euro. Possedete 1550 azioni di questo titolo. Quale è il valore del vostro portafoglio di azioni ora? Quale sarà approssimativamente il suo valore fra 45 secondi?

Valore del portafoglio ora = $25 \cdot 1550 = 38\,750$

$$P(t_0+h) \approx P(t_0) + P'(t_0)h$$

$t_0 = 0,$ $\quad P(0) = 25,$ $\quad P'(0) = -0.1,$ $\quad h = 0.75$

$$P(0+0.75) \approx 25 - \underbrace{0.1 \cdot 0.75}_{\text{differenziale}} = 24.925$$

Valore del portafoglio = $24.925 \cdot 1550 = 38\,633.75$

In 45 secondi perderete approssimativamente $38750 - 38633.75 = 116.25$ euro.

Applicazione (Prezzo, quantità, ricavo)

La vostra azienda vende malto di nocciola biologico in vasi di vetro. Attualmente l'azienda vende 50 vasi al giorno e le vendite aumentano ad un tasso di 4 vasi al giorno. Inoltre, oggi vendete i vasetti a 5 euro cadauno, ma l'azienda sta aumentando il prezzo di 2 euro al giorno. Sapete stimare il tasso di variazione del ricavo giornaliero $R'(t)$?

Soluzione

I fattori che determinano il tasso di variazione del ricavo giornaliero sono due: l'aumento delle unità vendute e l'aumento del prezzo unitario. Abbiamo

$R'(t)$ dovuto all'aumento di prezzo: 2 euro × 50 vasi= 100 euro al giorno
$R'(t)$ dovuto all'aumento delle vendite: 5 euro per vaso × 4 vasi al giorno= 20 euro al giorno

Quindi, stimiamo che il ricavo giornaliero cresca al ritmo di $100 + 20 = 120$ euro al giorno.

Si noti che esistono due effetti che agiscono sul tasso di variazione: l'aumento della quantità $p(t)q'(t)$ e l'aumento di prezzo: $q(t)p'(t)$:

$$R'(t) = p(t)q'(t) + q(t)p'(t) = 5 \cdot 4 + 50 \cdot 2 = 120$$

<u>La derivata di un prodotto di due funzioni $p(t)$ e $q(t)$ è la derivata del primo fattore per il secondo, più il primo fattore per la derivata del secondo. Perché?</u>

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p(t+h)q(t+h) - p(t)q(t)}{h}$$

Essendo p e q derivabili per assunzione, esse sono anche continue. Quindi, $\lim_{h \to 0} p(t+h) = p(t)$ e $\lim_{h \to 0} q(t+h) = q(t)$. Pertanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t+h)q(t+h) - p(t)q(t)}{h} = \frac{0}{0}$$

forma indeterminata

Come possiamo calcolare dunque il limite del rapporto incrementale?
Manipoliamo algebricamente:

$$R(t+h) - R(t) = \overbrace{p(t) \cdot [q(t+h) - q(t)]}^{\text{effetto quantità}} + \overbrace{q(t) \cdot [p(t+h) - p(t)]}^{\text{effetto prezzo}} + \overbrace{[q(t+h) - q(t)][p(t+h) - p(t)]}^{\text{interazione prezzo−quantità}}$$

da cui

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} = p(t)\frac{[q(t+h) - q(t)]}{h} + q(t)\frac{[p(t+h) - p(t)]}{h} + \frac{[q(t+h) - q(t)][p(t+h) - p(t)]}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[p(t)\frac{q(t+h) - q(t)}{h} + q(t)\frac{p(t+h) - p(t)}{h} + [p(t+h) - p(t)]\frac{q(t+h) - q(t)}{h} \right]$$

$$R'(t) = p(t)q'(t) + q(t)p'(t) + 0 \cdot q'(t) = p(t)q'(t) + q(t)p'(t)$$

Applicazione (Prezzo, quantità, ricavo)

I ricavi della vostra azienda che produce impianti di riscaldamento stanno crescendo ad un tasso di 4 mila euro al mese. Ciò è dovuto all'aumento di 0.5 euro al mese del prezzo dell'impianto praticato dall'azienda e all'aumento delle vendite di 6 unità al mese. Se il prezzo praticato questo mese è di 500 euro per impianto, qual è la quantità venduta in questo mese?

<u>Soluzione</u>

$R'(0) = 4000, p(0) = 500, p'(0) = 0.5, q'(0) = 6$.

Il ricavo è dato da $R(t) = p(t)q(t)$, la derivata del ricavo è $R'(t) = p'(t)q(t) + p(t)q'(t)$, che, nel punto $t = 0$, è uguale $R'(0) = p'(0)q(0) + p(0)q'(0)$.

Sostituendo, $4000 = 0.5\, q(0) + 500 \cdot 6 \Longrightarrow q(0) = \frac{4000-3000}{0.5} = 2000$

Applicazione (Demografia)

La percentuale $P(t)$ delle persone che raggiungevano l'età di t anni nell'antica Roma può essere approssimata con la funzione

$$P(t) = 92e^{-0{,}0277t}$$

Si calcolino $P(0)$, $P(22)$ e $P'(22)$ interpretandone i risultati.

<u>Soluzione</u>

$P(0) = 92$ è il tasso di sopravvivenza per i neonati mentre l'8% è il tasso di mortalità.

$P(22) = 92e^{-0{,}0277\cdot 22} = 50.2\%$ e $P'(22) = 92e^{-0{,}0277\cdot 22}(-0.0277) = -1.385\%$

Le persone ancora vive all'età di 22 anni sono il 50.2%. Tale percentuale diminuisce ad un tasso di circa l'1.4% all'anno.

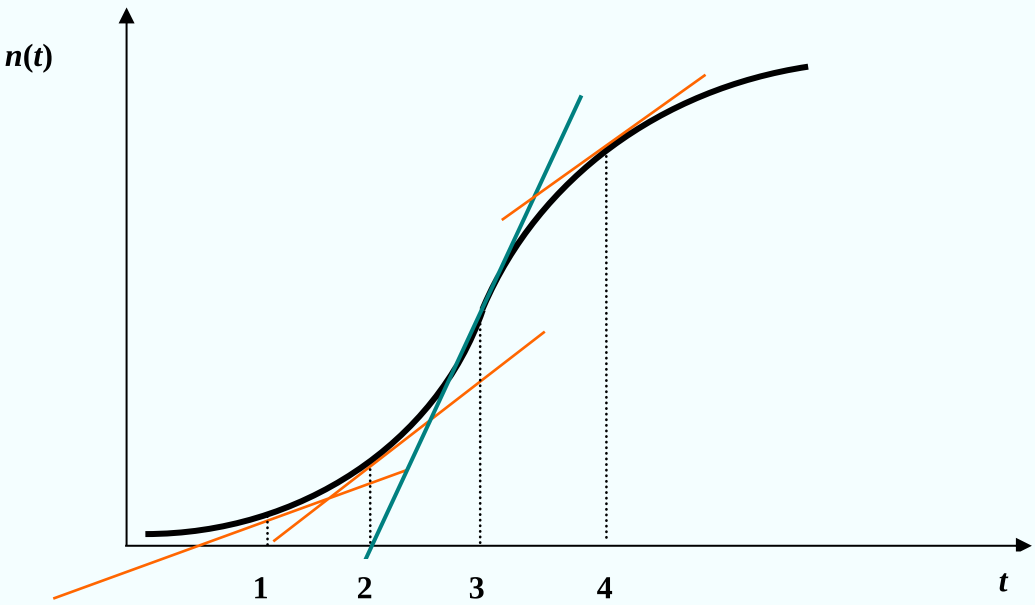
Applicazione (Epidemiologia)

Si consideri il grafico seguente. Esso mostra il numero totale $n(t)$ (in milioni) delle persone contagiate da un'epidemia in funzione del tempo.

a) *Quando si è verificato il più alto tasso di contagi?*
b) *Quando il Ministero della Sanità ha potuto annunciare che il tasso dei nuovi contagi stava iniziando a diminuire?*

<u>Soluzione</u>

Il tasso dei contagi è dato da $n'(t)$, quindi il massimo tasso dei contagi si ha quando il valore della derivata è massimo, cioè quando la pendenza della retta tangente è massima.



Il più alto tasso di contagi si è verificato tre anni dopo l'inizio della epidemia. L'annuncio della diminuzione del tasso dei contagi è avvenuto nello stesso momento, perché la pendenza della retta tangente ha cominciato a diminuire.

Applicazione (Finanza)
Il prezzo delle azioni XYZ è salito da 22 euro per azione nel gennaio del 2017 a 35 euro nel gennaio del 2022. Se aveste acquistato 100 azioni XYZ nel gennaio del 2017 e successivamente altre 10 azioni ogni anno, a che ritmo sarebbe aumentato il valore del vostro portafoglio a gennaio 2022? Si assuma che il prezzo sia cresciuto linearmente nel tempo.

Soluzione

t=0=gennaio 2017 $P(0)$=22
t=5=gennaio 2022 $P(5)$=35

Il prezzo cresce linearmente

$$(t_1, P_1) = (0, 22) \quad (t_2, P_2) = (5, 35) \qquad \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \frac{P - P_1}{t - t_1}$$

$$\frac{35-22}{5-0} = \frac{P-22}{t-0} \Rightarrow \frac{13}{5}t = P - 22 \Rightarrow P = 22 + \frac{13}{5}t = 22 + 2.6t$$

Il numero di azioni all'epoca t è dato da $n(t) = 100 + 10t$. Pertanto,

$$\begin{aligned} V(t) &= P(t)n(t) = [22 + 2.6t][100 + 10t] \\ &= 2200 + 220t + 260t + 26t^2 \\ &= 26t^2 + 480t + 2200 \end{aligned}$$

$$V'(5) = ?$$
$$V'(t) = 26 \cdot 2t + 480 = 52t + 480$$
$$V'(5) = 52 \cdot 5 + 480 = 740$$

A gennaio 2022 il valore del portafoglio sarebbe stato in aumento ad una velocità di 740 euro all'anno.

E quale sarebbe stato tale tasso un anno prima?
$V'(4) = 52 \cdot 4 + 480 = 688$ euro all'anno

Applicazione (Fisica/geometria)
Una Toyota si trova 50 km a ovest di Modena e prosegue verso ovest alla velocità di 70 km/h. Una Skoda si trova 40 km a nord di Modena e prosegue verso nord allontanandosi alla velocità di 60 km/h. A quale tasso cresce la distanza tra le due auto?

Soluzione

$S(t)$= distanza della Skoda da Modena in funzione del tempo

$Y(t)$=distanza della Toyota da Modena in funzione del tempo

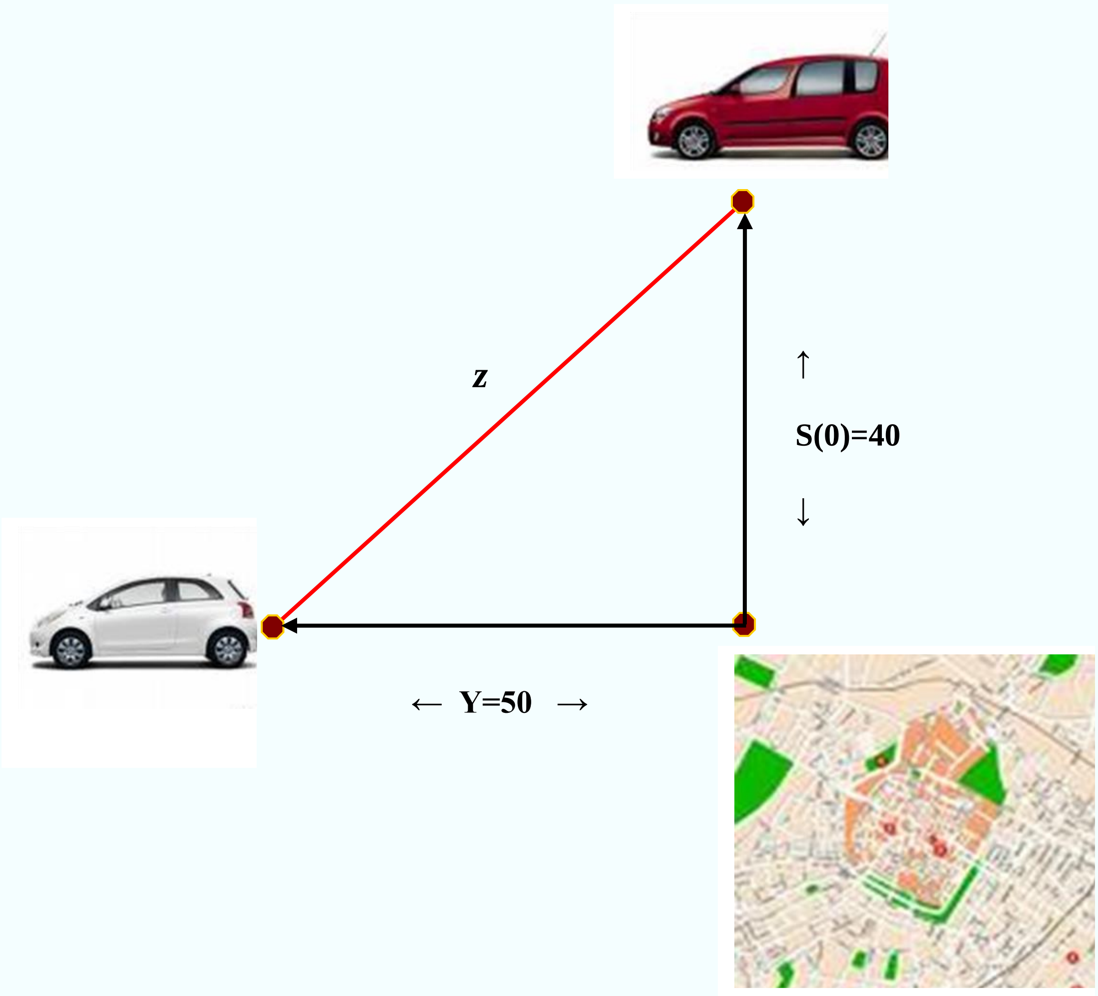
$z(t)$= distanza tra le due auto in funzione del tempo

$S(0)=40$ $S'(0)=60$ $Y(0)=50$ $Y'(0)=70$

Il testo richiede di calcolare $z'(0)$.

Si applica il Teorema di Pitagora: $z^2 = S^2 + Y^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{S^2 + Y^2}$ da cui

$$z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{S^2(t) + Y^2(t)}} \cdot [2S(t) \cdot S'(t) + 2Y(t) \cdot Y'(t)]$$
$$z'(0) = \frac{1}{2\sqrt{S^2(0) + Y^2(0)}} \cdot [2S(0) \cdot S'(0) + 2Y(0) \cdot Y'(0)]$$
$$z'(0) = \frac{1}{2\sqrt{40^2 + 50^2}} \cdot [2 \cdot 40 \cdot 60 + 2 \cdot 50 \cdot 70] = 29.2$$



Applicazione (Fattori produttivi)

La produzione di un bene industriale richiede l'uso di due fattori produttivi A e B. Se sono utilizzate x_1 *unità di A e* x_2 *unità di B la produzione totale è data dal modello*

$$q = 0.5x_1 + 2x_2$$

Assumendo una quantità da produrre pari a 100, *si calcoli e si interpreti* $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}$.

Soluzione

$$100 = 0.5x_1 + 2x_2 \;\; \Longrightarrow \;\; x_1 = \frac{100 - 2x_2}{0.5} = 200 - 4x_2$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} = -4$$

Per mantenere la produzione a 100, ad ogni incremento unitario di B deve corrispondere un decremento di 4 unità di A.

Applicazione (Finanza)
Si consideri un portafoglio di n azioni X e di m azioni Y. Il prezzo dell'azione X è 10 euro, il prezzo dell'azione Y è 20 euro. Si ricavi $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}m}$ *e si interpreti il risultato, sapendo che il valore del portafoglio è 1500 euro.*

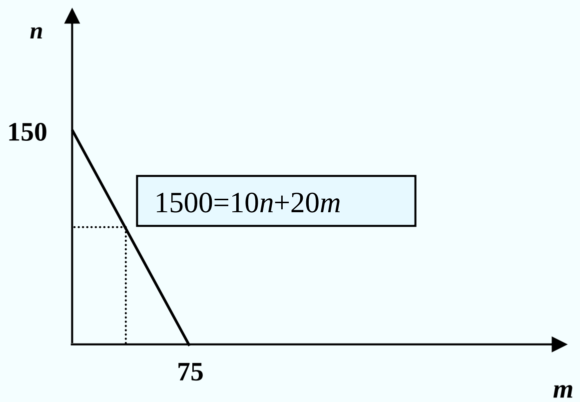
<u>Soluzione</u>

$$1500 = 10n + 20m \Rightarrow n = \frac{1500 - 20m}{10} = 150 - 2m$$

$$n(m) = 150 - 2m \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}m} = -2.$$

Se si vuole investire una somma di 1500 euro, la funzione $n(m)$ rappresenta le combinazioni di azioni X e Y possibili.

Per mantenere il valore del portafoglio a 1500 euro, ad ogni acquisto di azione Y deve corrispondere una vendita di 2 azioni X.



Il CALCOLO DIFFERENZIALE
nello studio di una funzione

L'uso delle derivate consente l'individuazione di **algoritmi** che permettono di risolvere problemi matematici. In particolare, gli algoritmi che verranno qui presentati sono molto utili quando si vuole studiare l'andamento di una funzione e tracciarne il grafico.

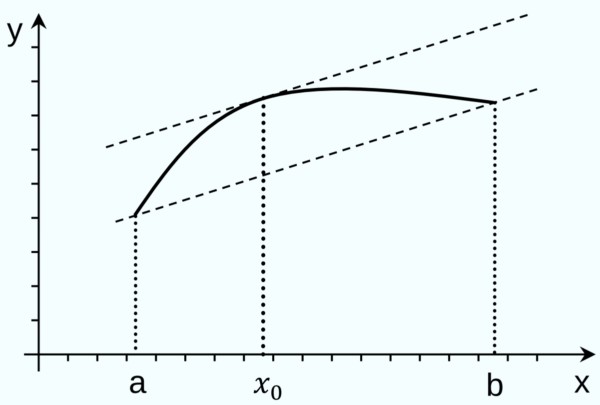
Funzioni crescenti e decrescenti

Per le sue importanti conseguenze riportiamo il seguente Teorema di Lagrange noto anche come **teorema del valor medio**:

TEOREMA DI LAGRANGE. *Sia f(x) una funzione continua in* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *e derivabile in* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *. Esiste almeno un punto* $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b})$ *per cui*

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Da un punto di vista geometrico, il Teorema di Lagrange afferma che, per una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla corda di estremi i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Si ricordi che il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 è $f'(x_0)$, mentre il coefficiente angolare della corda è $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Una importante conseguenza del Teorema di Lagrange è il seguente criterio di monotonia. Esso stabilisce il *legame fra il segno della derivata prima* di una funzione *e la crescenza o decrescenza della funzione*.

Criterio di monotonia

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a,b).

$f(x)$ è crescente in $(a,\ b)$ $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,\ b)$

$f(x)$ è strettamente crescente in $(a,\ b)$ $\Leftarrow$ $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,\ b)$

$f(x)$ è decrescente in $(a,\ b)$ $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,\ b)$

$f(x)$ è strettamente decrescente in $(a,\ b)$ $\Leftarrow$ $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,\ b)$

Dimostriamo, per esempio, che è crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, ossia: condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(x)$ sia crescente è che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,\ b)$.

