ESERCIZI DI
MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

Fascicolo n. 4

Funzioni di due variabili reali

- *Dominio di funzioni reali di due variabili reali*
- *Derivate parziali prime e gradiente*
- *Differenziale totale*
- *Derivate parziali seconde e determinante hessiano*
- *Massimi e minimi, punti di sella*
- *Massimi e minimi vincolati*
- *Metodo di Lagrange*

Carlo Alberto Magni **Dario Vezzali**

magni@unimore.it dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Dominio di funzioni reali di due variabili reali

Esercizio 14.2, pag. 392 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

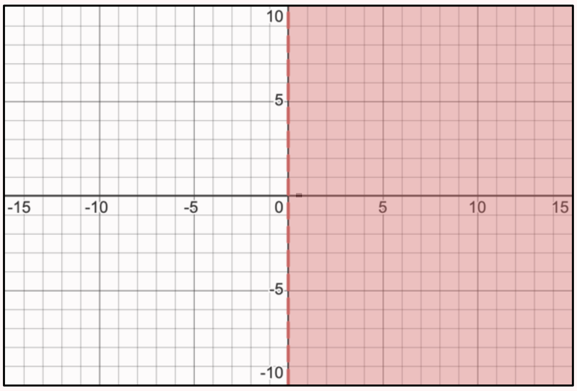
I) $f(x, y) = y^2 + \ln x$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale la cui condizione di esistenza è $x > 0$. Ne consegue che

$$\text{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Rappresentando graficamente il dominio della funzione (con vista dall'alto), otteniamo la seguente regione ombreggiata in rosa, costituita da tutti i punti del piano cartesiano (x, y) in cui la prima coordinata è positiva:



È da notare che l'asse delle ordinate (identificato dalla retta di equazione $x = 0$) non è compreso nel dominio.

III) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale e l'argomento del logaritmo è una funzione razionale fratta. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x, y)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} > 0 \\ x-y \neq 0 \end{cases}$$

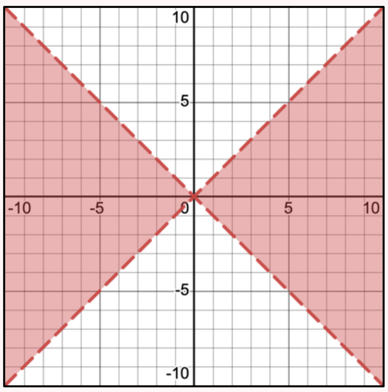
Data la seconda condizione, nella prima possiamo moltiplicare per $(x-y)$ a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza ottenendo la seguente condizione:

$$(x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$$

L'ultima condizione implica $|y| < |x|$, cioè $-|x| < y < |x|$. Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}.$$

Rappresentando graficamente il dominio della funzione (con vista dall'alto), esso è costituito da tutti i punti del piano cartesiano che stanno al di sopra della funzione $y = -|x|$ ma al di sotto della funzione $y = |x|$ (regione ombreggiata in rosa):



È da notare che i punti che giacciono sui grafici delle funzioni $y = |x|$ e $y = -|x|$ (ossia, i punti che giacciono sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante) non sono compresi nel dominio.

V) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, abbiamo una funzione razionale fratta il cui denominatore è un radicale con indice della radice pari: il suo argomento non può allora essere negativo affinché la radice abbia significato in campo reale. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x,y)$ dobbiamo pertanto imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \sqrt{x-y^2} \neq 0 \\ x-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

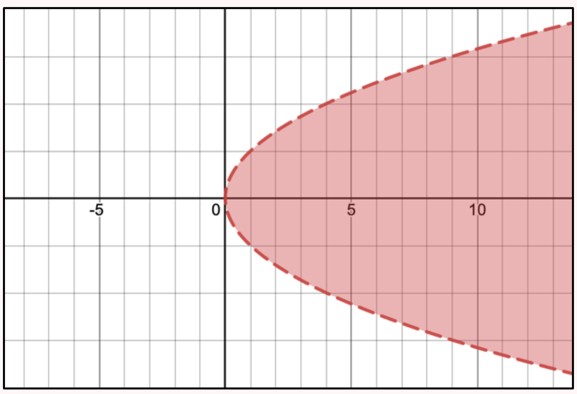
La prima disequazione implica $x - y^2 \neq 0$, quindi il sistema è soddisfatto quando è soddisfatta la seguente condizione:

$$x - y^2 > 0 \Longrightarrow x > y^2$$

L'ultima condizione implica $|y| < \sqrt{x}$, ossia $-\sqrt{x} < y < \sqrt{x}$. Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}\}.$$

Rappresentando graficamente il dominio della funzione (con vista dall'alto), otteniamo la seguente regione ombreggiata in rosa, compresa tra le funzioni $y = -\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x}$:



È da notare che i punti che giacciono sui grafici delle funzioni $y = -\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x}$ non sono compresi nel dominio.

