ESERCIZI DI MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

Fascicolo n. 3

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

- *Tasso medio di variazione*
- *Derivabilità*
- *Regole di calcolo delle derivate*
- *Equazione della retta tangente in $P\big(x_0, f(x_0)\big)$, differenziale primo*
- *Utilizzo della derivata nel calcolo dei limiti (teoremi di De l'Hôpital)*
- *Massimi e minimi locali e assoluti, criterio di monotonia*
- *Massimi e minimi nei vari domini*
- *Funzioni convesse e concave*
- *Studio di funzione*

Carlo Alberto Magni **Dario Vezzali**

magni@unimore.it dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Tasso medio di variazione

Esempio, pag. 185 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Consideriamo un'azienda dove lavorano 6 dipendenti che realizzano una produzione giornaliera di 1000 unità di un certo bene. Ora, a parità di altre condizioni, supponiamo che l'aumento della forza lavoro a 10 dipendenti comporti l'innalzamento della produzione a 1412 unità. Calcolare il tasso medio di variazione.

Soluzione.

Sapendo che la produzione è passata da 1000 a 1412 unità quando il numero di dipendenti è passato da 6 a 10 dipendenti, il tasso medio di variazione vale

$$\frac{\Delta\,\text{produzione}}{\Delta\,\text{dipendenti}} = \frac{1412 - 1000}{10 - 6} = \frac{412}{4} = 103.$$

In altre parole, il contributo medio all'aumento della produzione di ciascun dipendente aggiuntivo è pari a 103 unità.

Esercizio.

La legge che esprime il profitto (in migliaia di euro) di un'azienda produttrice di latte d'avena è data dalla funzione $\pi(q) = -0.075q^2 + 15q - 300$, dove q rappresenta la quantità prodotta e venduta (in litri) al giorno. Attualmente, il volume di produzione (e vendita) giornaliero si è assestato sui 55 litri. Calcolare il tasso medio di variazione del profitto se l'azienda decide di aumentare la produzione giornaliera (e, conseguentemente, la vendita) di 15 unità.

Soluzione.

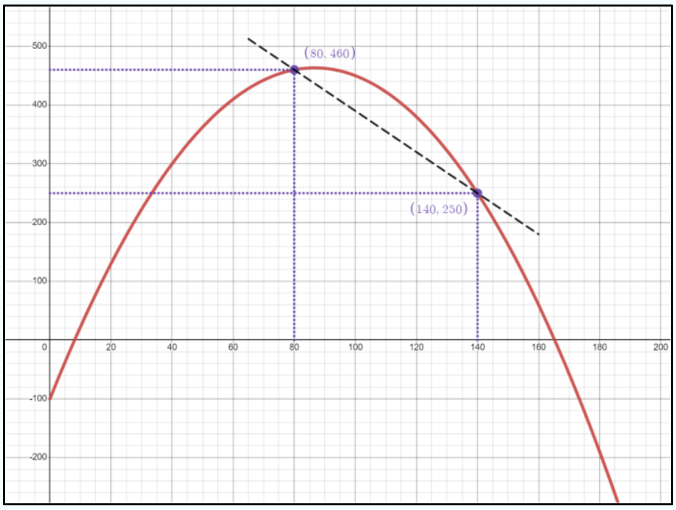
In questo caso, il tasso medio di variazione vale

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta \text{ profitto}}{\Delta \text{ produzione}} &= \frac{\pi(70) - \pi(55)}{70 - 55} \\
&= \frac{(-0.075 \cdot 70^2 + 15 \cdot 70 - 300) - (-0.075 \cdot 55^2 + 15 \cdot 55 - 300)}{15} \\
&= 5.63€
\end{aligned}
$$

In altre parole, il contributo medio all'aumento del profitto dato da ciascuna unità aggiuntiva prodotta (e venduta) è pari a 5630€.

Esercizio.

Il seguente grafico rappresenta il profitto (in migliaia) di un'azienda produttrice di hypercar al variare di unità prodotte (e vendute). Si stimi il tasso medio di variazione $\Delta\pi(q)$ *nell'intervallo* $[80, 140]$.



<u>Soluzione</u>.

Geometricamente, il tasso medio di variazione rappresenta la pendenza della retta che congiunge i punti $(80, 460)$ e $(140, 250)$. Analiticamente, si tratta di calcolare il rapporto incrementale

$$
\frac{\Delta \text{ profitto}}{\Delta \text{ produzione}} = \frac{\pi(140) - \pi(80)}{140 - 80} = \frac{250 - 460}{60} = -3.5€
$$

In altre parole, il profitto cala in media di circa 3500 euro per ogni unità aggiuntiva prodotta (e venduta) nell'intervallo tra 80 e 140 unità.

Derivabilità

Esercizio 3, pag. 27 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$*; si determini per quali valori di* x *essa non è derivabile.*

Soluzione.

Studiando il segno del trinomio di secondo grado $x^2 - 3x + 2$ e applicando la definizione di valore assoluto si ha:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{se } 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

I valori di x candidati ad essere punti di non derivabilità (punti singolari) sono quelli in corrispondenza dei quali la legge della funzione cambia, ovvero $x = 1$ e $x = 2$. Affinché $f(x)$ sia derivabile in $x = 1$ occorre che

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

In particolare,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1} = -1 = f'_-(1)$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 3x - 2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)(x-2)}{x - 1} = +1 = f'_+(1).$$

Le derivate sinistra e destra, $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$, non coincidono, pertanto la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$. Dal momento che in $x = 1$ non esiste la derivata (non esiste il limite del rapporto incrementale), ma esistono la derivata destra e sinistra, in tale punto abbiamo un punto angoloso.