Dimostrazione

(a) **condizione necessaria:** $(f$ è $crescente \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0)$

Se f è crescente, per ogni $x, x_0 \in (a,b)$ (sia nel caso $x < x_0$ che nel caso $x_0 < x$) si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

e quindi, per il Teorema della permanenza del segno, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ ossia $f'(x_0) \geq 0$.

(b) **condizione sufficiente**: $(f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f$ è $crescente)$

Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Comunque, presi $x_1 < x_2 \in (a,b)$, per il Teorema di Lagrange, applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ esiste almeno un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$

e poiché $x_2 - x_1 > 0$, si ha $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ da cui $f(x_1) \leq f(x_2)$ e pertanto la funzione è crescente.■

TEOREMA (funzione costante)

Sia f(x) *una funzione derivabile in* (a, b)

$$f(x) \text{ è costante in } (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

<u>Dimostrazione</u>

(a) ***Condizione necessaria:*** (f è *costante* $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$)

Sia $f(x) = k$. Allora, per ogni $x \in (a,b)$ si ha

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

(b) ***Condizione sufficiente*** *:* ($f'(x) = 0$ $\Rightarrow$ f è *costante*)

Per il criterio di monotonia,

- se $f'(x) \geq 0$ in (a, b), allora la funzione è crescente in (a, b), cioè per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
- se $f'(x) \leq 0$ in (a, b), allora la funzione è decrescente in (a, b), cioè per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Siccome, per ipotesi la funzione è tale che $f'(x) = 0$ in (a, b), allora la funzione è sia crescente sia decrescente, cioè vale sia $f(x_1) \leq f(x_2)$ sia $f(x_1) \geq f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$. Allora, deve essere necessariamente $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$, cioè la funzione è costante su (a, b).■

<u>NOTA</u> - Si presti attenzione al fatto che si parla di derivata nulla non in un punto ma in tutto un intervallo (a, b). Solo in tal caso la funzione è costante in tutto (a, b).

Una funzione strettamente monotona su un intervallo [a, b] e derivabile in (a, b), può anche avere derivata nulla in qualche punto di (a, b) ma non su tutto un intervallo contenuto in (a, b). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e ha derivata nulla in $x = 0$.

<u>Esempi</u>**.**

1. La funzione $f(x) = e^x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ perché la sua derivata $f'(x) = e^x$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. La funzione $f(x) = \ln x$ è strettamente crescente su tutto il dominio $\mathbb{R}^+$ perché la sua derivata $f'(x) = 1/x$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

3. La funzione $f(x) = x^2$ ha derivata $f'(x) = 2x$ che risulta positiva per ogni $x > 0$ e negativa per $x < 0$. La funzione è allora strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.

4. La funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ha derivata $f'(x) = 3x^2 - 3$ e risulta $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \leq -1$ e $x \geq 1$ e $f'(x) \leq 0$ per $-1 \leq x \leq 1$. La funzione considerata è pertanto crescente per $x \leq -1$ e $x \geq 1$ e decrescente per $-1 \leq x \leq 1$.

Esercizi.
Studiare la monotonia delle seguenti funzioni sul proprio campo di esistenza. Si utilizzi la derivata e si verifichi con la definizione di monotonia.

1. $f(x) = 3x - 2$

Soluzione. Dom $f = \mathbb{R}$ e risulta $f'(x) = 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione è strettamente crescente in tutto il suo campo di esistenza.

Dimostriamo ora utilizzando la definizione: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 < x_2$. Si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 < 3x_2 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

2. $f(x) = 3^{\ln x} + x$

Soluzione. Dom $f = \mathrm{R}^+$ e risulta $f'(x) = 3^{\ln x}(\ln 3)\frac{1}{x} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. Quindi la funzione è strettamente crescente in tutto il suo campo di esistenza.

Dimostriamo ora utilizzando la definizione: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $x_1 < x_2$.
Si ha $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ perché la funzione $g(x) = \ln x$ è una funzione strettamente crescente

$$\Rightarrow 3^{\ln x_1} < 3^{\ln x_2} \quad \Rightarrow \quad 3^{\ln x_1} + x_1 < 3^{\ln x_2} + x_1 < 3^{\ln x_2} + x_2 \Rightarrow 3^{\ln x_1} + x_1 < 3^{\ln x_2} + x_2$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Soluzione Dom $f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall\, x \in \ Dom\, f$.
Quindi la funzione è strettamente decrescente **in ognuno dei due intervalli** $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Dimostriamo ora utilizzando la definizione: siano $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, $x_1 < x_2 < 1$. Si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Analogamente per $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, $1 < x_1 < x_2$.

<u>Al contrario</u>, se $x_1 \in (-\infty, 1)$ e $x_2 \in (1, +\infty)$, si ha

$$x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Quindi <u>**non è corretto dire**</u> che la funzione è decrescente in tutto il dominio, ma <u>**si deve dire**</u> che è decrescente separatamente nei suoi intervalli di esistenza, cioè, separatamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$.

4. *Si studi la monotonia della seguente funzione* $\quad f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

<u>Soluzione</u> $\quad f'(x) = \dfrac{(x^2+1)-(x-2)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)-(2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

Si ha $f'(x) \ge 0$ se e solo se $-x^2+4x+1 \ge 0$. Le radici del polinomio sono

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{-2}, \quad x = 2-\sqrt{5}, \quad x = 2+\sqrt{5}$$

$$f'(x) \ge 0 \iff 2-\sqrt{5} \le x \le 2+\sqrt{5}.$$

Pertanto, la funzione è crescente in $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$ e decrescente separatamente nei due intervalli $\left(-\infty;\ 2-\sqrt{5}\right)$ e $\left(2+\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

5. *Si studi la monotonia della seguente funzione* $\quad f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

<u>Soluzione</u> Per l'esistenza deve essere $x^2 - 2x > 0$, pertanto Dom f $= (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x} \ge 0$ se e solo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno.

Pertanto, la funzione è crescente in $(2, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$.

6. *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la famiglia di funzioni* $f(x) = kx^2 - 3x + 1$ *è strettamente decrescente nel punto di ascissa* x=3.

<u>Soluzione</u>. $\quad f'(x) = 2kx - 3 \quad , \quad f'(3) = 6k - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) < 0 \quad per \quad k < 1/2.$

Pertanto, la funzione è strettamente decrescente per $k < \frac{1}{2}$.

7. *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la famiglia di funzioni* $f(x)=\dfrac{2x^3+kx}{x^2+1}$ *è strettamente crescente nel punto di ascissa* x=0.

<u>Soluzione</u>.

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(6x^2+k)-(2x^3+kx)2x}{(x^2+1)^2}, \qquad f'(0)=k \quad \Rightarrow \quad f'(0)>0 \quad per \quad k>0.$$

Pertanto, la funzione è strettamente crescente per $k>0$.

Massimi e Minimi

DEFINIZIONE. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice punto di

1. **massimo assoluto** per f se $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in A$
2. **minimo assoluto** per f se $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in A$

Il massimo M (minimo m) assoluto di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è dunque il massimo (minimo) dell'insieme $f(A)$.
In simboli: $M \in f(A)$, $M \ge b$ per ogni $b \in f(A)$ e $m \in f(A)$, $m \le b$ *per ogni* $b \in f(A)$.

DEFINIZIONE. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice punto di

1. **massimo relativo o locale** per f

   se esiste r *tale che* $f(x) \le f(x_0)$ $\forall\, x \in I(x_0,r) \cap A$

2. **minimo relativo o locale** per f

   se esiste r *tale che* $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall\, x \in I(x_0,r) \cap A$

Ossia: **se esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e al dominio della funzione, si ha $f(x) \le f(x_0)$, la funzione assume in x_0 un massimo relativo; se esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e al dominio della funzione, si ha $f(x) \ge f(x_0)$, la funzione assume in x_0 un minimo relativo.**

NOTA - Con la locuzione "*il punto* x_0 è *di massimo* (*di minimo*)" (relativo o assoluto) si intende dire che $f(x_0)$ è il valore massimo (minimo) assunto dalla funzione (in un intorno di x_0 o su tutto il dominio).

Nel caso in cui il dominio della funzione non sia un insieme aperto ma sia un intervallo che include almeno un estremo, nella ricerca dei massimi e minimi relativi si considera anche questo estremo.

I punti di massimo e minimo di una funzione sono detti anche **estremanti** della funzione o punti di estremo. I massimi e i minimi di una funzione sono detti anche **estremi** della funzione.

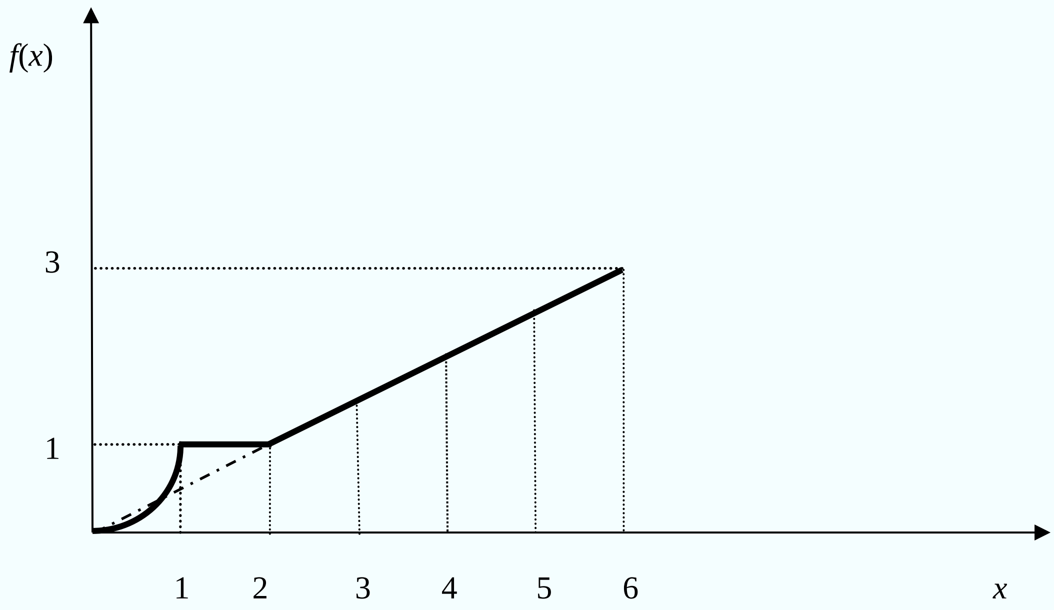
Secondo le definizioni date, un punto di massimo (rispettivamente minimo) assoluto è anche un punto di massimo (rispettivamente minimo) relativo. In generale non vale il viceversa, ossia il valore assunto dalla funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, in un punto x_0 di massimo o di minimo relativo, non è necessariamente il più grande o il più piccolo valore fra quelli che la funzione assume in tutto A, ma è soltanto il più grande o il più piccolo valore fra quelli che essa assume in un *intorno* di x_0. Ne segue che la funzione può avere più di un massimo o più di un minimo relativi, come può anche accadere che un massimo relativo sia più piccolo di un minimo relativo.

Esempio.

Sia $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ 0.5x & \text{se} \quad 2 < x \le 6 \end{cases}$$

- ✓ per $x = 0$ si ha un punto di minimo relativo in cui la funzione assume il valore $f(0) = 0$
- ✓ per $x = 1$ si ha un punto di massimo relativo in cui la funzione assume il valore $f(1) = 1$
- ✓ per $x = 2$ si ha un punto di minimo relativo in cui la funzione assume il valore $f(2) = 1$
- ✓ per $x = 6$ si ha un punto di massimo relativo in cui la funzione assume il valore $f(6) = 3$
- ✓ per $x = 0$ si ha anche un punto di minimo assoluto (il punto $P(0; 0)$), mentre per $x = 6$ si ha un punto di massimo assoluto (il punto $Q(6; 3)$)
- ✓ tutti i punti dell'intervallo $[1, 2)$ sono punti di massimo relativo
- ✓ tutti i punti dell'intervallo $(1, 2]$ sono punti di minimo relativo.



Enunciamo ora due importanti teoremi di cui il secondo è immediata conseguenza del primo e del Teorema I dei valori intermedi incontrato nella dispensa n.3.

TEOREMA DI WEIERSTRASS.
Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora esistono x_1, $x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$,

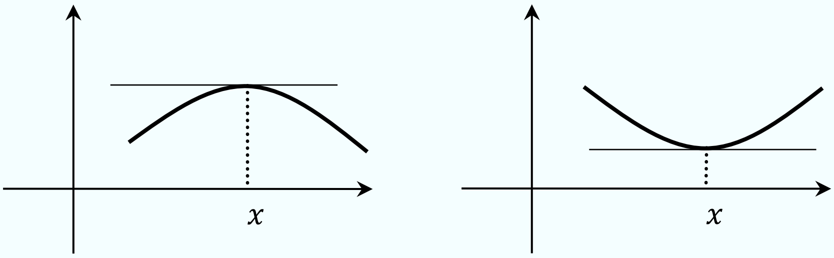
ossia la funzione in $[a,b]$ ha minimo e massimo assoluti.

TEOREMA II *dei valori intermedi (o di Darboux).*
Una funzione $f(x)$, continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

N.B. Il Teorema di Weierstrass vale, più in generale, per funzioni continue su insiemi chiusi e limitati (quindi, ad esempio, su unioni di intervalli chiusi e limitati)

Ora ci occuperemo della ricerca dei punti di massimo e minimo relativi di una funzione definita in un intervallo [a, b] e **derivabile** in (a,b). Le considerazioni che verranno esposte sono valide per i punti x_0 di massimo e minimo relativo che cadono internamente all'intervallo [a, b] (ossia $x_0 \in (a, b)$).

Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo in cui, come ipotizzato, la funzione è derivabile, la situazione che si presenta geometricamente è rispettivamente rappresentata dalle figure sotto riportate



Come si vede, la tangente al grafico in x_0 è parallela all'asse delle x, ossia è una retta con pendenza nulla, ossia $f'(x_0)=0$. Questa proprietà è espressa dal seguente teorema.

TEOREMA DI FERMAT. *Sia f una funzione definita in un insieme A e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad A. Se f è derivabile in x_0, risulta*

$$f'(x_0) = 0$$

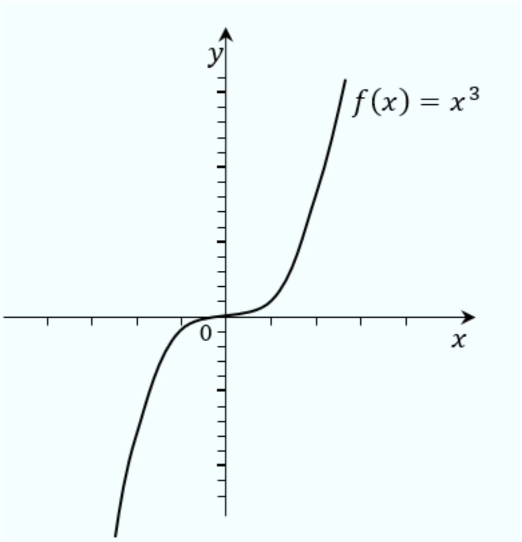
<u>Dimostrazione</u> Sia x_0 un punto di minimo relativo interno (dimostrazione analoga se x_0 punto di massimo relativo interno). Allora, esiste un intorno $I(x_0, r)$ tutto contenuto in A e tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I(x_0, r)$. Pertanto, per ogni $x \in I(x_0, r)$, a seconda che sia $x > x_0$ oppure $x < x_0$ si ha, rispettivamente,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Il primo limite rappresenta la derivata destra di f in x_0, il secondo limite è invece la derivata sinistra di f in x_0. Allora $f'_+(x) \geq 0$ e $f'_-(x) \leq 0$. Poiché f è derivabile in x_0, le due derivate devono coincidere, e quindi $f'_+(x) = f'_-(x) = 0$ e quindi $f'(x_0) = 0$. ■

NOTA - Il teorema precedente fornisce solo una **condizione necessaria** per avere punti di massimo o minimo relativo. La condizione **non è sufficiente**, vale a dire: *in un punto può essere nulla la derivata senza che in quel punto la funzione abbia un massimo o un minimo relativo.*
Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata nulla nel punto $x = 0$, ma in tale punto non si ha né un massimo né un minimo relativo.



Punto stazionario è un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$.
Punto singolare è un punto x_0 in cui la funzione non è derivabile.

Punto critico è un punto stazionario o un punto singolare.

NOTA - Un punto critico non stazionario (ossia un punto singolare) può essere di massimo o di minimo relativo anche se per esso non si può applicare il Teorema di Fermat.

Esempi

1. La funzione $f(x) = |x|$ ha un punto di minimo relativo in $x = 0$ pur essendo un punto singolare (fig.1).

2. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha un punto di minimo relativo in $x = 0$ pur essendo un punto singolare (fig.2).

3. La funzione $f(x) = x^3$ è tale che nel punto $x = 0$ ha derivata nulla (e quindi $x = 0$ è un punto critico, anzi stazionario), ma in esso la funzione non ha né massimo né minimo relativo (fig.3).

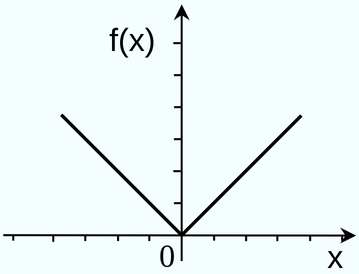


fig. 1

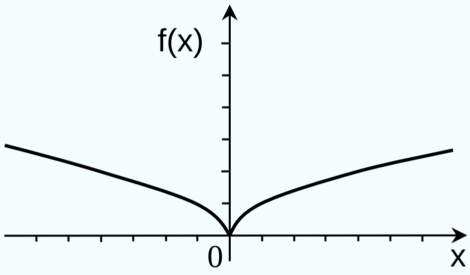


fig. 2

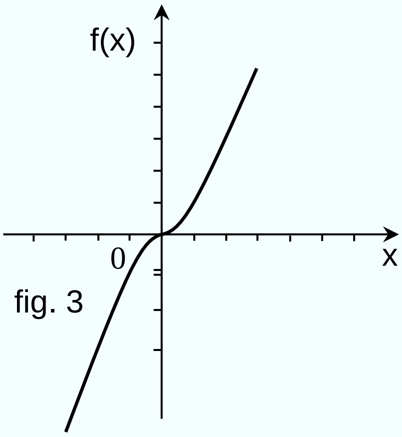


fig. 3

Il Teorema di Fermat implica che, se una funzione è derivabile in (a, b), un punto non stazionario non può essere di massimo né di minimo. Quindi, **solo i punti stazionari sono potenziali estremanti.**

Ricerca dei Massimi e Minimi relativi ed assoluti

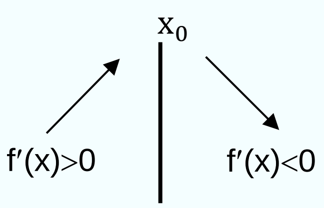
Ricerca dei massimi e minimi relativi mediante lo studio della derivata prima per i punti stazionari

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. Se risulta

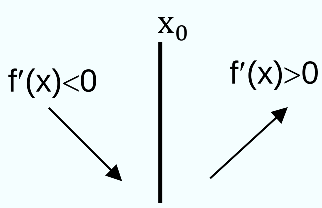
1. $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < x_0 \\ > 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di **minimo relativo**
2. $f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < x_0 \\ < 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di **massimo relativo**
3. $f'(x)$ mantiene lo stesso segno sia prima che dopo x_0 , allora il punto x_0 non è né un massimo né un minimo relativo (sarà un flesso a tangente orizzontale)

<u>GRAFICAMENTE</u>.