Derivate parziali prime e gradiente

Esercizio 14.12, pag. 393 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni nei punti P indicati a fianco:

I) $f(x, y) = x^3y^2 + 3x^2y + y^3 + x \qquad P(1,1)$

Soluzione.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x in un generico punto (x, y):

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 6xy + 1$$

da cui

$$f_x(1,1) = 3 \cdot (1)^2 \cdot (1)^2 + 6 \cdot (1) \cdot (1) + 1 = 10$$

Successivamente, calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y in un generico punto (x, y):

$$f_y = 2x^3y + 3x^2 + 3y^2$$

da cui

$$f_y(1,1) = 2 \cdot (1)^3 \cdot (1) + 3 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1)^2 = 8.$$

Il gradiente della funzione $f(x, y)$ in $P(1,1)$ vale allora

$$\text{grad } f = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) = (10, 8).$$

II) $f(x,y) = e^{4x^2y} + 3y^4$ $(0,1)$

Soluzione.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x (per semplicità, omettiamo l'indicazione delle variabili x e y):

$$f_x = e^{4x^2y} \cdot (8xy)$$

da cui

$$f_x(0,1) = e^{4\cdot(0)^2\cdot(1)} \cdot \big(8 \cdot (0) \cdot (1)\big) = 0$$

Successivamente, calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y:

$$f_y = e^{4x^2y} \cdot (4x^2) + 12y^3$$

da cui

$$f_y(0,1) = e^{4\cdot(0)^2\cdot(1)} \cdot (4 \cdot (0)^2) + 12 \cdot (1)^3 = 12$$

Il gradiente della funzione $f(x,y)$ in $P(0,1)$ vale allora

$$\text{grad } f = \big(f_x(0,1), f_y(0,1)\big) = (0,12).$$

III) $f(x,y) = xy + \sqrt{x^3 + y^2}$ $P(1,0)$

Soluzione.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x:

$$f_x = y + \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot (3x^2)$$

da cui

$$f_x(1,0) = (0) + \frac{1}{2\sqrt{(1)^3 + (0)^2}} \cdot (3 \cdot (1)^2) = \frac{3}{2} = 1.5$$

Successivamente calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y:

$$f_y = x + \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y^2}} \cdot (2y)$$

da cui

$$f_y(1,0) = (1) + \frac{1}{2\sqrt{(1)^3 + (0)^2}} \cdot \big(2 \cdot (0)\big) = 1$$

Inoltre, il gradiente della funzione $f(x, y)$ in $P(1,0)$ vale

$$\text{grad } f = \big(f_x(1,0), f_y(1,0)\big) = \left(\tfrac{3}{2}, 1\right) = (1.5, 1).$$

IV) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x-y^2}$ $P(0,2)$

<u>Soluzione</u>.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{(2x)\cdot(x-y^2) - (x^2+y)\cdot(1)}{(x-y^2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2xy^2 - x^2 - y}{(x-y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2xy^2 - y}{(x-y^2)^2} \end{aligned}$$

da cui

$$f_x(0,2) = \frac{(0)^2 - 2\cdot(0)\cdot(2)^2 - (2)}{\big((0)-(2)^2\big)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

Successivamente, calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y:

$$f_y = \frac{(1) \cdot (x - y^2) - (x^2 + y) \cdot (-2y)}{(x - y^2)^2}$$
$$= \frac{x - y^2 + 2x^2y + 2y^2}{(x - y^2)^2}$$
$$= \frac{x + 2x^2y + y^2}{(x - y^2)^2}$$

da cui

$$f_y(0,2) = \frac{(0) + 2 \cdot (0)^2 \cdot (2) + (2)^2}{\left((0) - (2)^2\right)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Inoltre, il gradiente della funzione $f(x, y)$ in $P(0,2)$ vale

$$\text{grad } f = \left(f_x(0,2), f_y(0,2)\right) = \left(-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\right) = (-0.125, 0.25).$$

V) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{3x+y^2}}$ $P(1,1)$

<u>Soluzione</u>.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x:

$$f_x = \frac{(1) \cdot \left(\sqrt{3x + y^2}\right) - (x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3x + y^2}}\right) \cdot (3)}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3x + y^2} - \frac{3x}{2\sqrt{3x + y^2}}}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{2\sqrt{3x + y^2} \cdot \sqrt{3x + y^2} - 3x}{2\sqrt{3x + y^2}}}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{2 \cdot (3x + y^2) - 3x}{2\sqrt{3x + y^2}}}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{3x + 2y^2}{2\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^3}$$

da cui

$$f_x(1,1) = \frac{3 \cdot (1) + 2 \cdot (1)^2}{2\left(\sqrt{3 \cdot (1) + (1)^2}\right)^3} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

Successivamente, calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y:

$$f_y = \frac{(0) \cdot \left(\sqrt{3x + y^2}\right) - (x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3x + y^2}}\right) \cdot (2y)}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{2xy}{2\sqrt{3x + y^2}}}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{xy}{\left(\sqrt{3x + y^2}\right)^3}$$

da cui

$$f_y(1,1) = -\frac{(1) \cdot (1)}{\left(\sqrt{3 \cdot (1) + (1)^2}\right)^3} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

Inoltre, il gradiente della funzione $f(x, y)$ in $P(1,1)$ vale

$$\text{grad} f = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) = \left(\tfrac{5}{16}, -\tfrac{1}{8}\right) = (0.3125, -0.125).$$

VI) $f(x, y) = y \ln(1 + 3x^2 + 6y^4)$ $\quad P(2,0)$

Soluzione.