Analogamente, affinché $f(x)$ sia derivabile in $x = 2$ occorre che

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

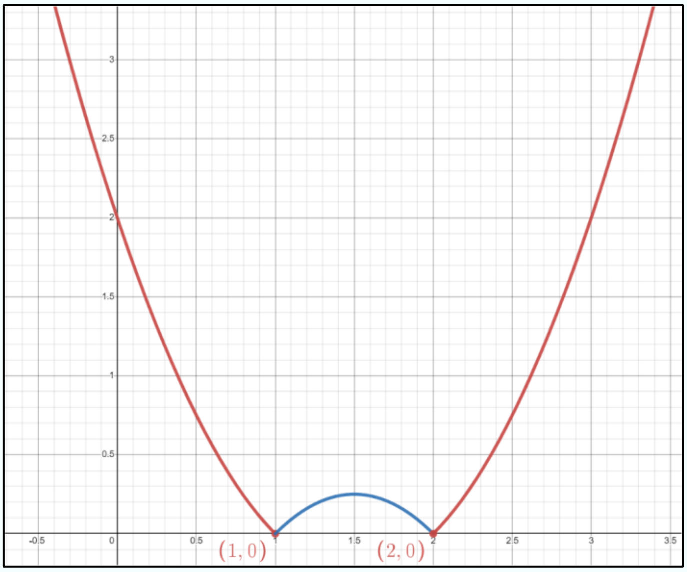
In particolare,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-1)(x-2)}{x - 2} = -1 = f'_-(2)$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 2} = +1 = f'_+(2).$$

Le derivate sinistra e destra, $f'_-(2)$ e $f'_+(2)$, non coincidono, pertanto la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 2$. Dal momento che in $x = 2$ non esiste la derivata (non esiste il limite del rapporto incrementale), ma esistono le derivate destra e sinistra, anche in tale punto abbiamo un punto angoloso. La natura dei punti $x = 1$ e $x = 2$ è evidente anche osservando il grafico della funzione $f(x)$:



Regole di calcolo delle derivate

Esercizio 1, pag. 27 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione:

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

Soluzione.

In questo caso, la regola di derivazione da applicare per il calcolo della derivata prima è la seguente: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Ne consegue che

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

b) $f(x) = x \ln x$

Soluzione.

In questo caso, la regola di derivazione da applicare per il calcolo della derivata prima è la seguente: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Ne consegue che

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

c) $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{2x-3}$

Soluzione.

In questo caso, la regola di derivazione da applicare per il calcolo della derivata prima è la seguente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$. Ne consegue che

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x+1)\cdot(2x-3) - (3x^2+x+1)\cdot(2)}{(2x-3)^2} \\
&= \frac{12x^2 - 18x + 2x - 3 - 6x^2 - 2x - 2}{(2x-3)^2} = \frac{6x^2 - 18x - 5}{(2x-3)^2}
\end{aligned}
$$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$

Soluzione.

In questo caso, la regola di derivazione da applicare per il calcolo della derivata prima è la seguente: $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$, detta anche regola di derivazione a catena. Ne consegue che

$$
f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-1}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}
$$

e) $f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$

Soluzione.

In questo caso, applicando la regola di derivazione a catena, otteniamo

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} \cdot \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{4x\sqrt{x} - 1}{2x^2\sqrt{x} - 2x}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{4x^{\frac{3}{2}} - 1}{2x^{\frac{5}{2}} - 2x}$$

f) $f(x) = e^{2x}$

Soluzione.

In questo caso, applicando la regola di derivazione a catena, otteniamo $f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$.

g) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

Soluzione.

In questo caso, applicando la regola di derivazione a catena, sfruttando l'uguaglianza $\frac{1}{\ln x} = -(\ln x)^{-1}$, otteniamo

$$f'(x) = -(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

h) $f(x) = (2x^2 + 7)^3$

Soluzione.

In questo caso, applicando la regola di derivazione a catena, otteniamo

$$f'(x) = 3(2x^2 + 7)^2 \cdot (4x) = 12x(2x^2 + 7)^2$$

i) $f(x) = 3^{\ln x}$

Soluzione.

In questo caso, applicando la regola di derivazione a catena, otteniamo

$$f'(x) = 3^{\ln x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3^{\ln x} \cdot \ln 3}{x}$$

l) $f(x) = (2x+1)^{x^3}$

Soluzione.

Riscriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = e^{\ln\left((2x+1)^{x^3}\right)}$ e applichiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$f(x) = e^{x^3 \ln(2x+1)}.$$

Successivamente, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^3 \ln(2x+1)} \cdot \left(3x^2 \cdot \ln(2x+1) + x^3 \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2\right) \\ &= (2x+1)^{x^3} \cdot \left(\frac{3x^2 \cdot (2x+1) \cdot \ln(2x+1) + 2x^3}{2x+1}\right) \\ &= (2x+1)^{x^3-1} \cdot x^2 \cdot \left((6x+3) \cdot \ln(2x+1) + 2x\right) \end{aligned}$$

m) $f(x) = x \cdot (\ln x - 1)$

Soluzione.

In questo caso, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$f'(x) = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

n) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Soluzione.

In questo caso, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$f'(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x^2+1}-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$=\frac{2\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 8.6, pag. 197 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

I) $f(x)=x^{\operatorname{sen} x}$

Soluzione.

Riscriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x)=e^{\ln(x^{\operatorname{sen} x})}$$

e applichiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$f(x)=e^{\operatorname{sen} x\ln x}$$

Successivamente, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$f'(x)=e^{\operatorname{sen} x\ln x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{\operatorname{sen} x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

$$=x^{\operatorname{sen} x-1}\cdot(x\cdot\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen} x)$$

II) $f(x) = (2x+1)^{\sqrt{x}}$

Soluzione.

Riscriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = e^{\ln\left((2x+1)^{\sqrt{x}}\right)}$$

e applichiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$f(x) = e^{\sqrt{x}\ln(2x+1)}$$

Successivamente, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{x}\ln(2x+1)} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(2x+1) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2\right) \\ &= (2x+1)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(2x+1) + \frac{2\sqrt{x}}{2x+1}\right) \end{aligned}$$

III) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

Soluzione.

Riscriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = e^{\ln\left((\operatorname{sen} x)^{\cos x}\right)}$$

e applichiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$f(x) = e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)}$$

Successivamente, applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)} \cdot \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x\right) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot \left(\frac{-\operatorname{sen}^2 x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \ln(\operatorname{sen} x))
\end{aligned}
$$

Esercizio 7, prova intermedia MGF del 27/01/2022 – Turno A

Si consideri $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

A. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x}$

B. $f'(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{\ln x}$

C. $f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$

D. $f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$

Soluzione.