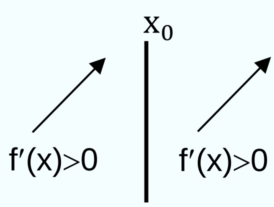
Supposto $f'(x_0) = 0$, si hanno i casi rappresentati in figura:



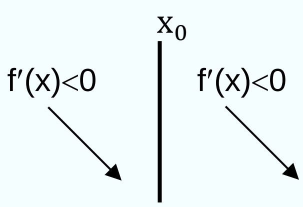
x_0 massimo relativo.



x_0 minimo relativo.



x_0 né massimo né minimo.



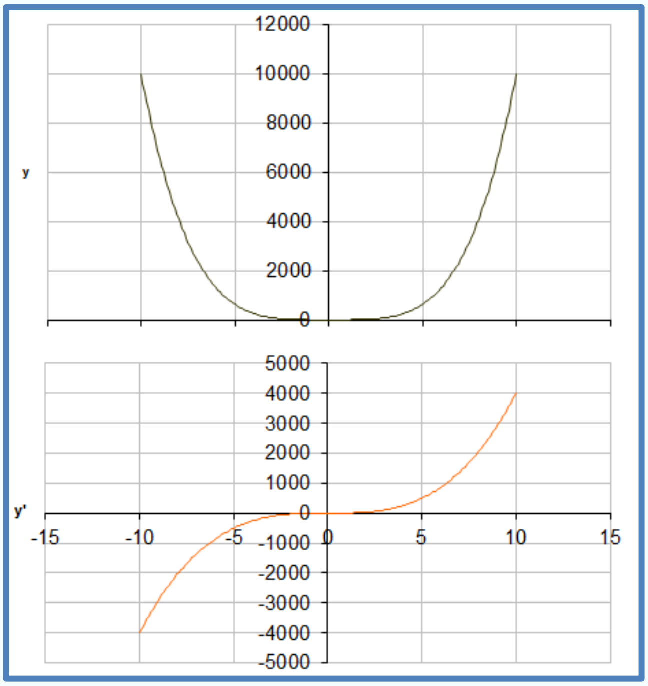
x_0 né massimo né minimo.

Le condizioni summenzionate sono **condizioni sufficienti** (o del second'ordine) per affermare che il punto x_0 è di massimo o di minimo o né di massimo né di minimo

N.B.

Condizioni necessarie (CN) = Teorema di Fermat, punti stazionari
Condizioni sufficienti (CS) = Monotonia della funzione (segno della derivata)

Si consideri la funzione $f(x) = x^4$, descritta dalla curva verde e la sua derivata $f'(x) = 4x^3$, descritta dalla curva arancione.

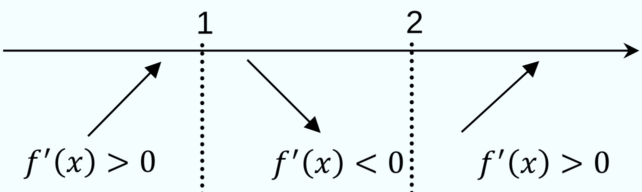


Si noti che la derivata $f'(x) = 4x^3$ è negativa in $(-\infty, 0)$ e, in quell'intervallo, la funzione $f(x) = x^4$ è (strettamente) decrescente; la derivata è invece positiva in $(0, +\infty)$ e, in quell'intervallo, $f(x) = x^4$ è (strettamente) crescente. In $x = 0$, la derivata si annulla e la funzione $f(x)$ presenta un punto di minimo (sia relativo che assoluto).

Esercizio. *Determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi della funzione*

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 21.$$

Soluzione. La funzione è ovunque derivabile ed ha derivata $f'(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0$. La derivata si annulla per $x = 1$ e $x = 2$ e pertanto questi punti possono essere dei massimi e minimi. Dal segno della derivata prima si trae che la funzione è strettamente crescente per $x < 1$ e $x > 2$, mentre è strettamente decrescente per $1 < x < 2$. Si conclude che $x = 1$ è punto di massimo relativo, $x = 2$ è punto di minimo relativo.



Nel punto di massimo relativo $x = 1$ la funzione vale $f(1) = -11$; nel punto di minimo relativo $x = 2$ la funzione vale $f(2) = -13$.

Ricerca dei massimi e minimi relativi in punti interni singolari in cui la funzione è continua

Si è già osservato che una funzione può avere dei massimi o dei minimi relativi in punti in cui non è derivabile, si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = |x|$ che in $x = 0$ ha un minimo pur non essendo derivabile in questo punto. Per la ricerca di questi eventuali punti di massimo e minimo non si può applicare il Teorema di Fermat, ma se la funzione è continua nell'intervallo in cui si fa la ricerca, si può stabilire se un punto x_0 è di massimo o di minimo relativo studiando il segno della derivata prima, ossia studiando la crescenza e la decrescenza della funzione (**condizioni sufficienti**). Precisamente:

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto in cui la funzione non è derivabile ma è continua.

1. $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < x_0 \\ > 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di **minimo relativo**

2. $f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < x_0 \\ < 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di **massimo relativo**

3. $f'(x)$ mantiene lo stesso segno sia prima che dopo x_0, allora il punto x_0 non è né un massimo né un minimo relativo

Di norma massimi e minimi di questo tipo si trovano nello studio delle funzioni nella cui espressione analitica figurano dei valori assoluti oppure nelle funzioni definite a tratti.

Ricerca dei massimi e minimi relativi in punti di frontiera in cui la funzione è continua

1a. $f'(x) > 0$ in un intorno destro di a, allora a è un punto di **minimo relativo**
1b. $f'(x) < 0$ in un intorno destro di a, allora a è un punto di **massimo relativo**

2a. $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di b, allora b è un punto di **massimo relativo**
2b. $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di b, allora b è un punto di **minimo relativo**

<u>Esempio.</u>
La funzione $f(x) = |x-2|$ presenta un minimo nel punto $x = 2$ dove la funzione esiste ma non è derivabile perché è un punto angoloso.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \in [2,5] \\ 2-x & \text{se } x \in [0,2) \end{cases} \quad , \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (2,5) \\ -1 & \text{se } x \in (0,2) \end{cases}$$

Per $x \neq 2$ la derivata assicura che per $x > 2$ la funzione cresce mentre per $x < 2$ decresce. Dunque, $x = 2$ è un punto di minimo e il minimo vale $f(2) = 0$.

I punti di frontiera $x = 0$ e $x = 5$ sono punti di massimo poiché in un opportuno intorno destro di 0 si ha $f'(x) > 0$ e in un opportuno intorno sinistro di 5 si ha $f'(x) < 0$.

<u>Esempio.</u>
La funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$, definita in $\mathbb{R}$, presenta un minimo nel punto $x = 1$ dove esiste ma non è derivabile (punto singolare).

RIASSUNTO - Determinazione dei punti di massimo e minimo

Se la funzione f è **continua** in A, non è necessario utilizzare la condizione del prim'ordine (Teorema di Fermat); basta utilizzare quella del second'ordine (il **criterio di monotonia**) per determinare gli intervalli di monotonia della funzione e, con essi, tutti i punti di minimo e di massimo (interni o di frontiera).

E SE LA FUNZIONE PRESENTA PUNTI DI DISCONTINUITÀ?

Se la funzione è discontinua in x_0 è necessario effettuare un'analisi locale più dettagliata nell'intorno di x_0, che coinvolge il valore assunto dalla funzione in x_0, il limite per x che tende a x_0 e la monotonia della funzione nell'intorno di x_0.

Sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ un punto interno al dominio della funzione. La regola per determinare la natura di x_0 è la seguente:

1. **se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L < f(x_0)$ allora x_0 è punto di massimo locale**
2. **se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > f(x_0)$ allora x_0 è punto di minimo locale**
3. **se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, si dovranno confrontare i due limiti con $f(x_0)$:**
   a) **se $f(x_0) > \max[L_1, L_2]$, allora x_0 è un punto di massimo locale**
   b) **se $f(x_0) < \min[L_1, L_2]$, allora x_0 è un punto di minimo locale**
   c) **se $f(x_0) = L_1 > L_2$ e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è un punto di massimo locale**
   d) **se $f(x_0) = L_1 < L_2$ e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è un punto di minimo locale**
   e) **se $f(x_0) = L_2 > L_1$ e $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0, allora x_0 è un punto di massimo locale**
   f) **se $f(x_0) = L_2 < L_1$ e $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0, allora x_0 è un punto di minimo locale**

In ogni altro caso, x_0 non è un punto di minimo né di massimo.

Per i punti di frontiera, la regola è più semplice. Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e sia f discontinua in $x = a$ e in $x = b$:

se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L < f(a)$, allora a è punto di massimo locale

se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L > f(a)$, allora a è punto di minimo locale

se $\lim_{x \to b^-} f(x) = L < f(b)$, allora b è punto di massimo locale

se $\lim_{x \to b^-} f(x) = L > f(b)$, allora b è punto di minimo locale

(i) PUNTI INTERNI

f è derivabile in un intervallo → studiare i punti stazionari e utilizzare il criterio di monotonia (segno della derivata) per determinare la natura

f non è derivabile in un punto x_0 (punto singolare)

f è continua in x_0 → utilizzare il criterio di monotonia per determinare la la natura di x_0

f non è continua in x_0 → effettuare un'analisi locale per determinarne la natura (valutare la funzione in x_0, studiare la monotonia nell'intorno di x_0, studiare il limite destro e sinistro di f)

(ii) PUNTI DI FRONTIERA

f è continua in x_0 → utilizzare il criterio di monotonia per determinare la la natura di x_0

f non è continua in x_0 → effettuare un'analisi locale per determinarne la natura (valutare la funzione in x_0, studiare la monotonia nell'intorno di x_0, studiare il limite destro e sinistro di f)

Se una funzione è **definita a tratti**, allora un punto x_0 in cui la funzione cambia espressione può essere punto di massimo o di minimo:

(1) se la funzione è derivabile in x_0, allora esso può essere di massimo o minimo relativo solo se è un punto stazionario. Per determinare la natura di x_0, basta valutare il segno della derivata in un intorno di x_0 (e quindi la crescenza e decrescenza di f nell'intorno di x_0)

(2) se la funzione non è derivabile ma è continua in x_0, allora esso può essere o non essere di massimo relativo o di minimo relativo. Per determinare la natura di x_0, basta valutare il segno della derivata in un intorno di x_0 (e quindi la crescenza e decrescenza di f nell'intorno di x_0)

(3) se la funzione non è continua in x_0, allora può essere o non essere di massimo relativo o di minimo relativo. Per determinare la natura

- si valuta la funzione in x_0
- si calcola il limite destro, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, e il limite sinistro, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$
- si valuta il segno della derivata in un intorno destro e sinistro di x_0 (e quindi la crescenza e decrescenza di f a sinistra e destra di x_0) e lo si confronta con i limiti trovati

RIASSUNTO - Determinazione dei punti di massimo e minimo

Se la funzione f è **continua** in A, tranne al più in un numero finito di punti, non è necessario utilizzare la condizione del prim'ordine (Teorema di Fermat); per i punti in cui f è continua (interni o di frontiera) basta utilizzare quella del second'ordine (il **criterio di monotonia**) per determinare gli intervalli di monotonia della funzione; per i punti in cui f è discontinua, si effettua un'analisi locale.

Ricerca dei massimi e dei minimi assoluti

Una volta determinati tutti i massimi e minimi relativi, si determinano gli eventuali minimi e massimi assoluti (eventuali perché potrebbero non esistere). **Se il massimo assoluto esiste**, il **valore più grande** assunto dalla funzione in questi punti sarà il massimo assoluto della funzione; se esiste il minimo assoluto, il **valore più piccolo** sarà il minimo assoluto della funzione.

sup *f* è definito estremo superiore della funzione $f(x)$ se è estremo superiore dell'insieme $f(A)$. Questo vuole dire che

- $\sup f(A) \geq y$ per ogni $y \in f(A)$ (cioè, $\sup f(A)$ è un maggiorante)
- $\forall \lambda < \sup f(A)\ \exists y^* \in f(A)$ tale che $\lambda < y^* \leq \sup f(A)$ (cioè, $\sup f(A)$ è il più piccolo dei maggioranti)

inf *f* è definito estremo inferiore della funzione $f(x)$ se è estremo inferiore dell'insieme $f(A)$. Questo vuole dire che

- $\inf f(A) \leq y$ per ogni $y \in f(A)$ (cioè, $\inf f(A)$ è un minorante)
- $\forall \lambda < \sup f(A)\ \exists y^* \in f(A)$ tale che $\lambda > y^* \leq \inf f(A)$ (cioè, $\inf f(A)$ è il più grande dei minoranti)

Siano $M_1, M_2, \dots, M_n$ i massimi relativi di una funzione f e siano $m_1, m_2, \dots, m_p$ i minimi relativi di f. Sia $M = \max[M_1, M_2, \dots, M_n]$ il più grande dei massimi relativi e $m = \min[m_1, m_2, \dots, m_p]$ il più piccolo dei minimi relativi. M è un potenziale massimo assoluto; m è un potenziale minimo assoluto.

(i) **se $\sup f = M$, allora M è il massimo assoluto della funzione**

(ii) **se $\sup f > M$, allora la funzione non ammette massimo assoluto**

(iii) **se $\inf f = m$, allora m è il minimo assoluto della funzione**

(iv) **se $\inf f < m$, allora la funzione non ammette minimo assoluto**

Ricerca dei massimi e dei minimi assoluti in un insieme chiuso e limitato

Se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, il Teorema di Weierstrass garantisce che il massimo e il minimo assoluti esistono. Basta quindi utilizzare il criterio di monotonia per i punti stazionari, per i punti singolari e per gli estremi di $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Esercizio.
Determinare il valore del massimo assoluto e il valore del minimo assoluto della funzione $f(x) = e^{x^2-2x}$ *nell'intervallo* [0, 4].
<u>Soluzione</u>
La funzione è continua su un insieme chiuso e limitato; quindi, esistono massimo assoluto e minimo assoluto (Teorema di Weierstrass)

Punti interni
La funzione è derivabile in tutto l'intervallo (0, 4), quindi se esistono massimi e minimi interni essi sono punti stazionari
(CN) $f'(x) = (2x - 2)\ e^{x^2-2x}$ e quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1$ ossia $x = 1$ è un punto stazionario;

(CS) $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e $f'(x) < 0$ per $x < 1$ e pertanto, $x = 1$ è punto di minimo relativo. Il minimo relativo è $f(1) = e^{-1}$

Non ci sono altri punti di minimo o di massimo relativi interni.

Estremi (punti di frontiera)
Agli estremi dell'intervallo di definizione la funzione assume i seguenti valori:
$f(0) = e^0 = 1$, $f(4) = e^8$. Si tratta di massimi relativi perché la funzione decresce a destra di x=0 ed è crescente a sinistra di x=4. Poiché il valore più grande fra questi è , $f(4) = e^8$, il massimo assoluto della funzione è assunto in $x = 4$ e vale appunto e^8.

Essendo la funzione decrescente a sinistra di x=1 e crescente a destra, x=1 è anche il minimo assoluto della funzione.

Esercizio.

Trovare massimi e minimi per la funzione $f : \left[\frac{1}{2}; 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$

<u>Soluzione</u>

La funzione è continua su un insieme chiuso e limitato; quindi, esistono massimo assoluto e minimo assoluto (Teorema di Weierstrass)

Punti interni

La funzione è derivabile in tutto l'intervallo (0.5, 2), quindi se esistono massimi e minimi interni essi sono punti stazionari:

(CN): $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1\,;$$

(CS) $f'(x) > 0$ $per\ x > 1$; $f'(x) < 0$ per $x < 1$. Allora $x = 1$ è punto di minimo relativo e il minimo è $f(1) = e$.

Non ci sono altri punti di massimo o minimo interni.

Estremi (punti di frontiera)

La funzione è continua agli estremi dell'intervallo. Agli estremi dell'intervallo di definizione la funzione assume i seguenti valori. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$ e $f(2) = \frac{e^2}{2}$

Si tratta di massimi relativi perché la funzione decresce a destra di $x = 0.5$ ed è crescente a sinistra di $x = 1$. Poiché il valore più grande fra questi è $f(2) = \frac{e^2}{2}$, il massimo assoluto della funzione è assunto in $x = 2$ e vale appunto $\frac{e^2}{2}$.

Essendo la funzione decrescente a sinistra di $x = 1$ e crescente a destra, $x = 1$ è anche il minimo assoluto della funzione.

Esercizio.
Rappresentare graficamente la seguente funzione ed individuare i punti di massimo e minimo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2}x^2 + 2x & , \quad x \in [1,3) \\ 3 & , \quad x = 3 \\ \sqrt{x^3} & , \quad x \in (3,4] \end{cases}$$

Soluzione. Dom f = [1, 4].
Punti interni in cui *f* è derivabile
La funzione è derivabile in $(1,3) \cup (3,4)$.

(CN)

$$f'(x) = \begin{cases} -x+2 & , \ x \in (1,3) \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} & , \ x \in (3,4) \end{cases} \quad , \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad x = 0.$$

Il punto $x = 0$ non è accettabile perché $0 \notin (3,4)$, quindi l'unico punto stazionario interno è $x = 2$.

(CS)
La funzione è strettamente crescente in (3, 4) perché $f'(x) > 0$ in (3,4). Il punto $x = 2$ è di massimo relativo perché in un intorno sinistro di $x = 2$ la derivata è positiva, mentre in un intorno destro la derivata è negativa. Il massimo relativo è $f(2) = 2$.

Punti interni in cui *f* non è derivabile (punti singolari)
La funzione non è continua in $x = 3$. Infatti,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \sqrt{27} = 5{,}196 \neq 1{,}5 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

Quindi non esiste il limite $\lim_{x\to 3} f(x)$. Se non esiste il limite, allora, a fortiori, non può sussistere la condizione di continuità $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Se non è continua in $x = 3$, non è neppure derivabile in $x = 3$. Per determinare la natura di $x = 3$ è necessario valutare la funzione nel punto, i limiti destro e sinistro, e la crescenza/decrescenza nell'intorno di $x = 3$.

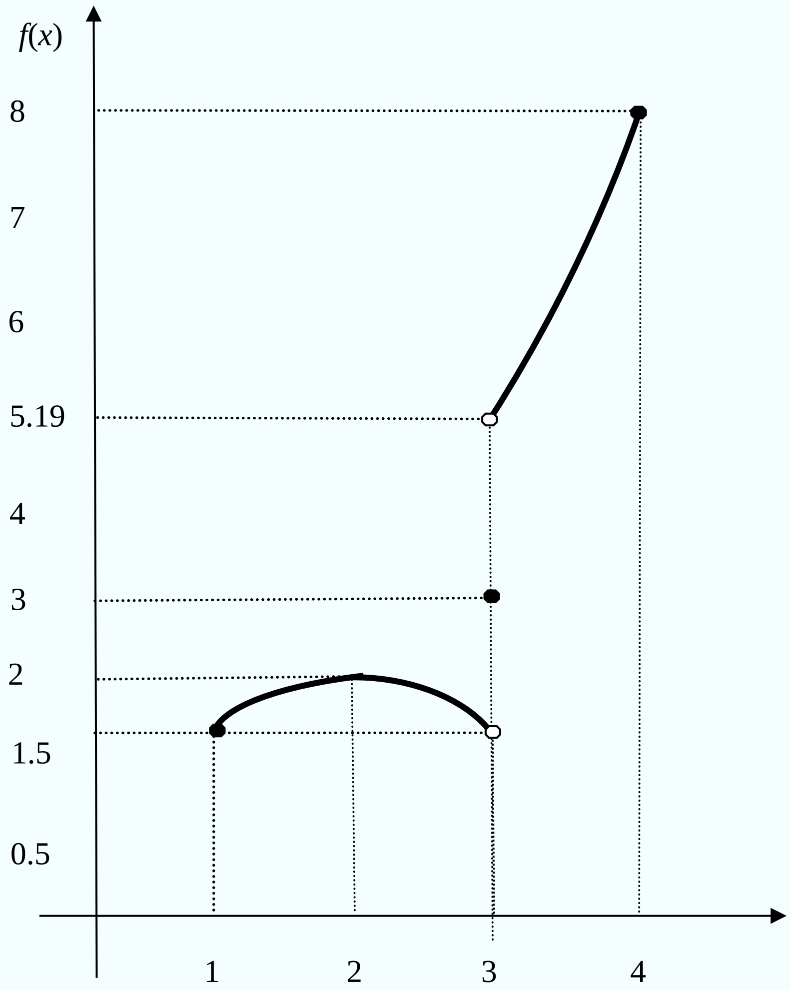
Si ha

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5{,}196 > f(3) = 3 > 1{,}5 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

e la funzione è crescente a destra di x=3 e decrescente a sinistra di x=3. Quindi, il punto x=3 non è né di minimo né di massimo

Estremi (punti di frontiera)
La funzione è continua agli estremi dell'intervallo considerato.
x=1 è punto di minimo relativo perché la funzione è crescente in (1,2)
x=4 è punto di massimo relativo perché la funzione è crescente in (3,4)

x=1 è l'unico punto di minimo relativo ed è anche punto di minimo assoluto.
x=2 e x=8 sono i punti di massimo relativo. Essendo $f(2) = 2 < 8 = f(4)$, $x = 4$ è il punto di massimo assoluto.
Il minimo assoluto della funzione è $1.5 = f(1)$, il massimo assoluto è $f(4) = 8$.