Calcoliamo inizialmente la derivata parziale prima rispetto alla variabile x:

$$f_x = 0 \cdot \ln(1 + 3x^2 + 6y^4) + y \cdot \frac{1}{1 + 3x^2 + 6y^4} \cdot (6x)$$

$$= \frac{6xy}{1 + 3x^2 + 6y^4}$$

da cui

$$f_x(2,0) = \frac{6 \cdot (2) \cdot (0)}{1 + 3 \cdot (2)^2 + 6 \cdot (0)^4} = 0$$

Successivamente calcoliamo la derivata parziale prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned} f_y &= 1 \cdot \ln(1 + 3x^2 + 6y^4) + y \cdot \frac{1}{1 + 3x^2 + 6y^4} \cdot (24y^3) \\ &= \ln(1 + 3x^2 + 6y^4) + \frac{24y^4}{1 + 3x^2 + 6y^4} \end{aligned}$$

da cui

$$f_y(2,0) = \ln(1 + 3 \cdot (2)^2 + 6 \cdot (0)^4) + \frac{24 \cdot (0)^4}{1 + 3 \cdot (2)^2 + 6 \cdot (0)^4} = \ln 13 \approx 2.565$$

Inoltre, il gradiente della funzione $f(x,y)$ in $P(2,0)$ vale

$$\text{grad}\, f = \left(f_x(2,0), f_y(2,0)\right) = (0, \ln 13) \approx (0, 2.565).$$

Differenziale totale

Esercizio 1

Calcolare il valore approssimato della funzione $f(x,y)$ *nel punto* $(1.2, 1.4)$ *sapendo che* $f(1,1) = 6$, $f_x(1,1) = 10$ *e* $f_y(1,1) = 8$.

<u>Soluzione</u>.

Dalla definizione di differenziale totale sappiamo che

$$f(1.2, 1.4) - f(1,1) \approx f_x(1,1) \cdot \overbrace{(1.2 - 1)}^{\Delta x} + f_y(1,1) \cdot \overbrace{(1.4 - 1)}^{\Delta y}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(1.2, 1.4) &\approx f(1,1) + f_x(1,1) \cdot (1.2-1) + f_y(1,1) \cdot (1.4-1) \\ &\approx 6 + 10 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.4 \\ &\approx 11.2 \end{aligned}$$

Inoltre, supponendo che la funzione abbia espressione analitica $f(x,y) = x^3y^2 + 3x^2y + y^3 + x$, si ha $f(1.2, 1.4) = 13.4$.[1] Possiamo allora calcolare l'errore di approssimazione che si commette "sostituendo" la superficie, grafico di f, con il piano tangente al grafico di f nel punto $(1.2, 1.4)$:

$$\mathrm{E} = \frac{13.4 - 11.2}{13.4} \approx 16.4\%$$

Esercizio 2

Calcolare il valore approssimato della funzione $f(x,y)$ *nel punto* $(0.5, 1.1)$ *sapendo che* $f(0,1) = 4$, $f_x(0,1) = 0$ *e* $f_y(0,1) = 12$.

Soluzione.

Dalla definizione di differenziale totale sappiamo che

$$f(0.5, 1.1) - f(0,1) \approx f_x(0,1) \cdot (0.5-0) + f_y(0,1) \cdot (1.1-1)$$

da cui

$$\begin{aligned} f(0.5, 1.1) &\approx f(0,1) + f_x(0,1) \cdot (0.5-0) + f_y(0,1) \cdot (1.1-1) \\ &\approx 4 + 0 \cdot 0.5 + 12 \cdot 0.1 \\ &\approx 5.2 \end{aligned}$$

Inoltre, supponendo che la funzione abbia espressione analitica si ha $f(x,y) = e^{4x^2y} + 3y^4$ e $f(0.5, 1.1) = 7.4$. Possiamo allora calcolare l'errore di approssimazione che si commette

[1] L'uso del differenziale totale è diffuso proprio nelle situazioni in cui la funzione $f(x,y)$ non è in realtà conosciuta (altrimenti, si determina $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0\ y_0)$ e si ottiene la variazione esatta).

"sostituendo" la superficie, grafico di f, con il piano tangente al grafico di f nel punto $(0.5, 1.1)$:

$$\mathrm{E} = \frac{7.4 - 5.2}{7.4} \approx 29.7\%$$

Derivate parziali seconde e determinante hessiano

Esercizio 14.22, pag. 394 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare in $(0, 2)$ *il valore* $H = f_{xx} \cdot f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$ *essendo* $f(x, y) = x + y^2 e^x$.