Applicando le regole di derivazione, si ha:

$$
f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}
$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	…	C

Esercizio 7, prova intermedia MGF del 27/01/2022 – Turno B (cliccare qui per il video)

Si consideri $f(x) = \frac{2^x}{x}$.

A. $f'(x) = \frac{2^x}{x^2}(-1 + \ln 2 \cdot x)$

B. $f'(x) = \frac{2^x(x-1)}{x^2}$

C. $f'(x) = \frac{2^x \ln 2 - 1}{x^2}$

D. $f'(x) = \frac{2^x - x \ln 2}{x^2}$

Soluzione.

Applicando le regole di derivazione, si ha:

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x \cdot 1}{x^2} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot x - 1)}{x^2} = \frac{2^x}{x^2}(-1 + \ln 2 \cdot x)$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la A. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	…	…	A

Esercizio 3, prova MGF del 16/02/2022

Se $f(x) = \operatorname{sen} x + e^x$, *allora* $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ *è uguale a*

A. $\operatorname{sen} 2 + h$

B. $\cos 2 + e^2$

C. $\cos h + e^h$

D. $\operatorname{sen} 2 + e^2$

<u>Soluzione</u>.

Dalla definizione di derivata prima sappiamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

Essendo

$$f'(x)=\cos x+e^x$$

e

$$f'(2)=\cos 2+e^2,$$

allora

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\cos 2+e^2.$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	B	…	…	…	…

Esercizio 3, prova MGF del 09/09/2022

Il grafico della derivata f' della funzione $f(x)=x^2e^{x+5}$ interseca l'asse delle ascisse in

A. $x=-2$ *e* $x=2$

B. $x=0$ *e* $x=-2$

C. $x=2$ *e* $x=0$

D. *in nessuno dei punti indicati sopra*

<u>Soluzione</u>.

Applicando in serie le regole di calcolo delle derivate, otteniamo

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x+5} + x^2 \cdot e^{x+5} \cdot 1 = 2xe^{x+5} + x^2e^{x+5}.$$

Per determinare dove il grafico della derivata f' interseca l'asse delle ascisse, verifichiamo per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si annulla la derivata prima f':

$$2xe^{x+5} + x^2e^{x+5} = 0$$
$$e^{x+5}(2x + x^2) = 0$$

La soluzione dell'equazione è indipendente da e^{x+5}, essendo questa una quantità positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto,

$$2x + x^2 = 0$$
$$x(2 + x) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = -2.$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	B	…	…	…	…

Equazione della retta tangente

Esercizio 4, pag. 27 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Trovare l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x$ *nel punto di ascissa* $x = 2$.

Soluzione.

Sapendo che l'equazione della generica retta passante per un punto $P(x_0, y_0)$ con pendenza $m \in \mathbb{R}$ è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

ricaviamo $m = f'(x_0) = f'(2)$ e $y_0 = f(x_0) = f(2)$. In particolare,

$$f'(x) = 3x^2 - 2; \qquad f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

e

$$f(2) = (2)^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4.$$

Pertanto, $y - 4 = 10(x - 2)$, da cui $y = 10x - 16$, è l'equazione della particolare retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x$ nel punto di ascissa $x = 2$.

Esercizio 7, pag. 27 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ *nel punto di ascissa* $x = 3$.

Soluzione.

Sapendo che l'equazione della generica retta passante per un punto $P(x_0, y_0)$ con pendenza $m \in \mathbb{R}$ è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

ricaviamo $m = f'(x_0) = f'(3)$ e $y_0 = f(x_0) = f(3)$. In particolare,

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}; \qquad f'(3) = \frac{-(3)^2-1}{((3)^2-1)^2} = \frac{-9-1}{64} = \frac{-10}{64} \approx -0.1563$$

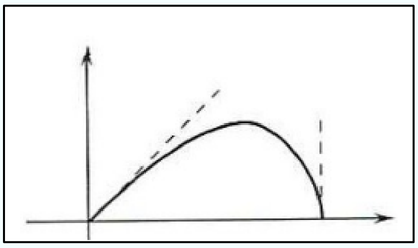
e

$$f(3) = \frac{3}{(3)^2-1} = \frac{3}{8} \approx 0.3750.$$

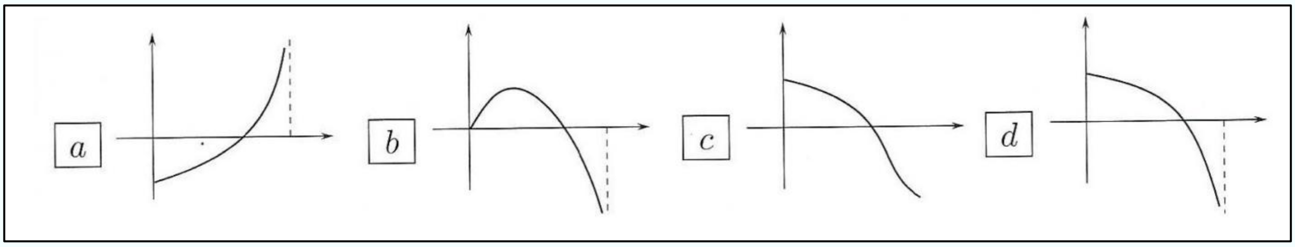
Pertanto, $y - 0.3750 = -0.1563(x-3)$, da cui $y = -0.1563x + 0.8439$, è l'equazione della particolare retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ nel punto di ascissa $x = 3$.

Esercizio 5, prova intermedia MGF del 27/01/2022 – Turno A

Una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *ha grafico*



Quale tra i seguenti grafici può essere quello della sua derivata?



A. *Il grafico di* $f(x)$ *è* (a)
B. *Il grafico di* $f(x)$ *è* (b)
C. *Il grafico di* $f(x)$ *è* (c)
D. *Il grafico di* $f(x)$ *è* (d)

Soluzione.