Applicazione (profitto massimo)
Un rimedio omeopatico è venduto sotto forma di opercoli ad un prezzo di 10 euro per ogni blister e ogni scatola contiene due blister. Il costo totale di produzione di x scatole è

$$C(x) = 50 + 8x + 0.003x^2$$

e la capacità produttiva della ditta è al massimo di 3000 scatole in un determinato intervallo di tempo. Quante scatole devono essere vendute in quel periodo per massimizzare il profitto? Sarebbe vantaggioso aumentare la capacità produttiva in quel periodo?

<u>Soluzione</u>

Si ha $Dom\ f = [0, 3000]$. Le funzioni ricavo $R(x)$ e profitto $P(x)$ sono rispettivamente

$$R(x) = 2 \cdot 10x = 20x$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = 20x - 50 - 8x - 0.003x^2 = 12x - 50 - 0.003x^2$$
$$P'(x) = 12 - 0.006x = 0 \implies x = 2000, \qquad P'(x) > 0 \iff x < 2000$$

quindi in $[0;\ 3000]$ la funzione $P(x)$ è crescente per $x < 2000$ e decrescente per $x > 2000$. Il punto $x = 2000$ è allora punto di massimo relativo. Il corrispondente valore massimo assunto dalla funzione è

$$P(2000) = 12(2000) - 50 - 0.003(2000)^2 = 11950\ .$$

È anche un punto di massimo assoluto?

Il punto x=2000 è l'unico punto di massimo relativo interno e perciò basta confrontare il valore $P(2000) = 11950$ con il valore assunto dalla $P(x)$ negli estremi dell'intervallo di definizione. Risulta $P(0) = -50 < P(3000) = 8950 < P(2000) = 11950$ e pertanto $x = 2000$ è anche massimo assoluto. Il punto di minimo assoluto è assunto in $x = 0$.

Non è vantaggioso aumentare la capacità produttiva di quel periodo perché la funzione, a destra di $x = 2000$, è decrescente.

Ricerca dei massimi e dei minimi assoluti in un insieme non chiuso o illimitato

Un insieme è non chiuso o illimitato se è del tipo (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ con $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ o unioni di questi intervalli.

In questi casi, il teorema di Weierstrass non si può applicare: può infatti avvenire che $\sup f > M$ (non esiste massimo assoluto) e/o $\inf f < m$ (non esiste minimo assoluto) e questo vuole dire che f non è dotata di massimo assoluto e/ di minimo assoluto. In ogni caso, gli eventuali massimi e minimi relativi sono assunti in:

punti interni stazionari
punti interni di non derivabilità
punti di frontiera (estremi) dell'insieme di definizione.

Per determinare il massimo e minimo assoluti, è necessario procedere in due passi:

1. Determinare tutti i massimi relativi e minimi relativi
2. Selezionare il maggiore dei massimi relativi M e il minore dei minimi relativi m.
3. Determinare l'estremo superiore di f, $\sup f$, e l'estremo inferiore, $\inf f$,
4. Confrontare M con $\sup f$ e m con $\inf f$, rispettivamente.

In particolare,

a. Sia $(a,b]$ l'intervallo considerato e sia $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Se $M > L > m$, M è il massimo assoluto e m è il minimo assoluto. Se $L > M > m$, non esiste il massimo assoluto, m è il minimo assoluto, e $\sup f = L$. Se $M > m > L$, M è il massimo assoluto, non esiste il minimo assoluto, e $\inf f = L$.

b. Sia $[a,b)$ l'intervallo considerato e sia $\lim_{x\to b^-} f(x) = L$. Se $M > L > m$, M è il massimo assoluto e m è il minimo assoluto. Se $L > M > m$, non esiste il massimo assoluto, m è il minimo assoluto, e $\sup f = L$. Se $M > m > L$, M è il massimo assoluto, non esiste il minimo assoluto, e $\inf f = L$.

c. Sia l'intervallo considerato (a,b) e sia $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = L_2$. Sia $L = \max[L_1, L_2]$ e $l = \min[L_1, L_2]$. Se $L > M > l > m$, non esiste massimo assoluto, m è il minimo assoluto e $\sup f = L$. Se $M > L > m > l$, non esiste minimo assoluto, il massimo assoluto è M e $\inf f = l$. Se $L > M > m > l$, non esiste né massimo assoluto né minimo assoluto e $\inf f = l$, $\sup f = L$. Se $M > L > l > m$, M il massimo assoluto e m è il minimo assoluto. Se $M > m > L > l$, M è il massimo assoluto, non esiste minimo assoluto e $\inf f = l$. Se $L > l > M > m$, m è minimo assoluto, non esiste massimo assoluto e $\sup f = L$.

La regola descritta assume implicitamente $M > m$. In realtà, sono possibili situazioni in cui $m > M$. Questo è possibile se la funzione è discontinua.

Non è necessario ricordare tutti i casi: indipendentemente dal dominio (aperto o non aperto, chiuso o non chiuso, limitato o non limitato), per determinare l'esistenza di massimo e minimo assoluto è necessario calcolare sup f e inf f. A tal fine, si enuncia la seguente regola procedurale:

Ricerca del massimo e minimo assoluto - procedura generale

Sia $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato. Sia $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in $\boldsymbol{A}$ ad eccezione di un numero finito di punti:

1. si calcolino tutti i massimi relativi
2. si calcolino tutti i minimi relativi
3. per ogni punto di frontiera, si calcoli il limite (destro o sinistro) della funzione
4. per ogni punto di discontinuità, si calcoli il limite (destro e sinistro) della funzione

Siano $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{m}$ il massimo dei massimi relativi e il minimo dei minimi relativi, rispettivamente;
siano $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{l}$ il massimo e il minimo dei limiti per i punti di frontiera, rispettivamente;
siano $\boldsymbol{L}^*$ e $\boldsymbol{l}^*$ il massimo e minimo dei limiti per i punti di discontinuità, rispettivamente.

Allora,

$\boldsymbol{M}$ è massimo assoluto di $\boldsymbol{f}$ se e solo se $\boldsymbol{M} = \mathbf{max}[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{L}^*, \boldsymbol{l}^*]$
$\boldsymbol{m}$ è minimo assoluto di $\boldsymbol{f}$ se e solo se $\boldsymbol{m} = \mathbf{min}[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{L}^*, \boldsymbol{l}^*]$

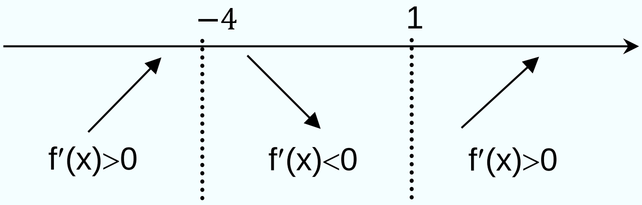
N.B. Se $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non limitato, $+\infty$ e/o $-\infty$ sono da considerare "punti di frontiera" e quindi si dovranno calcolare i limiti $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e/o $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Esercizio.
Guerraggio p. 247 (Esercizio 9.21)
Determinare massimi e minimi relativi/locali e assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1.$$

<u>Soluzione</u>.
$Dom\ f = \mathbb{R}$, derivabile su tutto $\mathbb{R}$ (e quindi continua su tutto $\mathbb{R}$)

CN: $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 = 0$ per $x = -4$ e $x = 1$ (accettabili perché appartenenti al dominio)
CS: $f'(x) > 0$ per $x < -4$ o $x > 1$, $f'(x) < 0$ per $-4 < x < 1$,

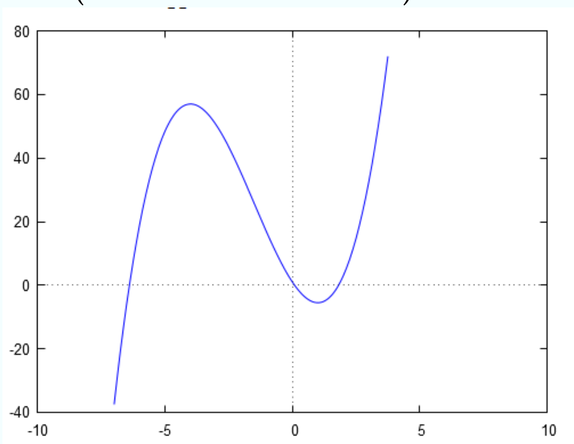


Pertanto,
punto di massimo relativo in $x = -4$, massimo relativo $f(-4) = 57$.
punto di minimo relativo in $x = 1$, minimo relativo $f(1) = -\frac{11}{2} = -5.5$

Non esiste né minimo assoluto né massimo assoluto perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

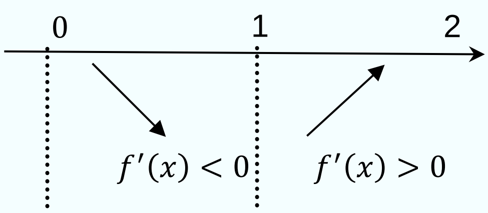
cioè $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$ (la funzione è illimitata).



In questo caso, si ha $L = +\infty, l, = -\infty, M = 57, m = -5.5$, cioè $L > M > m > l$ e non esiste massimo e minimo assoluto.

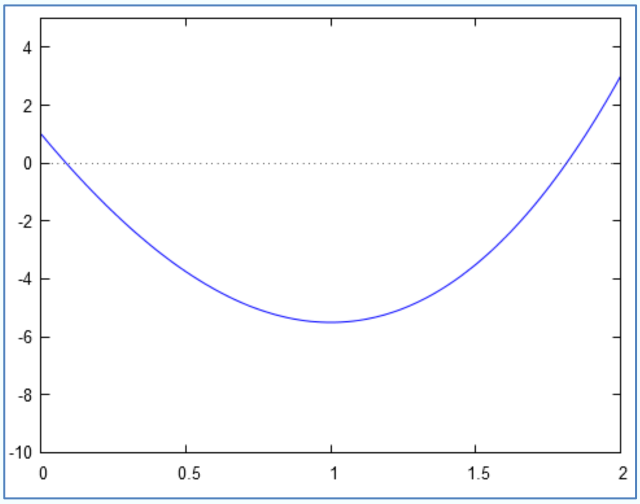
Esercizio.
Si consideri la stessa funzione di cui all'esercizio precedente: $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1$.
Determinare massimi e minimi relativi e assoluti nell'intervallo aperto (0,2).

<u>Soluzione</u>.



punto di minimo assoluto in $x = 1$, minimo assoluto $f(1) = -\frac{11}{2}$

Essendo poi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, la funzione è limitata ed ammette estremo superiore uguale a $\sup f(x) = 3$.
Non esiste massimo assoluto.



Esercizio.
Si consideri la funzione di cui sopra: $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1$.
Determinare massimi e minimi relativi e assoluti nell'intervallo [0,2).

Soluzione:

punto di minimo assoluto in $x = 1$, minimo assoluto $f(1) = -\frac{11}{2}$
punto di massimo locale in $x = 0$, massimo locale $f(0) = 1$.

Non esiste massimo assoluto perché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 = \sup f > 1$.
La funzione è limitata ed ammette estremo superiore uguale a $\sup f(x) = 3$.

Esercizio.
Si consideri la funzione di cui sopra: $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1$.
Determinare massimi e minimi relativi e assoluti nell'intervallo chiuso [0,2].

Soluzione: vale il Teorema di Weierstrass, quindi esistono massimo e minimo assoluti
punto di minimo assoluto in $x = 1$, minimo assoluto $f(1) = -\frac{11}{2}$
punto di massimo relativo in $x = 0$, massimo relativo $f(0) = 1$.
punto di massimo assoluto in $x = 2$, massimo assoluto $f(2) = 3$

Esercizio. Determinare massimi e minimi assoluti di

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{se } x \in [-3,-1) \\ x^2 & \text{se } x \in [-1,1) \end{cases}$$

La funzione è definita in $[-3,1)$, discontinua in $x=-1$, perché

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to-1^-} f(x)$. Inoltre, la derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+2) & \text{se } x \in (-3,-1) \\ 2x & \text{se } x \in (-1,1) \end{cases}$$

e si annulla per $x=-2$ e per $x=0$. Studiando il segno della derivata,

	-3	-2	-1	0	1
f'	$+$	$-$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$x=-3$ è punto di minimo relativo, $x=-2$ è punto di massimo relativo, $x=0$ è punto di minimo relativo. Quest'ultimo non può essere punto di minimo assoluto, perché $f(-3) = -1 < f(0) = 0$.

Per quanto riguarda il punto $x=-1$, si tratta di un punto di massimo relativo perché $f(-1) = 1 > -1 = \lim_{x\to-1^-} f(x)$. Ed è anche un punto di massimo assoluto, perché

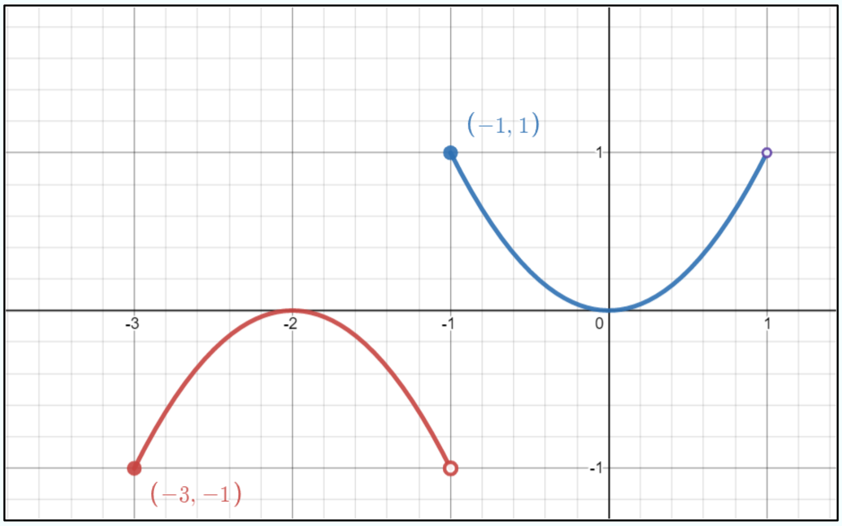
(i) l'altro punto di massimo relativo è $x=-2$ ed ha una quota inferiore, giacché $f(-2) = 0 < 1 = f(-1)$

(ii) $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 = f(-1)$

Pertanto, $M = L = L^* = 1 > -1 = l = l^* = m$ e

$x=-1$ è punto di massimo assoluto; $f(-1) = 1 = M$ è massimo assoluto

$x=-3$ è punto di minimo assoluto; $f(-3) = -1 = m$ è minimo assoluto.



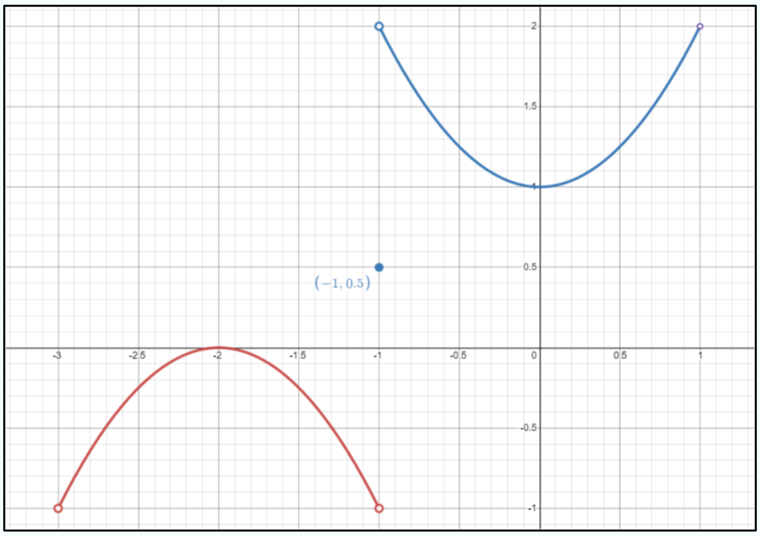
Esercizio. Si verifichi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{se } x \in (-3,-1) \\ 0.5 & \text{se } x = -1 \\ x^2+1 & \text{se } x \in (-1,1) \end{cases}$$

presenta la situazione $m > M$ summenzionata (si veda il box in verde). In particolare, non esiste né massimo assoluto né minimo assoluto, essendo

$$L = \sup f = 2, \qquad m = 1, \qquad M = 0, \qquad l = \inf f = -1$$

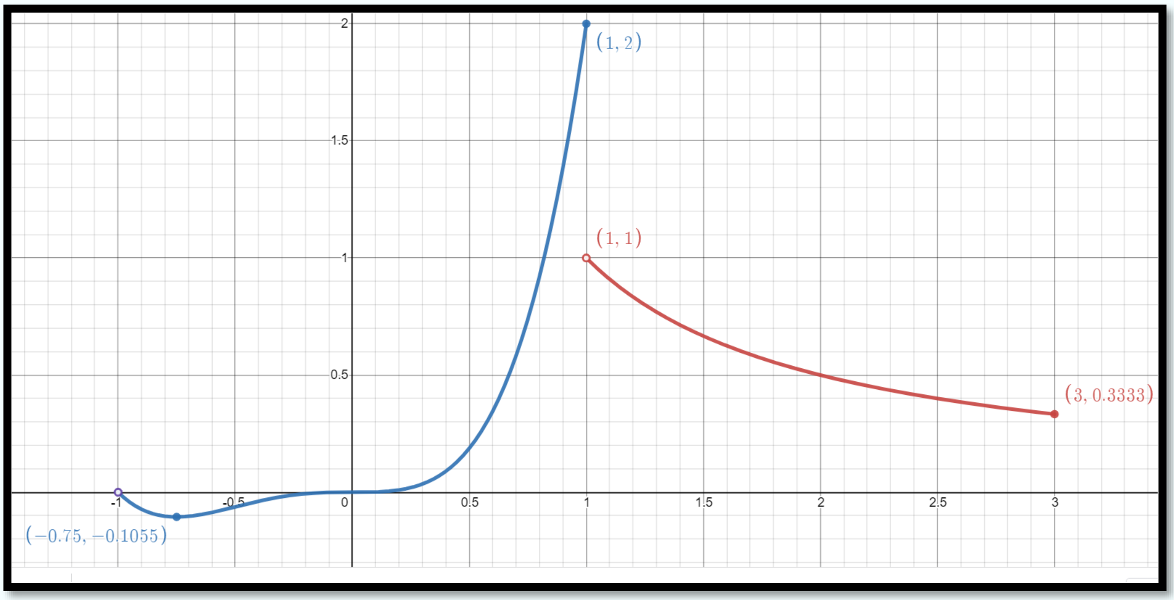
e quindi $L > m > M > l$ o, con formalizzazione alternativa, $M < \max[M, m, L, L^*, l, l^*]$ e $m > \min[M, m, L, L^*, l, l^*]$



Esercizio. Determinare massimi e minimi assoluti di

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in (1{,}3] \\ x^4 + x^3 & \text{se } x \in (-1, 1] \end{cases}$$

analizzando il grafico sottostante:



Essendo

$$M = L^* = 2, \qquad L = 0.333, \qquad l = 0, \quad l^* = 1, \quad m = -0.1055$$

$M = \max[M, m, L, L^*, l, l^*]$ ed esiste il massimo assoluto, assunto in $x = 1$;

$m = \min[M, m, L, L^*, l, l^*]$ ed il minimo assoluto, assunto in $x = -0.75$.