<u>Soluzione</u>.

Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 1 + y^2 e^x, \quad f_y = 2ye^x$$

Successivamente, calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 e^x & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (y^2 e^x) \cdot (2e^x) - (2ye^x)^2 \\ &= 2y^2 e^{2x} - 4y^2 e^{2x} \\ &= -2y^2 e^{2x} \end{aligned}$$

da cui

$$H(0, 2) = -2 \cdot (2)^2 \cdot e^{2 \cdot (0)} = -8$$

Esercizio 14.23, pag. 394 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare in $(1,1)$ *il valore* $H = f_{xx} \cdot f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$ *essendo* $f(x,y) = x^4y - 3x^2y + 5$.

<u>Soluzione</u>.

Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 4x^3y - 6xy, \quad f_y = x^4 - 3x^2$$

Successivamente, calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2y - 6y & 4x^3 - 6x \\ 4x^3 - 6x & 0 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= (12x^2y - 6y) \cdot (0) - (4x^3 - 6x)^2 \\ &= -(16x^6 - 48x^4 + 36x^2) \\ &= -16x^6 + 48x^4 - 36x^2 \end{aligned}$$

da cui

$$H(1,1) = -16 \cdot (1)^6 + 48 \cdot (1)^4 - 36 \cdot (1)^2 = -4$$

Massimi e minimi, punti di sella

Esercizio 14.33, pag. 394 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

<u>Soluzione</u>.

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (quindi, non sarà necessario escludere nessun punto stazionario dall'analisi). Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Sostituendo $x = y^2$ nella prima condizione otteniamo

$$\begin{cases} 3y^4 - 3y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y(y-1)(y^2+y+1) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Poiché il polinomio $y^2 + y + 1$ non si annulla per nessun valore $y \in \mathbb{R}$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 3y(y-1) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Si trovano le seguenti soluzioni: $P(0,0)$ e $Q(1,1)$. Questi sono i punti stazionari candidati ad essere di massimo, di minimo o punti di sella.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano:

$$H(x, y) = (6x) \cdot (6y) - (-3)^2 = 36xy - 9$$

Ne consegue che

- $H(0,0) = 36 \cdot (0) \cdot (0) - 9 = -9 < 0$, allora P è punto di sella;
- $H(1,1) = 36 \cdot (1) \cdot (1) - 9 = 27 > 0$, $f_{xx} = 6 \cdot (1) = 6 > 0$, allora il punto Q è punto di minimo relativo.

Esercizio 1, pag. 32 (Videolibro - Fascicolo n. 4)

Trovare i massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni a due variabili:

g) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Soluzione.

La funzione $f(x, y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (quindi, non sarà necessario escludere nessun punto stazionario dall'analisi). Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad f_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 4x - 4y \\ -4y^3 = 4x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 4(x - y) \\ -4y^3 = 4(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = x - y \\ -y^3 = x - y \end{cases}$$

Sostituendo $x - y = -y^3$ nella prima condizione otteniamo

$$\begin{cases} x^3 = -y^3 \\ -y^3 = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -y^3 = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ -y^3 = x - y \end{cases}$$

Chiediamoci per quali valori $x^2 - xy + y^2$ si annulla. Se $y = 0$ allora il polinomio diventa $x^2 = 0$ e quindi il punto $P(0,0)$ è una soluzione della prima equazione. Poiché esso è una soluzione anche per la seconda equazione, esso è un punto stazionario. Ora supponiamo invece che $y \neq 0$. Allora, la soluzione di $x^2 - xy + y^2 = 0$ è

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4y^2}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}$$

Poiché $-3y^2 < 0$, il polinomio non si annulla per nessun valore di x. Questo implica che, se $y \neq 0$, la prima equazione si annulla se e solo se $x + y = 0$. In questo caso, il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y^3 = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y^3 = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y^3 = -y - y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y\left(y - \sqrt{2}\right)\left(y + \sqrt{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ \left(y - \sqrt{2}\right)\left(y + \sqrt{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Si trovano le seguenti soluzioni: $Q\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e $R\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Questi sono altri due punti stazionari, candidati ad essere di massimo, di minimo o punti di sella.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano

$$H(x, y) = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 4^2$$

Ne consegue che

- $H(0,0) = (12 \cdot (0)^2 - 4) \cdot (12 \cdot (0)^2 - 4) - 4^2 = (-4) \cdot (-4) - 16 = 0$, allora non si può dire nulla senza ulteriori indagini su P;
- $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \left(12 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4\right) \cdot \left(12 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 4\right) - 4^2 = (20) \cdot (20) - 16 = 384 > 0$, $f_{xx} = 12 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4 = 20 > 0$, allora il punto Q è di minimo relativo;
- $H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \left(12 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 4\right) \cdot \left(12 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4\right) - 4^2 = (20) \cdot (20) - 16 = 384 > 0$, $f_{xx} = 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 4 = 20 > 0$, allora il punto R è di minimo relativo.

h) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

Soluzione.