La retta tangente (a destra) al grafico di f in $x = 0$ ha inclinazione positiva, quindi $f'_+(0) > 0$. Questo esclude i grafici (a) e (b), per i quali $f'(0) < 0$ e $f'(0) = 0$. Inoltre, la retta tangente (a sinistra) al grafico di f in $x = 1$ ha pendenza infinita (in particolare, $-\infty$). Questo esclude il grafico (c), dove $f'(1) > 0$. La risposta corretta è il grafico (d), per il quale $f'(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a 1^-.

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	D	…	…

Differenziale primo

Esercizio 8, pag. 28 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Determinare il differenziale primo di $f(x) = \ln(x^2 - x)$ *in* $x_0 = 3$ *per* $h = 0.5$.

Soluzione.

Dalla definizione di derivata sappiamo che il differenziale primo è

$$d\,f(x) = f'(x_0) \cdot h.$$

Essendo

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x - 1) = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

il differenziale primo in $x_0 = 3$ per $h = 0.5$ è pari a

$$f'(3) \cdot h = \frac{2(3)-1}{(3)^2-(3)} \cdot 0.5 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0.4267.$$

Esercizio 9, pag. 28 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Considerando che $f(1) = 8$ *e* $f'(x) = 4\sqrt{x}$, *si determini il valore approssimato di* $f(1.3)$.

Soluzione.

In questo caso, sappiamo che $x_0 = 1$ mentre $h = 1.3 - 1 = 0.3$. Ne consegue che

$$f(1.3) \approx f(1) + f'(1) \cdot h = 8 + 4\sqrt{(1)} \cdot 0.3 = 9.2.$$

Utilizzo della derivata nel calcolo dei limiti (teoremi di De l'Hôpital)

Esempio 1, pag. 217 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{x^2+\ln x}$$

<u>Soluzione</u>.

Questo limite rappresenta una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, che può essere risolta applicando la gerarchia degli infiniti (in questo caso il termine e^x a numeratore è quello che determina la tendenza a $+\infty$ della funzione), oppure applicando (due volte) il secondo teorema di De l'Hôpital, come segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{x^2+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{2x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Esempi, pag. 220 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, il limite rappresenta una forma di indecisione del tipo $0 \cdot \infty$, che può essere risolta riscrivendo il limite nella forma

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

ed essere così in grado di applicare il secondo teorema di De l'Hôpital, come segue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}-x=0$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to -\infty} x\cdot e^x$$

<u>Soluzione</u>.

Anche in questo caso, il limite rappresenta una forma di indecisione del tipo $\infty\cdot 0$, che può essere risolta riscrivendo il limite nella forma

$$\lim_{x\to -\infty} x\cdot e^x=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}}$$

ed essere così in grado di applicare il secondo teorema di De l'Hôpital, come segue:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo 1^∞, che può essere risolta riscrivendo il limite nella forma

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

che, applicando le proprietà dei logaritmi, diventa

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Procedendo analogamente a quanto fatto negli esempi precedenti, possiamo ulteriormente riscrivere il limite nella forma

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

ed essere così in grado di applicare il secondo teorema di De l'Hôpital all'esponente, come segue:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

Esercizio 2, prova totale MGF del 14/06/2022

Si determini il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-4}{150x+\ln(-x)-2}$$

A. *non esiste*

B. 0

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Soluzione.

Questo limite rappresenta una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, che può essere risolta applicando la gerarchia degli infiniti oppure applicando il secondo teorema di De l'Hôpital, come segue:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-4}{150x+\ln(-x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{150+\frac{1}{x}}=-\infty$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	D	…	…	…	…	…

Massimi e minimi locali e assoluti, criterio di monotonia

Esercizio 1, pag. 80 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$. *Dal segno della derivata che cosa si può dedurre relativamente all'andamento della funzione?*

Soluzione.

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima andando verificare per quali valori di $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è verificata la condizione$f'(x) \geq 0$. Poiché $-\frac{1}{x^2} < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, deduciamo, per il criterio di monotonia, che la funzione è strettamente decrescente per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Esercizio 2, pag. 80 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Trovare per quali valori di x le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

Soluzione.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ perché la condizione di esistenza del denominatore ($x^2 + 1 \neq 0$) è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x-2) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima andando verificare per quali valori di $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ è verificata la condizione $f'(x) \geq 0$, ossia $\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} \geq 0$. Il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal segno del numeratore perché il denominatore è positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, lo studio del segno della derivata prima si riduce alla verifica della seguente condizione:

$$-x^2 + 4x + 1 \geq 0.$$

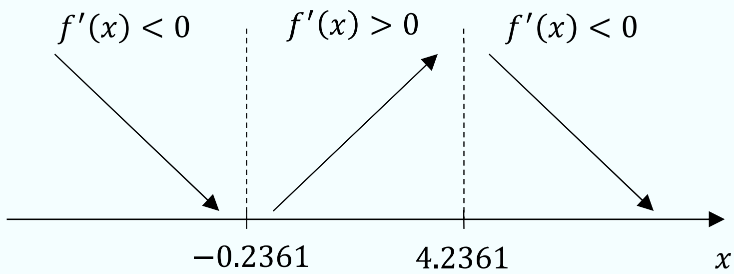
Trattandosi di una parabola con concavità verso il basso, avente radici

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (+1)}}{-2} = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5} \approx -0.2361$$

e

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (+1)}}{-2} = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} = 2 + \sqrt{5} \approx 4.2361,$$

la condizione è verificata per $-0.2361 \leq x \leq 4.2361$:



Pertanto, la funzione è crescente nell'intervallo $(-0.2361, 4.2361)$ e decrescente separatamente negli intervalli $(-\infty, -0.2361)$ e $(4.2361, +\infty)$.

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Soluzione.