Esercizio. Si consideri la funzione descritta nell'esercizio precedente. Si ricostruisca il grafico qualitativo della funzione ricercando i massimi e minimi relativi analiticamente, a partire cioè dall'espressione della funzione.

Ricerca dei massimi e minimi relativi
mediante lo studio delle derivate successive

Se f è derivabile in A, allora si può considerare la funzione derivata $f': A \to \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in A$ associa $f'(x)$; questa funzione può essere, oppure no, derivabile. Se in x_0 la funzione $f'(x)$ è derivabile, la sua derivata $(f')'(x_0)$ si chiama derivata seconda della f, calcolata in x_0, e si indica con $f''(x)$. Analogamente si può definire $f'''(x)$ e così via. Ad esempio, $f(x) = x^4 - 3x^2$ ammette derivata prima uguale a $f'(x) = 4x^3 - 6x$, derivata seconda uguale a $f''(x) = 12x^2 - 6$, derivata terza uguale a $f'''(x) = 24x$, derivata quarta uguale a $f^{(\mathrm{iv})}(x) = 24$, derivata quinta uguale a $f^{(\mathrm{v})}(x) = 0$ e, in generale, $f^{(n)}(x) = 0$ per $n \geq 5$.

Applicazione (Fisica)

La posizione di un'auto all'istante t (ore) è espressa da

$$s(t)= t^3 + 2t^2$$

Si calcoli la sua velocità e la sua accelerazione dopo 5 ore.

Velocità = tasso di variazione istantaneo (derivata) dello spazio rispetto al tempo
Accelerazione = tasso di variazione istantaneo (derivata) della velocità rispetto al tempo

$s'(t) = 3t^2 + 4t$
$s'(5) = 3(5^2) + 4(5) = 95$

velocità = 95 km per ora

$s''(t) = 6t + 4$
$s''(5) = 6(5) + 4 = 34$

accelerazione = 34 km/h ogni ora

Applicazione (Fisica)

Un oggetto vicino alla superficie terrestre in caduta libera nel vuoto da una posizione iniziale di quiete sotto l'influenza della forza di gravità copre una distanza di circa $s(t)= 4.9t^2$ *metri in t secondi. Trovate la sua accelerazione dopo 10 secondi.*

<u>Soluzione</u>

$$v(t) = s'(t) = 9.8t$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \implies a(8) = 9.8$$

La velocità è di $9.8t$ m/s e varia ad un tasso di 9.8 m/s ogni secondo.

Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte $(n \geq 2)$ nell'intervallo (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$.
Se risulta

1. $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di massimo relativo.

2. $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ allora x_0 è un punto di minimo relativo.

3. $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$ allora il punto x_0 non è né di massimo né di minimo

Il metodo ora esposto si può generalizzare:

Se la prima derivata non nulla è di ordine pari (2, 4, 6, …), allora il punto è di

(i) minimo se la derivata è positiva

(ii) massimo se la derivata è negativa

Se la prima derivata non nulla è di ordine dispari (1, 3, 5, …), allora il punto non è né di minimo né di massimo.

Esercizio.
Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 8$.

<u>Soluzione</u>. La funzione è ovunque derivabile più volte.

a) Cerchiamo gli eventuali punti stazionari: $f'(x) = 6x2 - 6x - 12$, $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 2$ che risultano pertanto punti stazionari.

b) Calcoliamo la derivata seconda nei punti stazionari trovati: $f''(x) = 12x - 6$, $f''(-1) = -18 < 0$ e quindi $x = -1$ è punto di massimo relativo; $f''(2) = 18 > 0$ e quindi $x = 2$ è punto di minimo relativo.

Applicazione (ricavo massimo)

La SoftwareDangers Spa sta per lanciare il nuovo programma Click&Bug 2022, ma più l'azienda lavora su di esso, maggiore è il prezzo a cui può essere venduto. Gli analisti di marketing stimano che, se lanciato subito, esso possa essere venduto a 100 euro ma, per ogni giorno di attesa, il prezzo che sarà possibile praticare aumenta di 2 euro. Tuttavia, un'attesa nel lancio del prodotto favorisce la concorrenza, e gli analisti stimano che, per ogni giorno di differimento del lancio, il mercato potenziale sarà ridotto di 2500 unità. Di quanti giorni la SoftwareDangers Spa deve rimandare l'uscita del programma per ottenere il massimo ricavo, se il mercato potenziale dell'azienda in caso di lancio immediato è pari a 400 mila copie? In ogni caso, l'azienda non è disposta ad attendere più di 5 mesi.

<u>Soluzione</u>

Sia t il numero di giorni, allora la funzione che rappresenta il prezzo e la funzione che rappresenta il mercato potenziale (numero acquirenti) sono rispettivamente

$$p(t) = 100 + 2t \qquad \text{e} \qquad n(t) = 400000 - 2500t$$

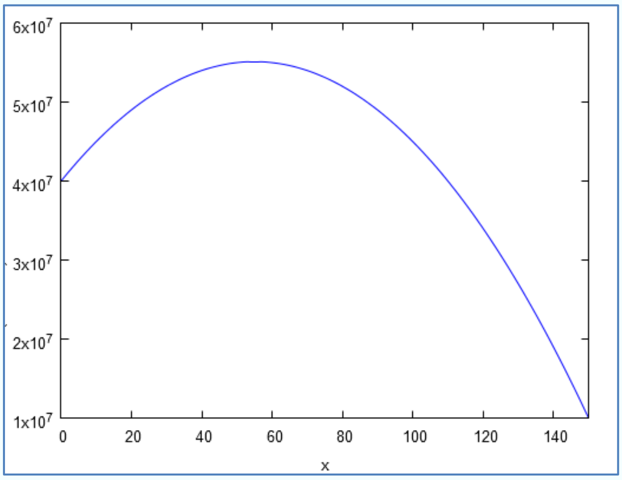
La funzione ricavo è

$$\begin{aligned} R(t) = p(t)n(t) &= (100 + 2t)(400000 - 2500t) \\ &= 40\,000\,000 - 250000t + 800\,000t - 5000t^2 \\ &= -5000t^2 + 550\,000t + 40\,000\,000 \end{aligned}$$

Determiniamo il massimo di questa funzione con il metodo delle derivate successive:

$R'(t) = -10000t + 550\,000$. Si ha $R'(t) = 0$ per t=55 .
$R''(t) = -10\,000$ e $R''(55) = -10\,000 < 0$,

quindi il punto t=55 è di massimo e il massimo corrispondente è $R(55)$ = 55.125.000.



Applicazione (ricavo massimo)

Una casa cinematografica deve stabilire il prezzo del DVD dal titolo "Il mucchio selvaggio", in versione restaurata. Gli esperti di marketing ritengono che a un prezzo p sarà possibile vendere $q = 200\,000 - 10\,000p$ *copie del DVD. Quale sarà il prezzo che garantisce un ricavo massimo? Qual è il ricavo massimo?*

<u>Soluzione</u>

La funzione ricavo è :

$$R(p) = p(200\,000 - 10\,000p) = 200\,000p - 10\,000p^2$$

$$R'(p) = 200\,000 - 20\,000p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 10$$

$$R''(p) = -20\,000 < 0 \quad \forall\, p \in \ Dom\, R(p)$$

pertanto, $p = 10$ è un massimo, anzi è un massimo assoluto (il grafico di $R(p)$ è una parabola). Il ricavo massimo è $R(10) = 1\,000\,000$.

Le derivate di ordine successivo al primo permettono di ottenere una approssimazione migliore della funzione $f(x)$ rispetto a quella determinata dalla retta tangente (che utilizza la sola derivata prima).

Formula di Taylor

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in un punto $x_0 \in A$. Per ogni punto $x_0 + h \in A$, in un intorno di x_0, vale il seguente sviluppo:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

per $h \to 0$.

Oppure, ponendo $x = x_0 + h$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Il membro a destra del segno di uguaglianza si chiama **polinomio di Taylor.** L'approssimazione di $f(x)$ con la retta tangente è un caso particolare di formula di Taylor ottenuta ponendo $n = 1$. Dato un incremento h (positivo o negativo), l'approssimazione di $f(x)$ con un polinomio di grado $n \geq 2$ risulta migliore dell'approssimazione ottenuta con la retta tangente. In generale, fissato un incremento h, maggiore è n, migliore è l'approssimazione (e minore quindi l'errore commesso sostituendo il polinomio di Taylor alla funzione $f(x)$). Anche per valori non piccoli di h, l'errore commesso dal polinomio di Taylor risulta trascurabile se n è sufficientemente grande.

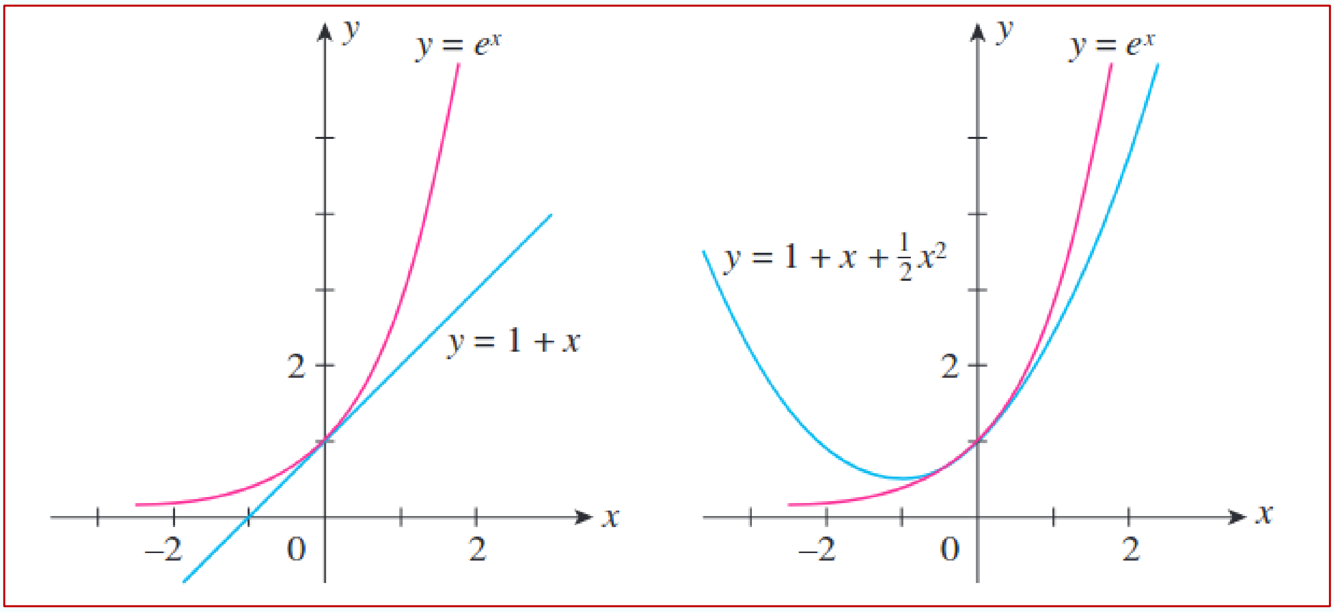
Se $n = 0$, l'approssimazione di $f(x)$ è ottenuta con una retta parallela all'asse delle ascisse (grafico del polinomio di grado zero $y = f(x_0)$)

Se $n = 1$, l'approssimazione di $f(x)$ è ottenuta con una retta
(grafico del polinomio di primo grado $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

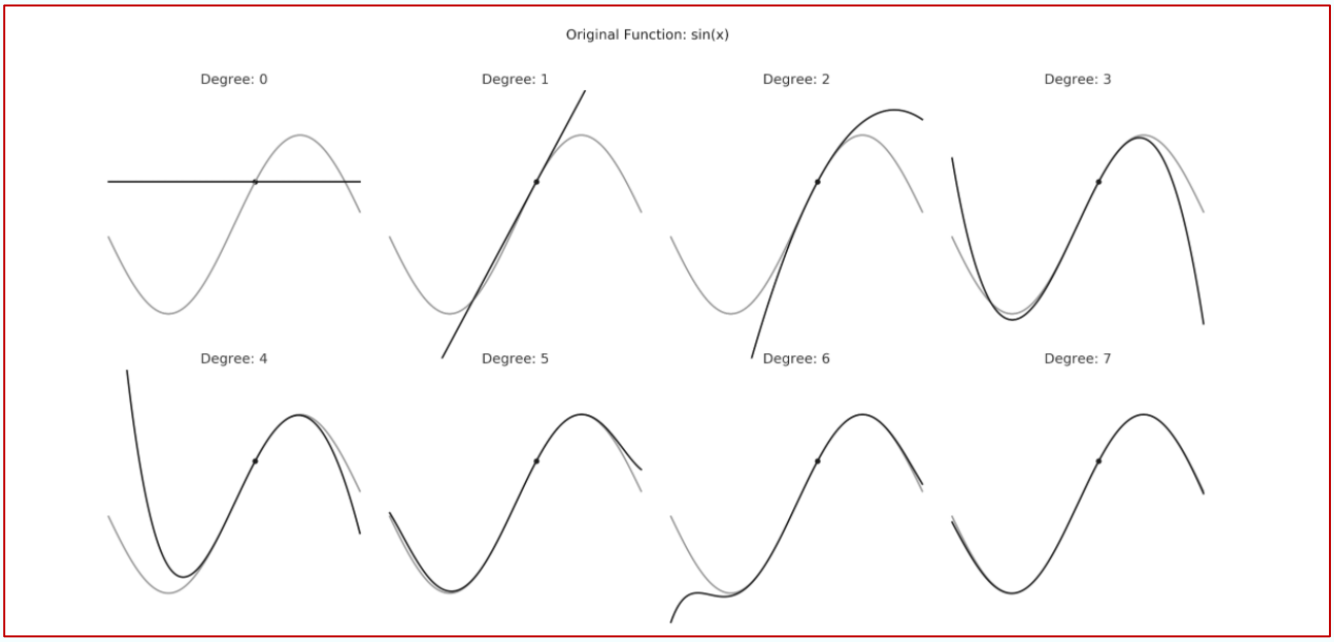
Se $n = 2$, l'approssimazione di $f(x)$ è ottenuta con una parabola
(grafico del polinomio di secondo grado $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$).

Se $n = 3$, l'approssimazione di $f(x)$ è ottenuta con una cubica
(grafico del polinomio di terzo grado $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$).

E così via.



y
y = e^x
y = 1 + x
2
−2
0
2
x
y
y = e^x
y = 1 + x + ½x²
2
−2
0
2
x



Original Function: sin(x)
Degree: 0
Degree: 1
Degree: 2
Degree: 3
Degree: 4
Degree: 5
Degree: 6
Degree: 7

Funzioni convesse e concave

Formalizziamo una nozione già incontrata quando si è studiata la parabola. È la nozione di funzione convessa (o concava verso l'alto) e di funzione concava (o concava verso il basso). Questa nozione è molto utile per studiare il comportamento di una funzione.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f(x)$ è in $[a,b]$

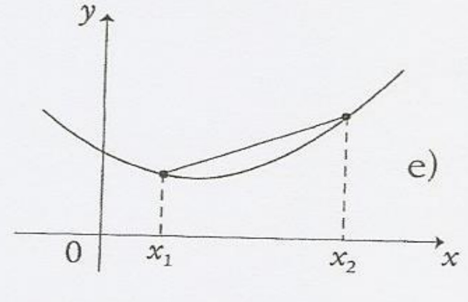
- **convessa** se $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

  per ogni $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ e per ogni $x \in (x_1,x_2)$

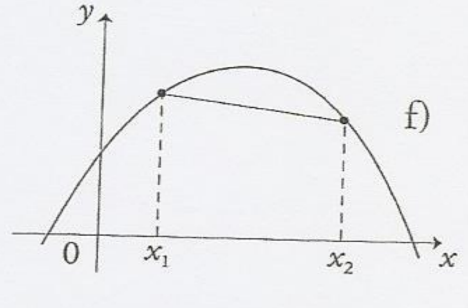
- **concava** se $f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

  per ogni $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ e per ogni $x \in (x_1,x_2)$

Una funzione è dunque convessa (concava) in $[a,b]$ se il segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f.



Una funzione convessa.



Una funzione concava.

Se, nella relazione summenzionata, vale la disuguaglianza stretta, < o >, allora si parla di funzione strettamente convessa e strettamente concava rispettivamente.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f(x)$ è in $[a, b]$

- strettamente convessa se $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

  per ogni x_1, $x_2 \in [a, b]$ e per ogni $x \in (x_1, x_2)$

- strettamente concava se $f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

  per ogni x_1, $x_2 \in [a, b]$ e per ogni $x \in (x_1, x_2)$

Una funzione è dunque strettamente convessa (concava) in $[a, b]$ se il segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si mantiene al di sopra (al di sotto) del grafico di f (fatta eccezione per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, che giacciono sia sul segmento sia sul grafico di f).

Esempi

- La funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$.
- La funzione $f(x) = -x^2$ è strettamente concava in $\mathbb{R}$.
- La funzione $f(x) = x^3$ è strettamente convessa in $(0, +\infty)$, è strettamente concava in $(-\infty, 0)$, mentre non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$.
- La funzione $f(x) = 1/x$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}^+$, è strettamente concava in $\mathbb{R}^-$.
- La funzione $f(x) = x$ è sia convessa che concava in tutto $\mathbb{R}$.

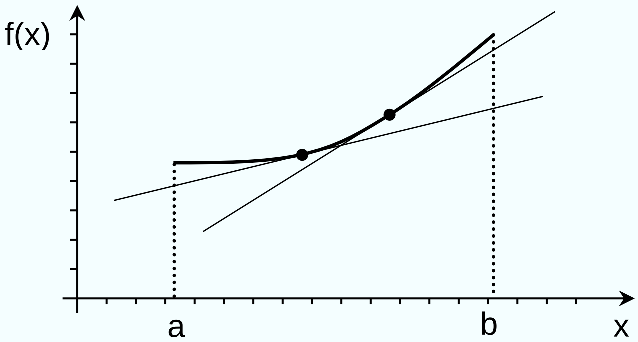
Tutte le funzioni lineari affini sono sia convesse sia concave.

DEFINIZIONE. Sia $f(x)$ una funzione definita in [a, b] e sia $x_0 \in$ (a, b). Si dice che la funzione ha in x_0 un **punto di flesso** se è convessa per $x < x_0$ e concava per $x > x_0$, o viceversa.