La funzione $f(x, y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} \cdot (1) \quad f_y = (0) \cdot (x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} \cdot (2y)$$

da cui

$$f_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) \quad f_y = 2ye^{\frac{x}{2}}$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) = 0 \\ 2ye^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$$

Sapendo che $e^{\frac{x}{2}} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x + y^2 + 2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y^2 + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si trova la seguente soluzione: $P(-2, 0)$. Questo è l'unico punto stazionario candidato ad essere di massimo, di minimo o punto di sella.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x + y^2 + 2) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \cdot (1) & \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \cdot (2y) \\ 2ye^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) & 2e^{\frac{x}{2}} \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4) & ye^{\frac{x}{2}} \\ ye^{\frac{x}{2}} & 2e^{\frac{x}{2}} \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \left[\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4)\right] \cdot \left(2e^{\frac{x}{2}}\right) - \left(ye^{\frac{x}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}e^x(x + y^2 + 4) - y^2e^x \\ &= \frac{1}{2}e^x(x - y^2 + 4) \end{aligned}$$

Ne consegue che

$H(-2,0) = \frac{1}{2}e^{(-2)} \cdot [(-2) - (0)^2 + 4] = \frac{1}{2e^2} \cdot (2) = \frac{1}{e^2} \approx 0.135 > 0,$

$f_{xx} = \frac{1}{4}e^{\frac{(-2)}{2}} \cdot [(-2) + (0)^2 + 4] = \frac{1}{4e} \cdot (2) = \frac{1}{2e} \approx 0.184 > 0,$ allora il punto P è di minimo relativo.

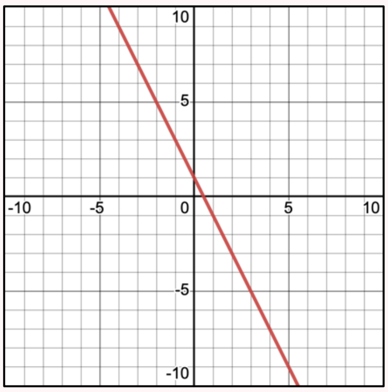
Massimi e minimi vincolati

Esercizio 14.45, pag. 394 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 3x + 4$ *con il vincolo* $2x + y - 1 = 0$.

<u>Soluzione</u>.

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando y in funzione di x, si ha $y = 1 - 2x$. Rappresentando graficamente il vincolo sul piano cartesiano, otteniamo il seguente grafico:

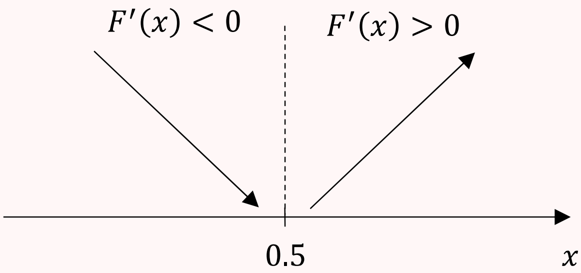


$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(x, 1-2x) &= F(x) \\
&= 3x^2 + (1-2x)^2 - 3x + 4 \\
&= 3x^2 + 1 - 4x + 4x^2 - 3x + 4 \\
&= 7x^2 - 7x + 5
\end{aligned}
$$

Procediamo ora con la ricerca dei massimi e minimi della funzione $F(x)$, che è una funzione reale di una variabile reale. Calcoliamo la derivata prima di $F(x)$:

$$F'(x) = 14x - 7.$$

Poiché $F'(x) = 14x - 7 > 0$ per $x > \frac{1}{2} = 0.5$, si ha la seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse:



Risulta che F è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0.5)$, ed è strettamente crescente nell'intervallo $(0.5, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 0.5$ è allora punto di minimo relativo per F. Il valore corrispondente di y dettato dal vincolo è $y = 1 - 2 \cdot (0.5) = 0$. Pertanto, il punto di minimo vincolato per $f(x,y)$ è $P\left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0.5, 0)$ e il valore della funzione in corrispondenza di tale punto è

$$f(0.5, 0) = 3 \cdot (0.5)^2 + (0)^2 - 3 \cdot (0.5) + 4 = 3.25$$

oppure, equivalentemente,

$$F(0.5) = 7 \cdot (0.5)^2 - 7 \cdot (0.5) + 5 = 3.25.$$

Esercizio 5, prova integrativa MGF/MMF del 08/02/2023

La funzione $f(x,y) = x^2y + xy$, studiata subordinatamente al vincolo $x + y < 0$, presenta

A. *1 punto di minimo*

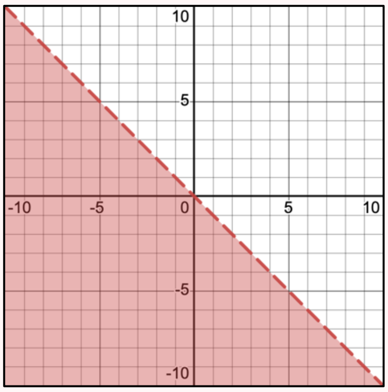
B. *1 punto di massimo*

C. *1 punto di sella*

D. *nessuna delle precedenti*

Soluzione.