Dalla verifica della condizione di esistenza del radicando, ovvero $x + 3 \geq 0$, otteniamo che il dominio della funzione è $[-3, +\infty)$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Studiamo il segno della derivata prima andando a verificare per quali valori di $x \in [-3, +\infty)$ è verificata la condizione $f'(x) \geq 0$ ossia $\frac{1}{2\sqrt{x+3}} \geq 0$. Il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal segno del denominatore. Essendo $\sqrt{x+3} \geq 0$ per ogni x appartenente al dominio della funzione, ne consegue che

$$\frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0 \qquad \forall\, x \in (-3, +\infty).$$

Pertanto, la funzione è strettamente crescente in $(-3, +\infty)$.

c) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

Soluzione.

Dalla verifica della condizione di esistenza del logaritmo, ovvero $x^2 - 2x \geq 0$, otteniamo che il dominio della funzione è $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot (2x - 2) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

Studiamo il segno della derivata prima andando verificare per quali valori di $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ è verificata la condizione $f'(x) \geq 0$, ossia $\frac{2x-2}{x^2-2x} \geq 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

(N) $2x - 2 \geq 0$ se $x \geq 1$

(D) $x^2 - 2x > 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 2$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita (ricordando che la funzione non è definita per valori di x compresi tra 0 e 2), con l'ausilio della seguente tabella:

<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, 0)$</th><th>$(0,2)$</th><th>$(2, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>(N)</td><td>$(-)$</td><td rowspan="3">non definita</td><td>$(+)$</td></tr>
<tr><td>(D)</td><td>$(+)$</td><td>$(+)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{(N)}{(D)}$</td><td>$(-)$</td><td>$(+)$</td></tr>
</table>

La condizione $\frac{2x-2}{x^2-2x} > 0$ è verificata per $x > 2$. Da notare che la derivata prima non si annulla mai perché $x = 1$ non appartiene al dominio della funzione. Pertanto, la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente in $(2, +\infty)$.

d) $f(x) = e^{x^2+1}$

<u>Soluzione</u>.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = e^{x^2+1} \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: la condizione$f'(x) \geq 0$ è verificata per $2xe^{x^2+1} \geq 0$. Essendo e^{x^2+1} una quantità positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, il segno della derivata prima dipende esclusivamente da $2x$. Pertanto, la condizione è verificata per $x \geq 0$. Ne consegue che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente in $(0, +\infty)$.

Esercizio.

Sia $f'(x)$ strettamente crescente in (a, b). Allora,

A. $f'(x) > 0$ su (a, b)
B. $f'(x) \geq 0$ su (a, b)
C. $f''(x) > 0$ su (a, b)
D. $f''(x) \geq 0$ su (a, b)

(cliccare qui per il video)

Soluzione.

La crescenza di una funzione non ha implicazioni sul segno della funzione stessa, quindi escludiamo le prime due risposte. Per il criterio di monotonia, se una funzione è strettamente crescente, allora la sua derivata prima è non negativa.[1] Siccome $f''(x)$ è la derivata prima di $f'(x)$, si conclude che la risposta corretta è la D.

Esercizio.

La stazionarietà di un punto x_0 è condizione

A. *necessaria per affermare che x_0 è punto di massimo o minimo locale*
B. *sufficiente per affermare che x_0 è punto di massimo o minimo locale*
C. *necessaria e sufficiente per affermare che x_0 è punto di massimo o minimo locale*
D. *nessuna delle precedenti*

[1] In assenza di altre informazioni, non possiamo affermare che la sua derivata prima sia positiva (ad esempio, la funzione $g(x) = x^3$ è strettamente crescente ma la sua derivata prima non è positiva su tutto il dominio).

Soluzione.

Per il Teorema di Fermat, se x_0 è un estremante per f (cioè punto di massimo o di minimo) e la funzione è ivi derivabile, allora x_0 è un punto stazionario per f. Non è vero il viceversa, cioè non è detto che un punto stazionario sia un estremante. Pertanto, la condizione di stazionarietà è una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché la funzione assuma un massimo o minimo in x_0. La risposta corretta è la A.

Esercizio.

Se $\lim_{x\to -4^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 5$, $f(-4) = 2$, $f'(x) < 0$ *per* $x < -4$, *allora*

A. -4 *è punto di massimo locale*

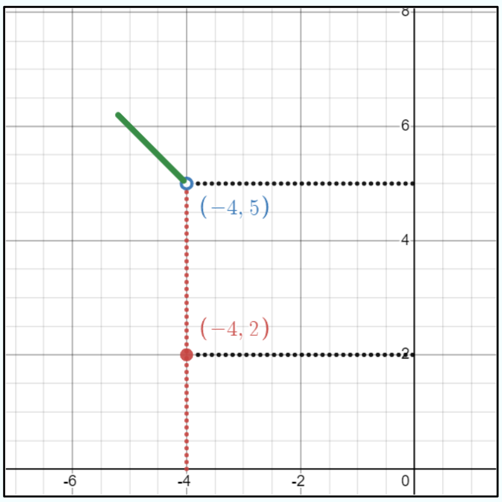
B. -4 *è punto di minimo locale*

C. -4 *non è punto di massimo né di minimo*

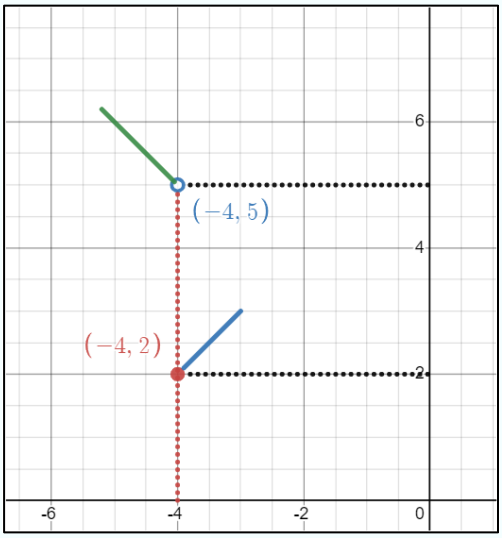
D. *I dati non sono sufficienti per risolvere il problema*

Soluzione.