CONVESSITÀ E CONCAVITÀ DI FUNZIONI DERIVABILI

TEOREMA. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a, b). Allora, $f(x)$ è in $[a, b]$

- **convessa** se e solo se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in (a, b)$;
- **concava** se e solo se $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in (a, b)$.



Una funzione derivabile in (a, b) è dunque convessa se e solo se, comunque si scelga un punto $x_0 \in (a, b)$, si ha che il grafico di $f(x)$ si mantiene in tutto (a, b) sopra (o sul) grafico della sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. (Analogamente per una funzione concava.)

OSSERVAZIONE - Se $f(x)$ è convessa in [a, b], al crescere di x "*cresce la pendenza della retta tangente*" nel punto di ascissa x e quindi, supposta la funzione derivabile, la "*derivata della pendenza deve essere positiva*", ossia deve essere $f''(x) \geq 0$ poiché la pendenza è data da $f'(x)$. Analogamente per le funzioni concave.

L'osservazione precedente giustifica il seguente **criterio di convessità e concavità.**

Sia f una funzione derivabile almeno due volte in (a, b) . Allora in (a, b) si ha che

1. f è convessa $\Leftrightarrow$ f' è crescente $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f'$ è strettamente crescente $\Leftrightarrow f$ è strettamente convessa
3. f è concava $\Leftrightarrow$ f' è decrescente $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
4. $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f'$ è strettamente decrescente $\Leftrightarrow f$ è strettamente concava.

NOTA. Se f(x) è definita in [a, b] e in (a, b) è derivabile almeno due volte, allora il criterio afferma che sono equivalenti le seguenti condizioni a), b), c) e, analogamente, sono equivalenti le seguenti condizioni d), e), f):

a) $f(x)$ è convessa in (a, b) ; b) $f'(x)$ è crescente in (a, b) ; c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.	d) $f(x)$ è concava in (a, b) ; e) $f'(x)$ è decrescente in (a, b) ; f) $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Attenzione: i punti b) ed e) **non** significano $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ rispettivamente, ma solo che $f'(x)$ è una funzione crescente (punto b)) e $f'(x)$ è una funzione decrescente (punto e)).

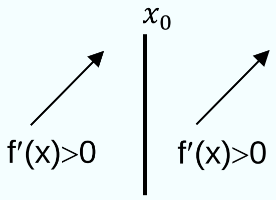
Per cercare i punti di flesso di una funzione due volte derivabile, si studia il segno di $f''(x)$ (studiando la disequazione $f''(x) > 0$) al fine di verificare se ci sono punti x_0 in corrispondenza dei quali il segno cambia (ossia cambia la concavità). Se la concavità cambia allora x_0 è un punto di flesso.

NOTA - E' possibile che in un punto di flesso la funzione non sia derivabile. Ad esempio, $f(x) = |x^2 - 4|$ ha un punto di flesso sia in $x = -2$ sia in $x = 2$, ma in questi punti la funzione non è derivabile.

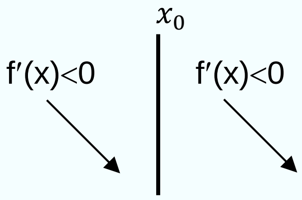
Natura di un punto di flesso x_0

Orizzontale	**Verticale**	**Obliquo**
$f'(x_0) = 0$	**in x_0 tangente con pendenza $\pm\infty$**	$f'(x) \neq 0$

<u>OSSERVAZIONE</u>.
Sappiamo che $f\,'(x_0) = 0$ è solo condizione necessaria perché in x_0 vi sia un massimo o un minimo. Infatti, se $f\,'(x_0) = 0$ e x_0 non è né massimo né minimo, allora x_0 è un flesso perché significa che si verifica una delle due situazioni rappresentate nelle seguenti figure :



p.to flesso orizzontale



p.to flesso orizzontale

Studio di funzione

Studiare una funzione vuole dire determinare

(i) dominio
(ii) intersezioni con gli assi
(iii) positività/negatività di f
(iv) intervalli di crescenza e decrescenza
(v) massimi e i minimi, sup f e inf f
(vi) intervalli di concavità e convessità
(vii) punti di flesso
(viii) asintoti (verticali, orizzontali, obliqui)
e, eventualmente,
(ix) rappresentarne il grafico su un piano cartesiano.

Esercizio 1

Considerata la funzione $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$, *determinare il dominio, massimi e minimi(relativi e assoluti), intervalli di crescenza e decrescenza, concavità e convessità, flessi, eventuali asintoti.*

Soluzione

Dominio: Deve essere $x^2 - 5x + 4 > 0 \implies$ poiché $x^2 - 5x + 4 = 0$ per $x = 1$ e $x = 4$, si ha $\text{Dom}\, f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi: Se $x = 0$, $f(0) = \ln 4$, quindi la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, \ln 4)$. Inoltre, $y = 0$ se $x^2 - 5x + 4 = 1$ ossia se $x^2 - 5x + 3 = 0$, che è soddisfatta per $x = 0.6972$ e per $x = 4.3028$. Quindi la funzione interseca l'asse x nei punti $(0.6972,0)$ e $(4.3028,0)$.

Positività/negatività di f: $\ln(x^2 - 5x + 4) > 0$ se $x^2 - 5x + 4 > 1$ cioè se $x^2 - 5x + 3 > 0$, che è verificata per $x < 0.6972$ e per $x > 4.3028$. Pertanto, il grafico della funzione giace al di sopra dell'asse x nell'intervallo $(-\infty, 0.6972)$ e nell'intervallo $(0, 4.3028)$, giace al di sotto dell'asse x nell'intervallo $(-0.6972, 4.3028)$.

Massimi e minimi: Cerchiamo eventuali punti stazionari ponendo $f\,'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4} = 0.$

Risulta $f'(x) = 0$ per $x = \frac{5}{2}$ ma questo valore non appartiene al dominio e pertanto, non essendoci dei punti stazionari, non possono esserci massimi o minimi interni.

Crescenza e decrescenza: $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4} > 0$ per $x > \frac{5}{2}$. Pertanto, la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(4, +\infty)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 1)$.

Concavità, convessità, flessi: Occorre studiare il segno di $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{2(x^2-5x+4)-(2x-5)^2}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-2x^2+10x-17}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-136}}{4} \quad \notin \mathbb{R}$$

Pertanto, poiché il polinomio $(-2x^2+10x-17)$ è graficamente rappresentato da una parabola concava senza intersezioni con l'asse delle ascisse, si ha $f''(x) < 0 \quad \forall\, x$, ossia la funzione è separatamente concava (in senso stretto) in $(-\infty,1)$ e in $(4,+\infty)$.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(x^2-5x+4) = \ln \lim_{x\to 1^-} (x^2-5x+4) = \ln 0^+ = -\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \ln(x^2-5x+4) = \ln \lim_{x\to 4^+} (x^2-5x+4) = \ln 0^+ = -\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \text{ è asintoto verticale}$$

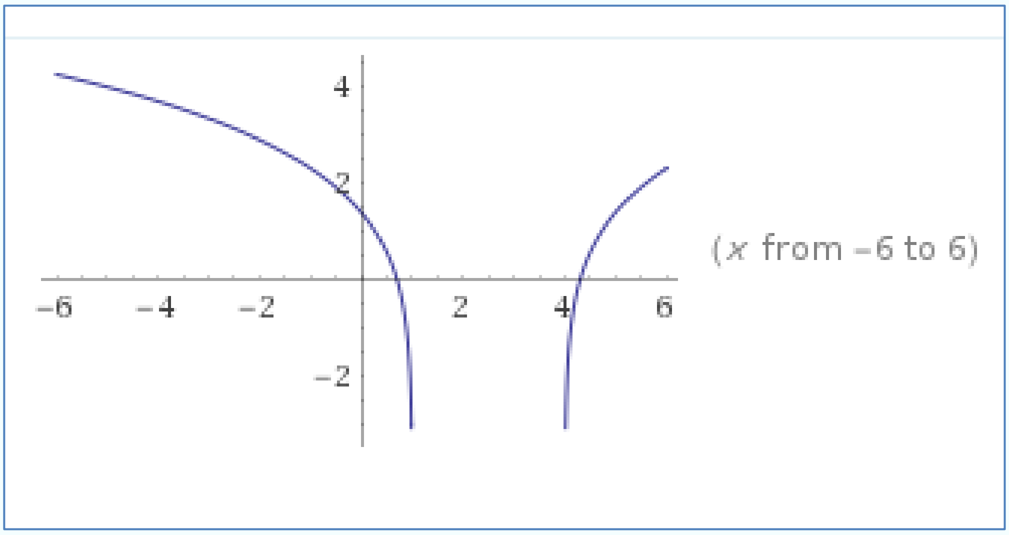
Pertanto, $\inf f = -\infty$.

Asintoti orizzontali: Nessuno perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-5x+4) = \ln \lim_{x\to\pm\infty} (x^2-5x+4) = \ln \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

Pertanto, $\sup f = +\infty$.

Asintoti obliqui: nessuno, perché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-5x+4)}{x} = 0$.



Esercizio 2

Determinare il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi, eventuali asintoti, concavità e convessità nonché i flessi della seguente funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

Soluzione

Dominio: il dominio di f è Dom $f = \mathbb{R}$.

Massimi e minimi: la derivata prima è $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 1)e^x = e^x(2x + x^2 + 1)$, che risulta positiva per $x \neq -1$ e nulla per $x = -1$. Pertanto, la funzione è crescente su tutto il dominio. Non esistono massimi né minimi.

Concavità, convessità, flessi: la derivata seconda è $f''(x) = e^x(2x + x^2 + 1) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 3)$. La funzione f è strettamente convessa se e solo se $f''(x) > 0$, cioè se e solo se $x^2 + 4x + 3 > 0$. Le radici del polinomio sono $x = -1$ e $x = -3$ e il polinomio è positivo per valori esterni alle radici, quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -3$ oppure $x > -1$. La funzione è allora strettamente convessa in $(-\infty, -3)$ e in $(-1, +\infty)$ e strettamente concava in $(-3, -1)$. I punti $x = -1$ e $x = -3$ sono punti di flesso.

Asintoti verticali: non esistono asintoti verticali perché non esistono punti di discontinuità o punti in cui la funzione non è definita.

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} = +\infty$ e, ponendo $t = -x$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-t)^2+1}{e^t} = 0$$

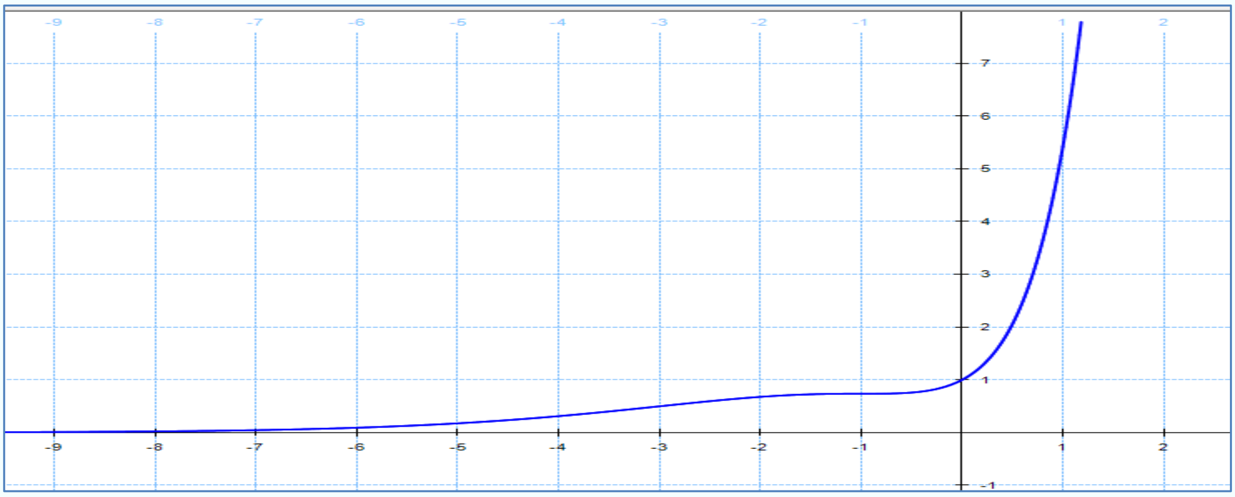
perché e^t è un infinito di ordine superiore a qualsiasi polinomio.

Pertanto, $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro.

Inoltre, $\sup f = +\infty, \inf f = 0$.

Non esiste asintoto orizzontale destro perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Asintoti obliqui: nessun asintoto obliquo sinistro perché esiste un asintoto orizzontale sinistro; nessun asintoto obliquo destro perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ e non esiste alcun asintoto obliquo sinistro perché, come appena visto, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (cioè, esiste un asintoto orizzontale sinistro).



Esercizio 3

Determinare l'intervallo in cui è decrescente la funzione definita da $f(x) = \ln(2x^4 + x^2 + 7)$.

Soluzione La funzione è decrescente dove risulta $f'(x) \leq 0$. Poiché $f'(x) = \frac{8x^3+2x}{2x^4+x^2+7}$, deve essere $\frac{8x^3+2x}{2x^4+x^2+7} \leq 0$ e quindi la funzione è decrescente in $(-\infty, 0)$.

Esercizio 4

Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la funzione* $f(x) = x^2 - 2kx + 5$ *è strettamente crescente nel punto di ascissa* $x = 4$.

Soluzione Deve essere $f'(4) > 0$ e poiché $f'(x) = 2x - 2k$ e $f'(4) = 8 - 2k$ si deve porre $8 - 2k > 0$ da cui $k < 4$.

Esercizio 5

Dire per quale valore di x *la funzione* $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3}$ *ha un massimo nell'intervallo* $[0{,}01; 50]$.

Soluzione Occorre studiare la derivata prima $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$; essa è sempre negativa e quindi la funzione è sempre strettamente decrescente. Da ciò segue che nell'intervallo chiuso $[0{,}01; 50]$ la funzione avrà massimo in $x = 0{,}01$ e tale massimo vale $f(0{,}01) = 1.000.001$.

Esercizio 6

Determinare i punti di flesso e l'equazione della relativa retta tangente, della funzione

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

Soluzione Studiamo la derivata seconda $f''(x) = 6x$. Risulta $f''(x) = 0$ per $x = 0$; $f''(x) < 0$ per $x < 0$; $f''(x) > 0$ per $x > 0$. In $x = 0$ si ha quindi un punto di flesso. L'equazione della retta tangente in x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ e pertanto in $x = 0$, essendo $f(0) = 1, f'(0) = -2$, l'equazione della retta tangente è

$$y - 1 = -2(x - 0), \qquad y = -2x + 1$$

ESERCIZI da SVOLGERE

1. *Si consideri la funzione* $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to R$ *definita da* $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. *Dal segno della derivata che cosa si può dedurre relativamente all'andamento della funzione?*

2. *Trovare per quali valori di* x *le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti*:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = ln \ (x^2 - 2x)$ d) $f(x) = e^{x^2+1}$

3. *Determinare i valori del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la funzione* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = kx^2 - 3x + 1$ *è decrescente nel punto di ascissa* $x = 3$.

4. *Determinare i valori del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la funzione* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = \frac{2x^3+kx}{x^2+1}$ *è crescente nel punto di ascissa* $x = 0$.

5. *Determinare le ascisse dei punti di massimo relativo, di minimo relativo e di flesso delle seguenti funzioni considerate nel rispettivo dominio*:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 27x^2 + 108x + 4$

c) $f(x) = \frac{1+2x-x^2}{1+x^2}$ d) $f(x) = \frac{x+4}{x^2+6x+5}$

e) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-3}$

g) $f(x) = e^{x^2-x}$ h) $f(x) = \frac{ln \ x}{x}$

6. *Determinare l'ascissa del massimo assoluto e del minimo assoluto delle seguenti funzioni relativamente all'intervallo scritto a lato* :

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ $[-2, 3]$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$ $[-5, -3]$

c) $f(x) = e^{x^2-2x}$ $[0, 4]$ d) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $[1, 2]$

7. *Delle seguenti funzioni studiare la concavità, la convessità e determinare gli eventuali punti di flesso*:

a) $f(x) = (x^2 - 1)\ e^x$ b) $f(x) = x^2\ \ ln\, x$

c) $f(x) = ln\ \ x + 2x^2$ d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$

8. *Determinare i punti di flesso delle seguenti funzioni e l'equazione della tangente in ciascuno di essi*:

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ b) $f(x) = 2x\ e^{-2x}$

9. *Delle seguenti funzioni studiare dominio, crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi, concavità, convessità, asintoti e tracciare il grafico qualitativo*:

1.	$y = 3x^3 - 2x^2$.	**11.**	$y = \frac{x^4 - 4}{x^3}$.
2.	$y = 4x^3 + 2x^2$.	**12.**	$y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$.
3.	$y = x^3 + 3x$.	**13.**	$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$.
4.	$y = (x+1)(2x-3)(3-x)$.	**14.**	$y = \sqrt{x+3}$.
5.	$y = 3 - \frac{1}{1-x}$.	**15.**	$y = \sqrt{4 - x^2}$.
6.	$y = \frac{4x-3}{2x+1}$.	**16.**	$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
7.	$y = \frac{1-x}{2x-3}$.	**17.**	$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
8.	$y = \frac{2x-1}{x-3}$.	**18.**	$y = \sqrt{1 - e^x}$.
9.	$y = \frac{x^2+1}{x-1}$.	**19.**	$y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.
10.	$y = \frac{x^2-4}{x+1}$		

FUNZIONI COSTO MARGINALE E RICAVO MARGINALE

Le funzioni marginali costituiscono un importante esempio di applicazione della matematica all'economia. In questa breve trattazione studieremo la funzione costo marginale e la funzione ricavo marginale.

Funzione Costo Marginale

Il costo marginale è l'incremento di costo che si ha quando si ha una variazione unitaria della quantità prodotta, quindi $C_t(q+1)-C_t(q)$. In economia, la variazione di un'unità è considerata sufficientemente piccola da poter utilizzare la derivata prima della funzione costo come misura del costo marginale: $C_t'(q) \approx C_t(q+1)-C_t(q)$. A rigore, $C_t'(q)$ esprime il tasso di variazione (istantaneo) del costo totale, cioè il rapporto tra la variazione del costo totale e la variazione della quantità prodotta, quando questa è infinitesima.

La funzione costo totale $C_t(q)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ sia derivabile per ogni $q \in \mathbb{R}_0^+$. La sua derivata

$$C_t'(q)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$

è detta **funzione costo marginale**

Esempio

Sia $C_t(q) = 2q^3 - 8q^2 + 6q + 36$; allora la funzione del costo marginale sarà

$$C_t(q) = 6q^2 - 16q + 6$$

Funzione Ricavo Marginale

Come noto, il ricavo totale R_t è dato dal prodotto della quantità q venduta per il prezzo p di vendita. Anche per il ricavo è importante conoscere la variazione del ricavo totale quando si ha una variazione unitaria della quantità prodotta e venduta. Questa variazione si misura tramite la derivata prima del ricavo totale rispetto alla quantità di produzione.

La funzione ricavo totale $R_t(q)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ sia derivabile per ogni $q \in \mathbb{R}_0^+$. La sua derivata

$$R_t'(q)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$

è detta **funzione ricavo marginale**

Applicazione (Costo medio e costo marginale)
Per produrre x *lettori CD il costo (totale) è dato dal seguente modello quadratico:*

$$C(x) = 150000 + 20x - 0.0001x^2$$

Trovate il costo marginale a un livello di produzione di 50000 lettori e utilizzatelo per stimare il costo del 50001-esimo lettore.