La funzione $f(x, y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando y in funzione di x, il vincolo diventa $y < -x$. Rappresentando graficamente il vincolo sul piano cartesiano, otteniamo la seguente regione ombreggiata in rosa:



Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 2xy + y, \quad f_y = x^2 + x$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x(x+1) = 0 \end{cases}$$

Si trovano le seguenti soluzioni: $P(0,0)$ e $Q(-1,0)$. Questi sono i punti stazionari candidati ad essere di massimo, di minimo o punti di sella. Tuttavia, il punto $P(0,0)$ non soddisfa il vincolo $x + y < 0$ e, di conseguenza, non è accettabile. Rimane accettabile soltanto il punto $Q(-1,0)$.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}). La matrice hessiana è

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano:

$$H(x,y) = (2y)\cdot(0) - (2x+1)^2 = -(4x^2+4x+1) = -4x^2 - 4x - 1.$$

Ne consegue che

$H(-1,0) = -4\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) - 1 = -1 < 0$, allora Q è punto di sella.

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	C	…	…

Esercizio 2, pag. 32 (Videolibro - Fascicolo n. 4)

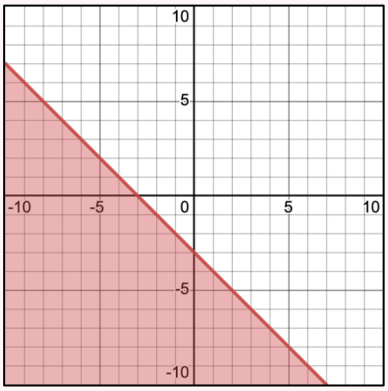
Trovare i massimi e minimi vincolati delle seguenti funzioni a due variabili, col vincolo a fianco indicato:

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \qquad x + y + 3 \leq 0$

<u>Soluzione</u>.

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando y in funzione di x, si ottiene $y \leq -x - 3$.

Rappresentando graficamente il vincolo (con vista dall'alto), otteniamo la seguente regione ombreggiata in rosa:



Il problema si divide in due sottoproblemi:

1) $g(x,y) = x + y + 3 < 0$
2) $g(x,y) = x + y + 3 = 0$

e si cercano separatamente gli eventuali massimi/minimi interni (sottoproblema 1) e di frontiera (sottoproblema 2).

1) $\boldsymbol{g(x,y) = x + y + 3 < 0}$

Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 2x - y + 1, \quad f_y = 2y - x + 1$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Sostituendo $x = 2y + 1$ nella prima condizione otteniamo

$$\begin{cases} 2(2y+1) - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2 - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 3 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Si trova la seguente soluzione: $P(-1, -1)$. Questo è l'unico punto stazionario candidato ad essere di massimo, di minimo o punto di sella. Tuttavia, il punto $P(-1, -1)$ non soddisfa il vincolo $x + y + 3 < 0$ e, di conseguenza, non è accettabile.

2) $\boldsymbol{g(x, y) = x + y + 3 = 0}$

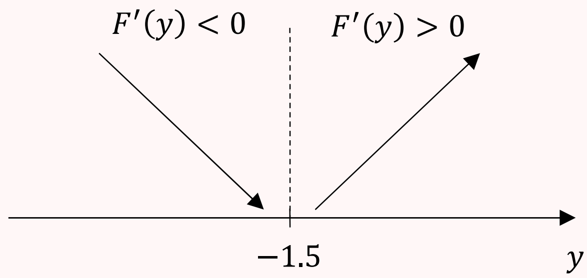
Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando x in funzione di y, si ha $x = -y - 3$, da cui

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(-y - 3, y) = F(y) & \\ &= (-y-3)^2 + y^2 - (-y-3)y + (-y-3) + y - 4 \\ &= y^2 + 6y + 9 + y^2 + y^2 + 3y - y - 3 + y - 4 \\ &= 3y^2 + 9y + 2 \end{aligned}$$

Procediamo ora con la ricerca dei massimi e minimi della funzione $F(x)$ che è una funzione reale di una variabile reale. Calcoliamo la derivata prima di $F(x)$:

$$F'(y) = 6y + 9$$

Poiché $F'(y) = 6y + 9 > 0$ per $y > -\frac{3}{2} = -1.5$, si ha la seguente rappresentazione sull'asse delle ordinate:



Risulta che F è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1.5)$, ed è strettamente crescente nell'intervallo $(-1.5, +\infty)$. Il punto di ordinata $y = -1.5$ è punto di minimo relativo per F. A questo corrisponde $x = -(-1.5) - 3 = -1.5$. Pertanto, il punto di minimo vincolato per $f(x, y)$ è $Q\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (-1.5, -1.5)$ e il valore della funzione in corrispondenza di tale punto è

$$f(-1.5, -1.5) = (-1.5)^2 + (-1.5)^2 - (-1.5) \cdot (-1.5) + (-1.5) + (-1.5) - 4 = -4.75$$

oppure, equivalentemente,

$$F(-1.5) = 3(-1.5)^2 + 9(-1.5) + 2 = -4.75.$$

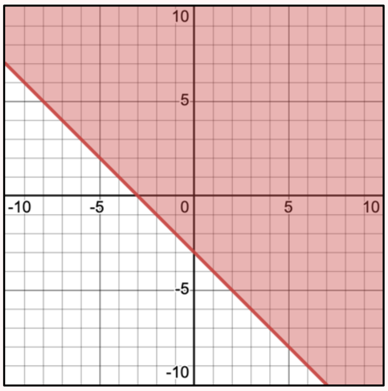
Esercizio 2 (modificato), pag. 32 (Videolibro - Fascicolo n. 4)

Trovare i massimi e minimi vincolati delle seguenti funzioni a due variabili, col vincolo a fianco indicato:

e) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \qquad x + y + 3 \geq 0$

<u>Soluzione</u>.

La funzione $f(x, y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Dal vincolo ricaviamo una delle due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando y in funzione di x, si ottiene $y \geq -3 - x$. Rappresentando graficamente il vincolo (con vista dall'alto), otteniamo la seguente regione ombreggiata in rosa:



Il problema si divide in due sottoproblemi:

1) $g(x, y) = x + y + 3 > 0$
2) $g(x, y) = x + y + 3 = 0$

e si cercano separatamente gli eventuali massimi/minimi interni (sottoproblema 1) e di frontiera (sottoproblema 2).

1) $\boldsymbol{g(x, y) = x + y + 3 > 0}$

Calcoliamo inizialmente le derivate parziali prime rispetto alla x e alla y:

$$f_x = 2x - y + 1, \quad f_y = 2y - x + 1$$

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Sostituendo $x = 2y + 1$ nella prima condizione otteniamo

$$\begin{cases} 2(2y + 1) - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4y + 2 - y + 1 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3y + 3 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Si trova la seguente soluzione: $P(-1,-1)$. Questo è l'unico punto stazionario candidato ad essere di massimo, di minimo o punto di sella. In questo caso, il punto $P(-1,-1)$ soddisfa il vincolo $x + y + 3 > 0$ ed è accettabile.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure (f_{xx} e f_{yy}) e miste (f_{xy} e f_{yx}):

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 2 & f_{xy} = -1 \\ f_{yx} = -1 & f_{yy} = 2 \end{array}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale del determinante hessiano che in questo esercizio è uguale per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x, y) = (2) \cdot (2) - (-1)^2 = 3$$

Ne consegue che

$H(-1,-1) = 3 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$, allora il punto P è di minimo relativo.

Il valore della funzione in corrispondenza di tale punto è $f(-1,-1) = -5$.

2) $\boldsymbol{g(x, y) = x + y + 3 = 0}$

Il sottoproblema 2 coincide esattamente con quello dell'esercizio precedente. Pertanto, esistono due punti di minimo relativo che soddisfano il vincolo $x + y + 3 \geq 0$: $P(-1,-1)$ e $Q(-1.5,-1.5)$.

Metodo di Lagrange

Esercizio 14.50, pag. 395 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x,y) = 8x - y$ *con il vincolo* $4x^2 + y^2 = 6$.

<u>Soluzione</u>.

Costruiamo la funzione lagrangiana:[2]

$$L(\lambda, x, y) = 8x - y + \lambda(4x^2 + y^2 - 6)$$

e calcoliamo le derivate parziali prime rispetto a λ, x e y:

$$L_\lambda = 4x^2 + y^2 - 6, \quad L_x = 8 + 8\lambda x, \quad L_y = 2\lambda y - 1$$

Condizioni del prim'ordine

Determiniamo successivamente le soluzioni (λ, x, y) del sistema

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 \\ L_x = 0 \\ L_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 6 = 0 \\ 8 + 8\lambda x = 0 \\ 2\lambda y - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 6 = 0 \\ x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

Sostituendo $x = -\frac{1}{\lambda}$ e $y = \frac{1}{2\lambda}$ nella prima condizione, otteniamo

[2] In linea di principio, in questo caso sarebbe possibile esplicitare una variabile in funzione dell'altra. Infatti, risolvendo per y, si ottengono due vincoli: $y = \sqrt{6 - 4x^2}$ $y = -\sqrt{6 - 4x^2}$. Il problema di ottimizzazione si sdoppia quindi in due sottoproblemi, ciascuno con un vincolo esplicitabile. Con la funzione lagrangiana, riusciamo ad evitare questa duplicazione.

$$\begin{cases} 4 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 6 = 0 \\ x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