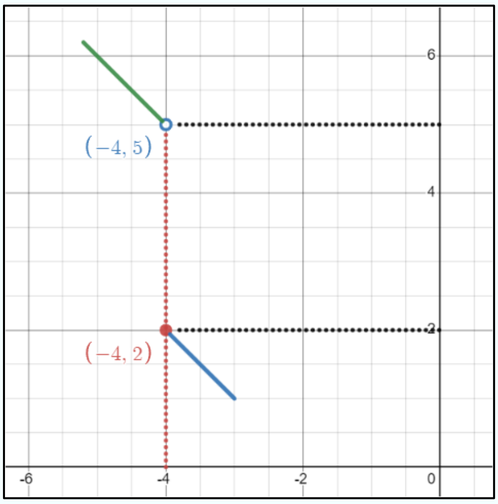
In questo caso, è necessario effettuare un'analisi locale per risolvere il problema. L'ausilio grafico consentirà di visualizzare la situazione e rendere intuitiva la soluzione. Essendo $f'(x) < 0$ per $x < -4$, $f(x)$ è decrescente per $x < -4$. Pertanto, la situazione si presenta nel seguente modo:



La risposta alla domanda dipende da ciò che succede a destra di -4: Se f è crescente, essa assume un minimo in $x = -4$:



Se invece la funzione è decrescente, la funzione non assume in $x = -4$ né un minimo né un massimo:



Poiché non disponiamo di questa informazione, la risposta corretta è la D.

Esercizio.

Si consideri la funzione $f(x)$, *definita in* $(-5,4)$, *continua in* $(-5,1) \cup (1,4)$ *e discontinua nel punto di ascissa* $x = 1$. *Sia*

- $\lim_{x \to -5^+} f(x) = 8$
- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$
- $M = f(3) = 9$ *(massimo dei massimi locali di* f*)*
- $m = f(-2) = 2$ *(minimo dei minimi locali di f)*
- $L^* = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$
- $l^* = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

Quale di queste affermazioni è vera?

A. *Non esiste minimo assoluto*

B. *L'estremo superiore di* $f\,(\sup f)$ *è assunto in* $x = 0$

C. $\inf f = m$

D. f *è continua in* $x = 1$

Soluzione.

La A. è falsa, perché $m = 0$ è il minimo assoluto di f, essendo il più piccolo dei valori indicati:

$$0 = m = \min[8, 5, 9, 0, 4, 3].$$

La B. è falsa, perché $M = 9$ è il massimo assoluto di f, essendo il più grande dei valori indicati:

$$9 = M = \max[8, 5, 9, 0, 4, 3].$$

Se il massimo assoluto esiste, esso coincide, per definizione, con l'estremo superiore di f ($M = \sup f$). In questo caso, esso è assunto in $x = 0$:

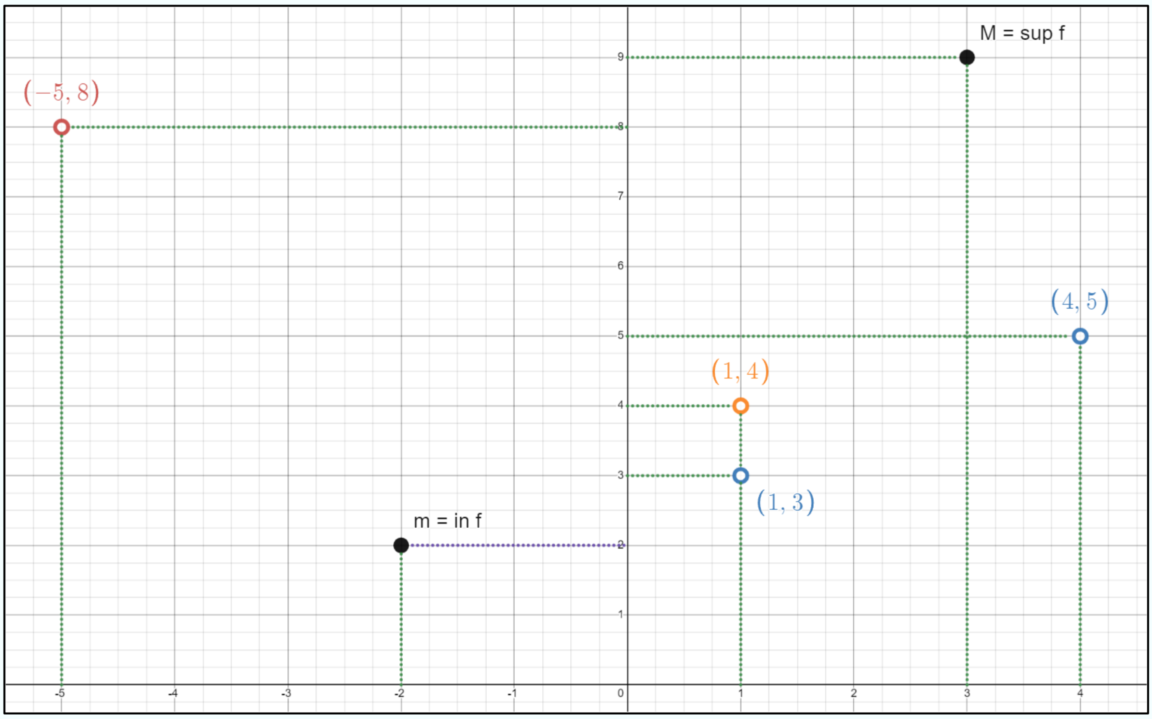
$$M = f(0) = 0.$$

La C. è vera perché, come visto, m è il minimo assoluto di f, e il minimo assoluto coincide, per definizione, con $\inf f$.

La D. è falsa perché (indipendentemente dal valore $f(1)$) risulta

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$$

(e, quindi, non può essere $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$). (Si veda anche il box a pag. 63 del Fascicolo 3).