<u>Soluzione</u>

$$C'(x) = 0 + 20 - (2 \cdot 0.0001)x = 20 - 0.0002x$$

$$C'(50000) = 20 - 0.0002 \cdot 50000 = 10 \quad \text{euro per lettore}$$

Approssimativamente, 10 euro è il costo del 50001-esimo lettore. D'altra parte si ha

$$C(50000 + h) - C(50000) \approx C'(50000)h \quad \text{per } h \text{ piccolo}$$

Ponendo $h = 1$ si trova

$$C(50001) - C(50000) =$$
$$= 150000 + 20 \cdot 50001 - 0.0001 \cdot (50001)^2 - [150000 + 20 \cdot 50000 - 0.0001 \cdot (50000)^2] = 9.99\,.$$

Dunque, il costo marginale $C'(50000)$ è all'incirca pari al costo del 50001-esimo lettore.

Qual è la relazione tra costo marginale e costo medio?
Il costo totale della produzione di 50000 lettori è

$$C(50000) = 150000 + 20 \cdot 50000 - 0.0001 \cdot (50000)^2 = 900000 \ \text{€}$$

Il costo medio è dunque

$$\bar{C}(50000) = \frac{C(50000)}{50000} = 18 \ \text{€} \quad \text{per lettore}$$

Il costo medio $\bar{C}(50000)$ è il costo unitario di produzione dei primi lettori CD, mentre il costo marginale $C'(50000)$ indica il costo (approssimato) della produzione del ***prossimo*** lettore CD. Secondo il modello dato, i primi 50000 lettori CD costano *in media* 18 euro, ma costa solo 10 euro fabbricare il prossimo lettore.

Unità prodotte x	Costo totale $C(x)$	Costo medio $C(x)/x$	Incremento di costo per un articolo aggiuntivo $C(x+1)$-$C(x)$	Costo marginale $C'(x)$
0	150 000.00		19.9999	20.0000
1	150 019.99	150 019.99	19.9997	19.9998
2	150 039.99	75 019.99	19.9995	19.9996
3	150 059.99	50 019.99	19.9993	19.9994
4	150 079.99	37 519.99	19.9991	19.9992
5	150 099.99	30 019.99	19.9989	19.9990
6	150 119.99	25 019.99	19.9987	19.9988
7	150 139.99	21 448.58		19.9986
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
49 997	899 969.99	18.00048	10.0005	10.0006
49 998	899 979.99	18.00032	10.0003	10.0004
49 999	899 989.99	18.00016	10.0001	10.0002
50 000	900 000.00	18.00000	9.9999	10.0000
50 001	900 009.99	17.99984		9.9998

N.B. $C'(50000) < \bar{C}(50000)$. Allora il costo medio diminuisce. Infatti:

$$\bar{C}(50001) < \bar{C}(50000).$$

Il costo medio può essere calcolato come media di due grandezze:

a) costo medio dei primi 50000 articoli,
b) incremento di costo per il 50001-esimo articolo

$$\bar{C}(50001) = \frac{18 \cdot 50000 + 9.9999 \cdot 1}{50001} = \frac{900000 + 9.9999}{50001} = 17.99984$$

Applicazione (Costo medio, marginale, totale)

La funzione di costo per una fabbrica di pianoforti a coda è tale che $\overline{C}(1000) = 3000$ *euro e*

$$\frac{dC(1000)}{dx} = 2500.$$

Il costo medio $\bar{C}$ *aumenta o diminuisce se l' azienda costruisce un numero leggermente maggiore di pianoforti?*

Soluzione

Diminuisce, perché $2500 < 3000$ (cfr. Tabella).

Pianoforte	1°	2°	3°	…	1000°	1001°
Costo medio per 1000 pianoforti	3000	3000	3000		3000	
Costo per un pianoforte aggiuntivo						2500
Costo totale per 1000 pianoforti		3000*1000 = 3 000 000				
Costo totale (approssimato) per 1001 pianoforti		3 000 000+2500 = 3 002 500				
Costo medio (approssimato) per 1001 pianoforti		3 002 500/1001= 2 999.5				

In generale,

$$C(x\ ) \approx C(x_0) + C'(x_0)h \qquad \text{per } h \to 0$$

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Ponendo $x_0 = 1000 \quad h = 1$,

$$C(1001) \approx C(1000) + C'(1000) \cdot 1 = C(1000) + C'(1000) = 3000000 + 2500 = 3002500$$

$$\bar{C}(1001) = \frac{C(1001)}{1001} = 2999.5$$

N.B Il costo medio approssimato per 1001 pianoforti si ottiene anche come media ponderata di 3000 e 2500:

$$3000 \cdot \frac{1000}{1001} + 2500 \cdot \frac{1}{1001} = 2999.5$$

Applicazione (Costo medio, marginale)

Se il costo medio della produzione di un pianoforte a coda aumenta al crescere del livello di produzione, è più alto il costo marginale o il costo medio?

Soluzione

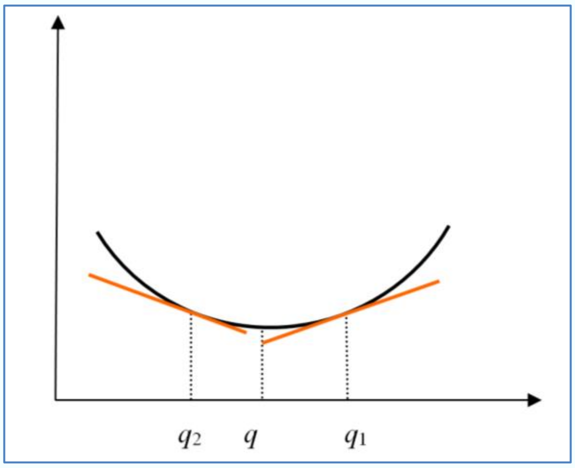
Il costo medio aumenta se e solo se il costo marginale (cioè il costo per unità aggiuntiva) è maggiore del costo medio dei pianoforti precedenti, quindi se e solo se

$$C'(x_0) > \bar{C}(x_0)$$

Se per l'azienda il costo medio marginale è pari a zero al livello di produzione attuale q, positivo per un livello leggermente maggiore e negativo per un livello leggermente inferiore, che cosa consigliate all'azienda il cui obiettivo fosse quello di minimizzare il costo medio?

$$\frac{\mathrm{d}\bar{C}(q)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{C}(q_1)}{\mathrm{d}x} > 0 \;\; \text{per} \;\; q_1 > q \;\; \text{prossimo a} \;\; q, \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{C}(q_2)}{\mathrm{d}x} < 0 \;\; \text{per} \;\; q_2 < q \;\; \text{prossimo a} \;\; q$$



Il costo medio marginale indica approssimativamente l'incremento del costo medio per un' unità in più (o un'unità in meno) di produzione. Se esso è positivo un incremento unitario fa aumentare il costo medio (e un decremento unitario fa diminuire il costo medio). Viceversa, se il costo medio marginale è negativo, un incremento della produzione fa diminuire il costo medio (e un decremento della produzione fa aumentare il costo medio).

Se la produzione passa da q a $q_1 > q$, l'azienda avrà convenienza a ridurre la produzione perché un decremento di produzione corrisponde a un decremento di costo medio (derivata positiva in q_1). Se la produzione passa da q a $q_2 < q$, l'azienda avrà convenienza ad aumentare la produzione perché un incremento di produzione corrisponde a un decremento del costo medio. Quindi il punto di minimo è raggiunto in q.

Applicazione *(Costo medio)*

Il costo della produzione di x litri di latte di soia è

$$C(x) = 10000 + 3x + \frac{x^2}{10000}$$

Attualmente sono prodotti 5000 *litri e la produzione sale di* 100 *litri al giorno. Come varia il costo medio?*

$$\bar{C}(x) = \frac{10000}{x} + 3 + \frac{x}{10000} \qquad ; \qquad x(0) = 5000 \qquad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = 100$$

Soluzione

NOTA - $x(t)$ è sconosciuta

$$\text{costo medio: } t \to x(t) \to \bar{C}(x(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{C}(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{C}(x(t))}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \ ; \ \frac{\mathrm{d}\bar{C}(x(0))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{C}(x(0))}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} \ ; \ \frac{\mathrm{d}\bar{C}(x(t))}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{-10000}{x^2} + \frac{1}{10000}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{C}(5000)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{-10000}{5000^2} + \frac{1}{10000}\right) = -0.0003 \ ; \ \frac{\mathrm{d}\bar{C}(5000)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{C}(5000)}{\mathrm{d}x} 100 = -0.03 \ \text{ euro al giorno.}$$

Applicazione ***(Costo medio minimo)***

La Sacher Film vuole produrre una versione restaurata del capolavoro di Peckinpah "Voglio la testa di Garcia" in formato DVD. La funzione costo è data da

$$C(x) = 150\,000 + 20x + \frac{x^2}{10\,000}$$

dove x è il numero di copie prodotte e vendute. Quante copie devono essere vendute per minimizzare il costo medio? Qual è il costo medio risultante?

Soluzione

La funzione costo medio e la sua derivata sono rispettivamente

$$\bar{C}(x) = \frac{150\,000}{x} + 20 + \frac{x}{10\,000} \quad , \quad \bar{C}\,' = -\frac{150\,000}{x^2} + \frac{1}{10\,000}$$

$$\bar{C}\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{150\,000}{x^2} = \frac{1}{10\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 150\,000 \cdot 10\,000 \quad \Leftrightarrow \quad x \cong \pm 38729$$

$x = -38729$ non è accettabile perché non appartiene a $(0, +\infty)$.

$$\bar{C}\,'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-150000 \cdot 10000 + x^2}{10000x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -150000 \cdot 10000 + x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 38729$$

La funzione è decrescente in $(0, 38\,729]$ e crescente in $[\,38\,729, +\infty)$, pertanto il punto trovato è di minimo e si ha

$$\bar{C}(38729) = \frac{150000}{38729} + 20 + \frac{38729}{10000} = 27.74\,.$$

Si tratta di un minimo assoluto? Sì, perché la funzione decresce in $[\,38\,729, +\infty)$ e cresce in $[\,38\,729, +\infty)$.

Esiste un massimo? No, perché lo avremmo individuato annullando la derivata prima. Inoltre, si noti che la funzione è illimitata superiormente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{150000}{x} + 20 + \frac{x}{10000}\right) = +\infty.$$

ESERCIZI SUPPLEMENTARI

Esercizio 1

Sia $q = q(p) = 200 - 10p$, $p \in (0, 20)$, la funzione che rappresenta la quantità domandata di un bene in funzione del prezzo di vendita:

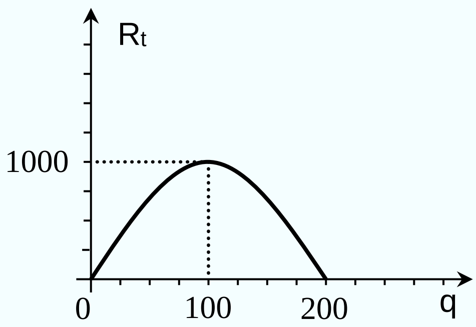
a) *si trovi il prezzo p^* che massimizza il ricavo totale R_t.*

b) *si tracci il grafico di R_t in funzione della quantità venduta q.*

Soluzione

a) Il ricavo R_t in funzione del prezzo di vendita p è dato da $R_t(p) = pq(p) = p(200 - 10p) = 200p - 10p^2$; si deve quindi trovare il massimo di questa funzione nell'intervallo $(0, 20)$. Studiamo la derivata prima:
$R'_t(p) = 200 - 20p$, $R'_t = 0$ per $p = 10$ che è quindi un punto stazionario, inoltre $R_t > 0$ per $0 < p < 10$ e quindi R_t crescente in $(0, 10)$ e decrescente in $(10, 20)$; allora in $p = 10$ si ha il massimo e pertanto $p^* = 10$ è il prezzo che massimizza il ricavo
(Si noti che essendo R_t una parabola concava verso il basso e con vertice interno all'intervallo $(0, 20)$, si può affermare subito che il massimo è nel vertice che ha ascissa $p = 10$.)

b) Per avere il ricavo in funzione di q, si deve prima trovare p in funzione di q. Da $q = 200 - 10p$ segue $p = \frac{200-q}{10}$ con $q \in (0, 200)$. Quindi $R_t(q) = p(q)\ q = \frac{200-q}{10}\ q$, $R_t(q) = 20q - \frac{q^2}{10}$, il suo grafico è



Esercizio 2

Il prezzo di vendita p di una merce varia in funzione della quantità venduta x secondo la legge $p(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$ e il costo di produzione C varia in funzione di x secondo la legge $C(x) = f + vx$. Siano $A = 2000$, $f = 500$ e $v = 100$:

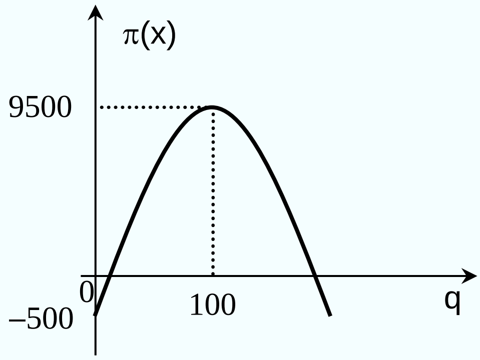
a) *determinare per quale valore di x si ha il massimo profitto $\pi(x) = x\,p(x) - C(x)$.*

b) *tracciare il grafico qualitativo della funzione $\pi(x)$.*

Soluzione

a) $\pi(x) = x\frac{2000}{\sqrt{x}} - 500 - 100x$, $\pi(x) = 2000\sqrt{x} - 100x - 500$. Per trovare il massimo cominciamo con il cercare i punti stazionari : $\pi'(x) = 2000\frac{1}{2\sqrt{x}} - 100$, $\pi'(x) = 0$ per $x = 100$, $\pi(x)$ crescente per $x < 100$ e decrescente per $x > 100$, allora in $x = 100$ si ha il massimo .

b)



Esercizio 3

Produrre x unità di merce costa $C(x) = 1000 + 100x - 50x^2 + 10x^3$. Il prezzo di vendita di unità di merce è 400. Costruire la funzione G(x) che esprime il profitto per l'azienda in funzione di x (quantità prodotta della merce in esame). Calcolare $G'(x)$ e determinare per quali valori di x il profitto risulta massimo.

Soluzione

Il ricavo di x unità di merce è $400x$ perciò la funzione profitto è data da

$$G(x) = 400x - C(x) = 400x - (1000 + 100x - 50x^2 + 10x^3)$$
$$= -1000 + 300x + 50x^2 - 10x^3.$$

Risulta $G'(x) = 300 + 100x - 30x^2$ e $G'(x) = 0$ per $x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{115}$ (il valore $x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{115}$ non è accettabile perché deve essere $x > 0$) ; inoltre $G'(x) > 0$ per $x < \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{115}\right)$ e $G'(x) < 0$ per $x > \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{115}\right)$ pertanto in $x = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{115}\right)$ si ha il massimo profitto.

Esercizio 4

Il costo totale è dato da $C_t = 5000 + 1000q - 500q^2 + \frac{2}{3}q^3$. Si determini :

(a) la funzione del costo marginale;
(b) la funzione del costo totale medio;

Soluzione

(a) Il costo marginale è $C'_t = 1000 - 1000q + 2q^2$.
(b) Il costo totale medio è dato dalla funzione $C_m = \frac{C_t}{q} = \frac{5000}{q} + 1000 - 500q + \frac{2}{3}q^2$.

Esercizio 5

Una curva di domanda di monopolista è data da $p = 100 - 2q$. Si trovi :

a) *la funzione del reddito marginale;*
b) *la relazione tra le pendenze delle curve di reddito medio e marginale;*
c) *a quale prezzo il reddito marginale è zero.*

Soluzione

a) $R_t = p(q) \cdot q = (100 - 2q)q = 100q - 2q^2$, allora il reddito marginale è $R'_t = 100 - 4q$.

b) Il reddito medio è $\frac{R_t}{q} = 100 - 2q$ e quindi la sua pendenza è -2 , mentre la pendenza del reddito marginale è $R_t' = -4$.

c) $R_t' = 0$ quando $100 - 4q = 0$ ossia per $q = 25$ e quindi il reddito marginale è zero per $p = 50$.

Esercizio 6

Una funzione di domanda è data da $p = aq^{\beta}$, $a > 0$. Si determini :

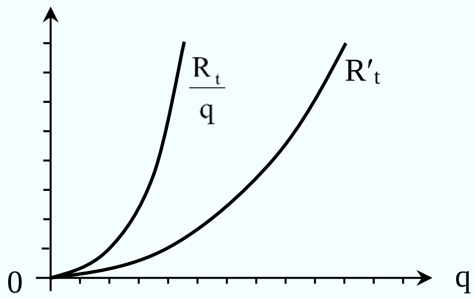
a) *la funzione di reddito marginale;*

b) *il grafico del reddito medio, il grafico del reddito marginale e si interpretino i risultati; quali restrizioni si devono porre al valore di β .*

Soluzione

a) $R_t = aq^{\beta} \cdot q = aq^{\beta+1}$ e perciò il reddito marginale è espresso dalla funzione $R'_t = (\beta + 1) \cdot aq^{\beta}$

b) Il reddito medio è $\frac{R_t}{q} = aq^{\beta}$ e poiché il ricavo marginale deve essere minore del ricavo medio dovrà essere $\beta < 0$. Essendo delle funzioni potenza, i grafici tipo sono rappresentati in figura



Esercizio 7

Una curva di domanda del monopolista è data da $p = 250 - 3q$. Si determini :

a) *la funzione del reddito marginale;*

b) *la relazione tra le pendenze delle rette grafico del reddito medio e del reddito marginale;*

c) *a quale prezzo il reddito marginale è zero.*

Soluzione

a) $R_t = (250 - 3q)\, q = 250q - 3q^2$ e quindi il reddito marginale è $R_t' = 250 - 6q$.

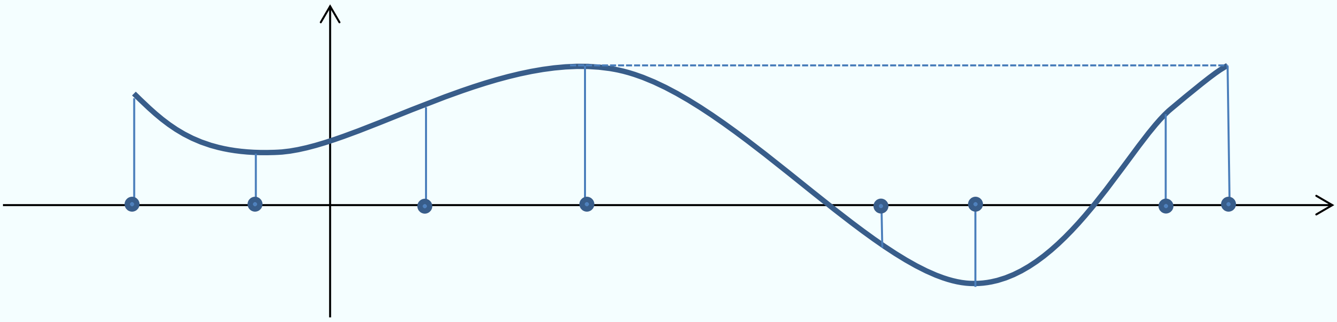
b) Il reddito medio è $\frac{R_t}{q} = 250 - 3q$ e quindi la pendenza di questo è -3 , mentre la pendenza del reddito marginale è -6 , dunque $-6 < -3$.

c) $R_t' = 0$ quando $250 - 6q = 0$ ossia per $q = \frac{125}{3}$; il reddito marginale è pertanto nullo quando $p = 125$.