La prima equazione diventa

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 6 = 0$$

da cui

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{24\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$$

cioè

$$\frac{-17 - 24\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = \frac{17}{24} \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{17}{24}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{6}}$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione questi due valori, si trovano le seguenti soluzioni: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{6}}, -2\sqrt{\frac{6}{17}}, \sqrt{\frac{6}{17}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{6}}, 2\sqrt{\frac{6}{17}}, -\sqrt{\frac{6}{17}}\right)$. I punti stazionari candidati ad essere di massimo, di minimo o di sella sono due: $P\left(-2\sqrt{\frac{6}{17}}, \sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx (-1.188, 0.594)$ e $Q\left(2\sqrt{\frac{6}{17}}, -\sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx (1.188, -0.594)$.

Condizioni del second'ordine

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure ($L_{\lambda\lambda}$, L_{xx} e L_{yy}) e miste ($L_{\lambda x}$, $L_{\lambda y}$, $L_{x\lambda}$, L_{xy}, $L_{y\lambda}$ e L_{yx}). La matrice hessiana orlata è

$$\begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale dell'hessiano orlato

$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -128\lambda x^2 - 32\lambda y^2$$

Ne consegue che

- $H\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{6}}, -2\sqrt{\frac{6}{17}}, \sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx H(0.842, -1.188, 0.594) = -128 \cdot (0.842) \cdot (-1.188)^2 - 32 \cdot (0.842) \cdot (0.594)^2 \approx -161.616 < 0$, allora $P\left(-2\sqrt{\frac{6}{17}}, \sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx (-1.188, 0.594)$ è punto di minimo;
- $H\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{6}}, 2\sqrt{\frac{6}{17}}, -\sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx H(-0.842, 1.188, -0.594) = -128 \cdot (-0.842) \cdot (1.188)^2 - 32 \cdot (-0.842) \cdot (-0.594)^2 \approx 161.616 > 0$, allora $Q\left(2\sqrt{\frac{6}{17}}, -\sqrt{\frac{6}{17}}\right) \approx (1.188, -0.594)$ è punto di massimo.

Esercizio 14.51, pag. 395 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x, y) = y - 4x$ *con il vincolo* $6x^2 + y^2 = 4$.

Soluzione.

Costruiamo la funzione lagrangiana:

$$L(\lambda, x, y) = y - 4x + \lambda(6x^2 + y^2 - 4)$$

e calcoliamo le derivate parziali prime rispetto a λ, x e y:

$$L_\lambda = 6x^2 + y^2 - 4 \quad L_x = 12\lambda x - 4 \quad L_y = 2\lambda y + 1$$

Condizioni del prim'ordine

Determiniamo successivamente le soluzioni (λ, x, y) del sistema

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 \\ L_x = 0 \\ L_y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 12\lambda x - 4 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{1}{3\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

Sostituendo $x = \frac{1}{3\lambda}$ e $y = -\frac{1}{2\lambda}$ nella prima condizione otteniamo

$$\begin{cases} 6 \cdot \left(\dfrac{1}{3\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{1}{3\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

La prima equazione diventa

$$\frac{2}{3\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 4 = 0$$

da cui

$$\frac{8}{12\lambda^2} + \frac{3}{12\lambda^2} - \frac{4 \cdot 12\lambda^2}{12\lambda^2} = 0$$

cioè

$$11 - 48\lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = \frac{11}{48} \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{48}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione i valori trovati, si trovano le seguenti soluzioni: $\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, -2\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, 2\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$. I punti stazionari candidati ad essere di massimo, di minimo o di sella sono due: $P\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, -2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx (0.696, -1.044)$ e $Q\left(-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, 2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx (-0.696, 1.044)$.

Condizioni del second'ordine

Calcoliamo le derivate parziali seconde pure ($L_{\lambda\lambda}$, L_{xx} e L_{yy}) e miste ($L_{\lambda x}$, $L_{\lambda y}$, $L_{x\lambda}$, L_{xy}, $L_{y\lambda}$ e L_{yx}):

$$\begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12x & 2y \\ 12x & 12\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Ricaviamo, quindi, l'espressione generale dell'hessiano orlato

$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 12x & 2y \\ 12x & 12\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -288\lambda x^2 - 48\lambda y^2$$

Ne consegue che

- $H\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, -2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx H(0.479, 0.696, -1.044) = -288 \cdot (0.479) \cdot (0.696)^2 - 48 \cdot (0.479) \cdot (-1.044)^2 \approx -91.886 < 0$,

  allora $P\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, -2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx (0.696, -1.044)$ è punto di minimo;

- $H\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, 2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx H(-0.479, -0.696,\ 1.044) = -288 \cdot (-0.479) \cdot (-0.696)^2 - 48 \cdot (-0.479) \cdot (1.044)^2 \approx 91.886 > 0$,

  allora $Q\left(-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}, 2\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx (-0.696,\ 1.044)$ è punto di massimo.