Massimi e minimi nei vari domini

Esercizio 1, pag. 80 (Videolibro - Fascicolo n. 3)

Determinare le ascisse dei punti di massimo relativo e di minimo relativo delle seguenti funzioni considerate nel rispettivo dominio:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$

<u>Soluzione</u>.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio: se esistono punti di massimo o minimo, essi sono punti stazionari. Per determinare le ascisse dei punti di massimo relativo e di minimo relativo, calcoliamo anzitutto la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

Studiamo ora la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat, ovvero

$$f'(x) = 0, \qquad \text{da cui } 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Il trinomio di secondo grado ha radici

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4+2}{6} = 1$$

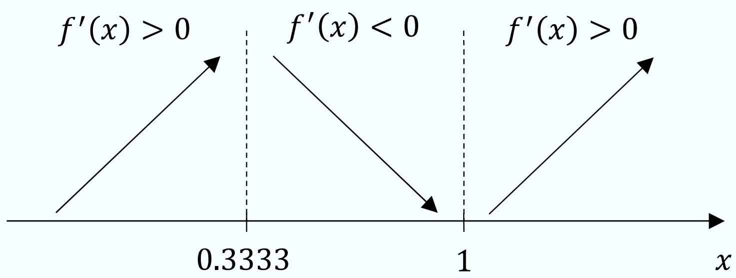
e

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

Ne consegue che i punti $x_1 = 1$ e $x_2 = 0.3333$ sono punti stazionari, candidati ad essere punti di massimo o di minimo relativo. Per stabilirne la natura, studiamo la condizione sufficiente o del second'ordine data dal criterio di monotonia, ovvero

$$f'(x) > 0 \qquad \text{da cui } 3x^2 - 4x + 1 > 0.$$

Trattandosi di una parabola con concavità verso il basso, avente radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 0.3333$, la condizione è verificata per $x < 0.3333$ oppure $x > 1$. Dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



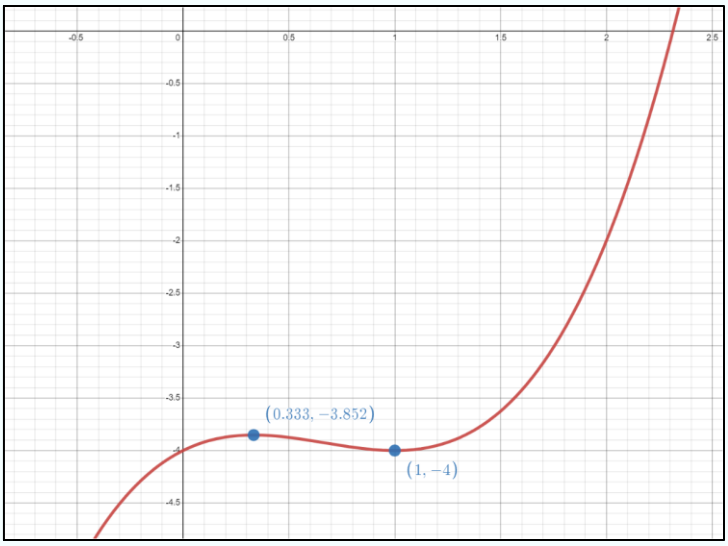
risulta che f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, 0.3333)$ e $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente nell'intervallo $(0.3333, 1)$. Il punto di ascissa $x = 0.3333$ è punto di massimo relativo, in cui la funzione vale $f(0.3333) \approx -3.8519$, e il punto di ascissa $x = 1$ è un punto di minimo relativo, in cui la funzione vale $f(1) = -4$. Per verificare se tali estremanti sono anche assoluti, è necessario determinare l'estremo superiore ($\sup f$) e inferiore ($\inf f$) della funzione. A tal fine, studiamo la funzione agli estremi del dominio, $-\infty$ e $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty = \sup f$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty = \inf f$$

Essendo la funzione illimitata superiormente e inferiormente, ne consegue che il punto di massimo relativo $x = 0.3333$ e il punto di minimo relativo $x = 1$ non sono punti di massimo e minimo assoluti.



d) $f(x) = \frac{x+4}{x^2+6x+5}$

<u>Soluzione</u>.

Dalla verifica della condizione di esistenza del denominatore, ovvero $x^2 + 6x + 5 \neq 0$, otteniamo che il dominio della funzione è

$$\mathbb{R} \setminus \{-5, -1\} = (-\infty, -5) \cup (-5, -1) \cup (-1, +\infty).$$

La funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio: se esistono punti di massimo o minimo, essi sono punti stazionari. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 + 6x + 5) - (x + 4) \cdot (2x + 6)}{(x^2 + 6x + 5)^2} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 5 - 2x^2 - 6x - 8x - 24}{(x^2 + 6x + 5)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 8x - 19}{(x^2 + 6x + 5)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat, ovvero $f'(x) = 0$, da cui $\frac{-x^2-8x-19}{(x^2+6x+5)^2} = 0$, che implica

$$-x^2 - 8x - 19 = 0.$$

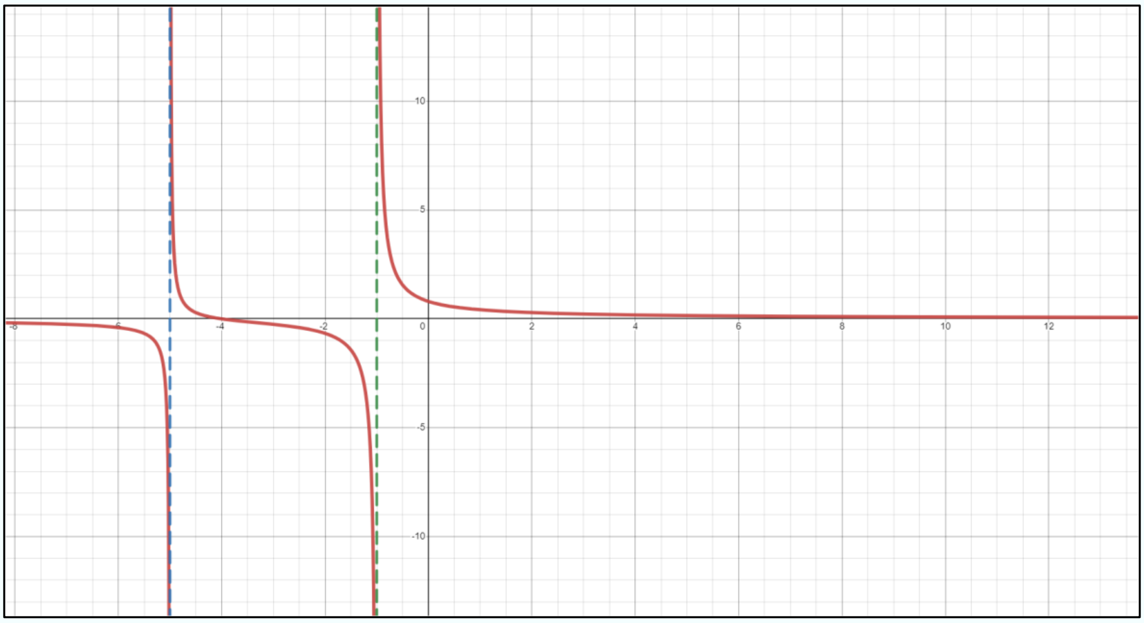
Il trinomio di secondo grado non ha radici reali perché $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-19) = 64 - 76 = -12 < 0$. Pertanto, non esistono valori di x tali per cui la derivata prima si annulla (in altre parole, la funzione non presenta punti stazionari). Studiamo ora la monotonia della funzione col criterio di monotonia, ovvero poniamo $f'(x) > 0$ da cui $\frac{-x^2-8x-19}{(x^2+6x+5)^2} > 0$.