STUDIO DI UNA FUNZIONE DAL GRAFICO

Esercizio 1

Si consideri la funzione descritta dal seguente grafico e si determinino i punti x di minimo e massimo (relativo e assoluto), flesso.



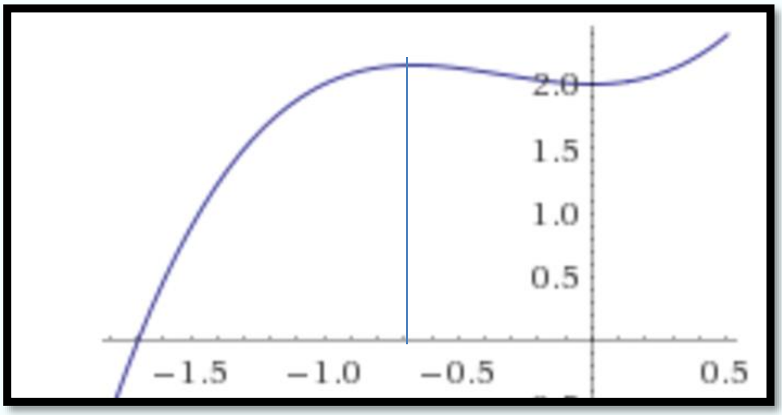
Soluzione

Procedendo da sinistra a destra e considerando i punti segnati, si trova un punto di: massimo relativo, minimo relativo, flesso, massimo assoluto, flesso, minimo assoluto, flesso, massimo assoluto.

Esercizio 2

Dal grafico della derivata $f'(x)$, qui sotto descritta nell'intervallo $(-1.8, 0.5)$, si determinino

1. gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f'(x)$
2. gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$
3. gli intervalli di concavità e convessità di $f(x)$.

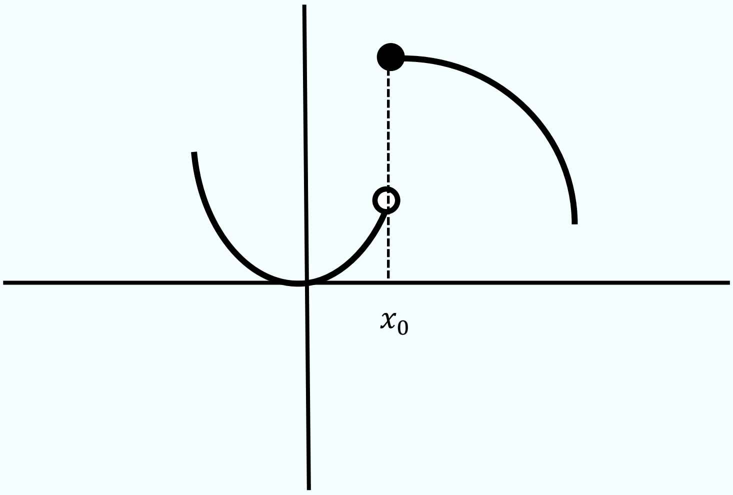


Soluzione

1. La funzione f' è crescente in $(-1.8, -0.7)$ e in $(0, 0.5)$, decrescente in $(-0.5, 0)$.
2. La funzione f è crescente negli intervalli in cui la derivata è positiva e decrescente dove la derivata è negativa. Pertanto, f è decrescente in $(-1.8, -1.7)$ e crescente in $(-1.7, 0.5)$.

3. La funzione f è convessa (concava) negli intervalli in cui $f'' > 0$ (< 0) ossia negli intervalli in cui f' è crescente (decrescente). Pertanto, f è convessa in $(-1.8, -0.7)$ e in $(0, 0.5)$, concava in $(-0.7, 0)$.

Esercizio 3a. Si consideri il seguente grafico:

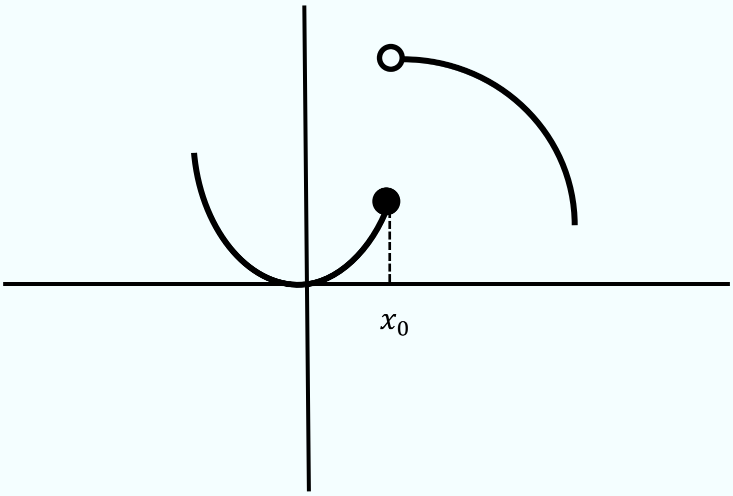


Si dica, per ciascuna delle affermazioni, se è vera o falsa.

1. Il punto x_0 non appartiene al dominio
2. Il punto x_0 non è punto di discontinuità
3. Il punto x_0 è punto di derivabilità
4. Il punto x_0 non è punto di minimo
5. Il punto x_0 non è punto di massimo

Soluzione
1. FALSO
2. FALSO
3. FALSO
4. VERO
5. FALSO

Esercizio 3b. Si consideri il seguente grafico:

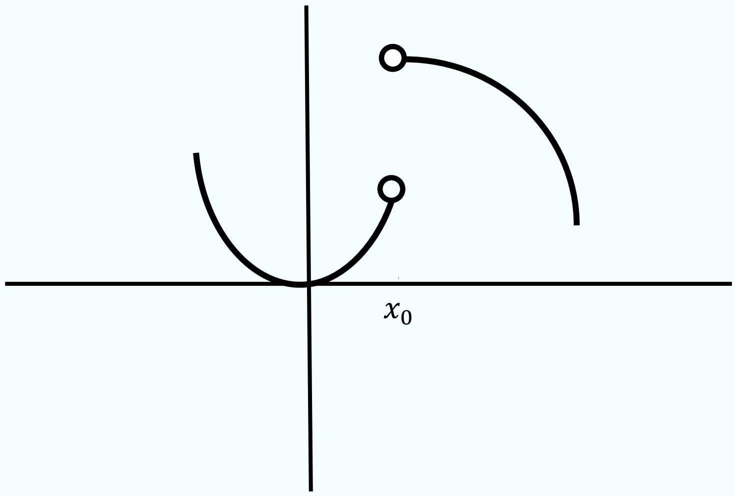


Si dica, per ciascuna affermazione, se è vera o falsa.

1. Il punto x_0 non appartiene al dominio
2. Il punto x_0 non è punto di discontinuità
3. Il punto x_0 è punto di derivabilità
4. Il punto x_0 non è punto di minimo
5. Il punto x_0 non è punto di massimo

<u>Soluzione</u>
1. FALSO
2. FALSO
3. FALSO
4. VERO
5. VERO

Esercizio 3c. Si consideri il seguente grafico:



Si dica, per ciascuna affermazione, se è vera o falsa.

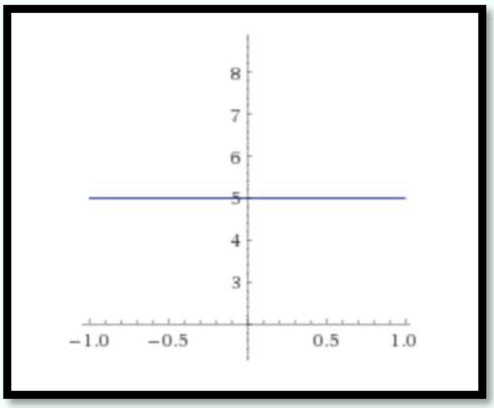
1. Il punto x_0 non appartiene al dominio
2. Il punto x_0 non è punto di discontinuità
3. Il punto x_0 è punto di derivabilità
4. Il punto x_0 non è punto di minimo
5. Il punto x_0 non è punto di massimo

Soluzione

1. VERO
2. VERO
3. FALSO
4. VERO
5. VERO

Esercizio 4

Si consideri il seguente grafico della funzione $g(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Si determini che tipo di funzione è $f(x)$ e se ne determini crescenza e decrescenza.



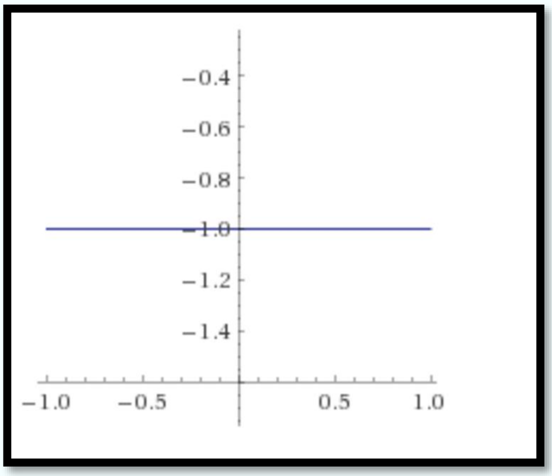
Soluzione

La funzione $y = g(x)$ ha come grafico una retta parallela all'asse delle ascisse. Pertanto, la funzione $f(x)$, di cui $g(x)$ è derivata, è una funzione lineare affine, del tipo $f(x) = 5x + q$.

Essendo la retta $y = g(x)$ posizionata sopra l'asse delle ascisse, la funzione f è crescente, (cioè $f'(x) = 5 > 0$ è la derivata).

Esercizio 5

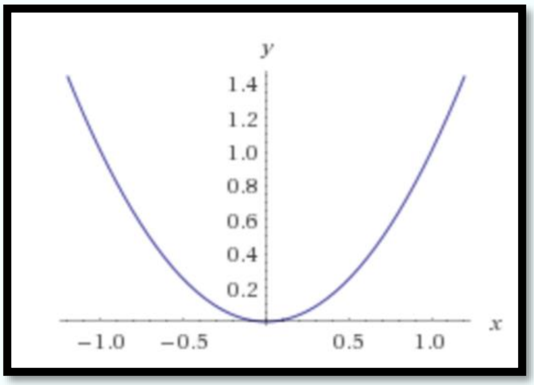
Si consideri il seguente grafico della funzione $g(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Si determini che tipo di funzione è $f(x)$ e se ne determini crescenza e decrescenza



Soluzione

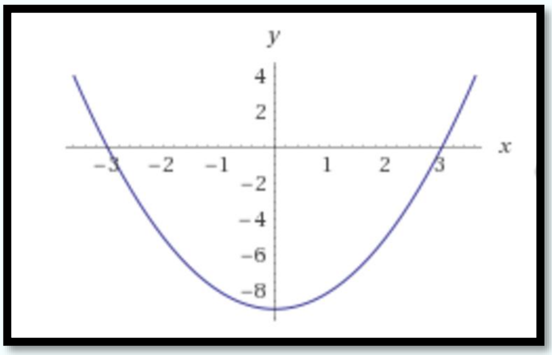
Come per l'Esercizio 4, con la differenza che, essendo la retta $y = g(x)$ posizionata sotto l'asse delle ascisse, la funzione f è decrescente, cioè $f'(x) = -1 < 0$.

Esercizio 6
Si consideri la funzione $y = g(x)$, rappresentata qui sotto, e sia essa la derivata prima di $f(x)$: $g(x) = f'(x)$. Si determini la crescenza/decrescenza di f nell'intervallo $(-1{,}1)$.



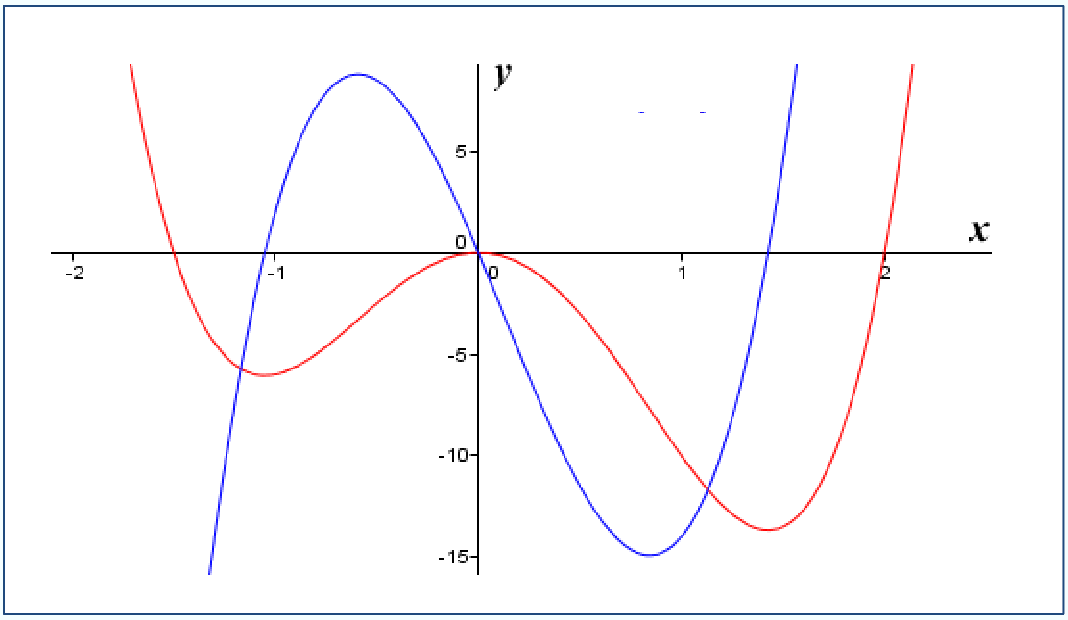
Soluzione
Essendo $g(x) = f'(x) \geq 0$ nell'intervallo descritto, la funzione f è crescente su tutto l'intervallo.

Esercizio
Si consideri la funzione $y = h(x)$, qui di seguito rappresentata, e sia essa la derivata seconda di $f(x)$: $h(x) = f''(x)$. Si determini la concavità/convessità di f nell'intervallo $(-4{,}4)$.



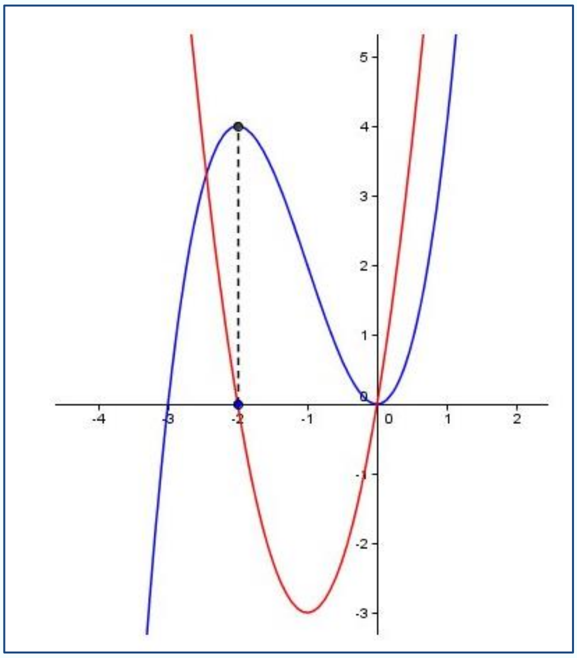
Soluzione
Si ha che $h(x) = f''(x) < 0$ in $(-3{,}3)$ e $h(x) = f''(x) > 0$ in $(-4, -3)$ e in $(3{,}4)$. Pertanto, la funzione f è (strettamente) concava in $(-3, 3)$. È invece (strettamente) convessa nell'intervallo $(-4, -3)$ e, separatamente, nell'intervallo $(3{,}4)$.

Esercizio 8
Quale delle due funzioni è derivata dell'altra?



Soluzione
La funzione descritta dal grafico blu è la derivata della funzione descritta dal grafico rosso. (Perché?)

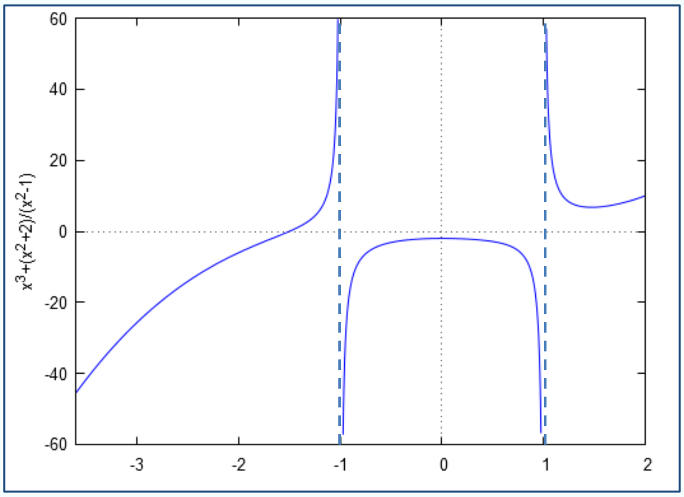
Esercizio 9
Quale delle due funzioni è derivata dell'altra?



Soluzione
La funzione descritta dal grafico rosso è derivata della funzione del grafico blu. (Perché?)

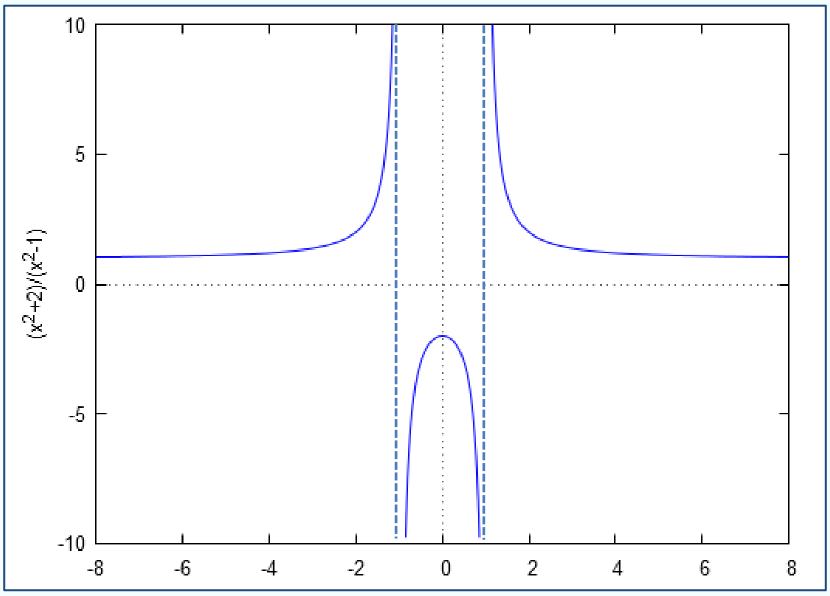
Esercizio 10

Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + \frac{x^2+2}{x^2-1}$ nell'intervallo $[-3.6, 2]$, il cui grafico è qui sotto descritto. Si segnino gli intervalli di crescenza, decrescenza, convessità, concavità, massimi e minimi locali e assoluti, flessi, asintoti verticali e orizzontali della funzione, nonché gli intervalli di positività e negatività della funzione, della derivata prima e della derivata seconda.



Esercizio 11

Si consideri il grafico di $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ e si segnalino eventuali massimi, minimi, estremi inferiori ed estremi superiori, asintoti verticali o orizzontali.



<u>Soluzione</u>

Punto di massimo locale in $x = 0$, massimo locale $f(0) = -2$

$x = -1$ è asintoto verticale (destro e sinistro), $x = 1$ è asintoto verticale (destro e sinistro). Quindi, $\sup f(x) = +\infty$ e $\inf f(x) = -\infty$.

$y = 1$ è asintoto orizzontale (destro e sinistro).