In questo caso, il segno della derivata dipende esclusivamente dal segno del numeratore perché il denominatore è positivo per ogni x:

$$-x^2 - 8x - 19 > 0.$$

L'equazione associata $-x^2 - 8x - 19 = 0$ non ha soluzione e quindi non esistono punti di massimo o minimo, Inoltre, $-x^2 - 8x - 19 < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, la funzione è strettamente decrescente separatamente nei suoi intervalli di definizione: in $(-\infty, -5)$, in $(-5, -1)$ e in $(-1, +\infty)$.[2] La funzione non presenta alcun punto di massimo o minimo relativo.

[2] Attenzione: la funzione non è strettamente decrescente sul suo dominio, perché non è vero che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}, x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Esercizio.

Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione $f(x) = x^3 \ln x$ e determinare gli estremi superiore e inferiore della funzione.

<u>Soluzione</u>.

Dalla verifica della condizione di esistenza del logaritmo, ovvero $x > 0$, otteniamo che il dominio della funzione è $\mathrm{Dom}\, f = (0, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio: se esistono punti di massimo o minimo, essi sono punti stazionari. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1).$$

Studiamo ora la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat,[3] ovvero

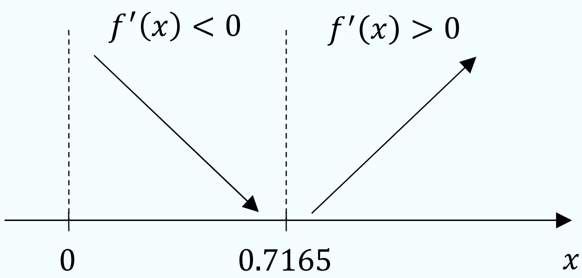
[3] Lo studio della condizione del prim'ordine non è strettamente necessario per la soluzione dell'esercizio, perché la funzione è continua (e derivabile) su tutto il dominio; è quindi sufficiente risolvere la disequazione $f'(x) > 0$ per determinare gli intervalli di monotonia al fine di individuare i punti di massimo e minimo.

$$f'(x) = 0 \qquad \text{da cui } x^2(3\ln x + 1) = 0.$$

L'equazione è verificata se uno dei due fattori si annulla. Il primo fattore si annulla per $x = 0$. Tale punto però non è accettabile perché $0 \notin \text{Dom } f$. Il secondo fattore si annulla se $\ln x = -1/3$, da cui $x = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.7165$, che è accettabile perché $0.7165 \in (0, +\infty)$. Questo è l'unico punto stazionario e quindi l'unico potenziale massimo o minimo della funzione. Per stabilirne la natura, studiamo la condizione sufficiente (o del second'ordine) data dal criterio di monotonia, ovvero poniamo $f'(x) > 0$ da cui $x^2(3\ln x + 1) > 0$. Il primo fattore è ininfluente (ha sempre segno positivo), quindi ci concentriamo sulla condizione

$$3\ln x + 1 > 0$$

che è verificata per $x > e^{-\frac{1}{3}} = 0.7165$. Dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



risulta che la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 0.7165)$ e strettamente crescente nell'intervallo $(0.7165, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 0.7165$ è punto di minimo relativo, dove la funzione vale $f(0.7165) \approx -0.1226$.

Studiamo ora la funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x - x = \lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Applicando il secondo teorema di De l'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3\cdot\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3}x^3 = 0.$$

Invece, per x che tende a $+\infty$,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^3 \ln x - x = +\infty = \sup f.$$

Riassumendo,

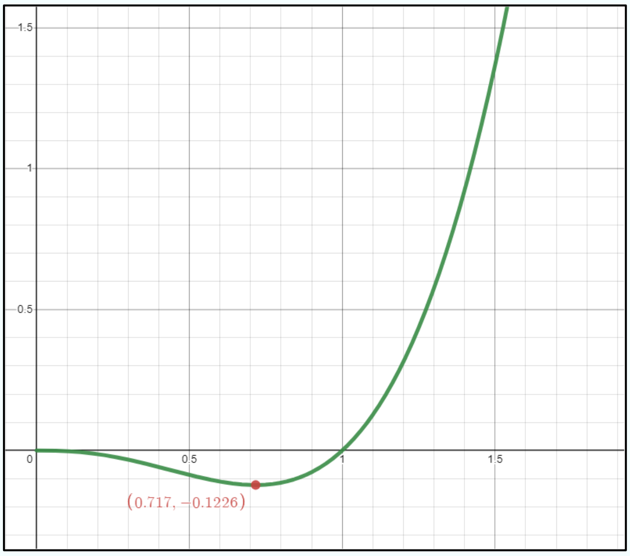
- $m = f(0.7165) = -0.1226$ è il minimo dei minimi relativi della funzione
- $l = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ è il minimo dei limiti per i punti di frontiera
- $L = +\infty = \sup f$ è il massimo dei limiti per i punti di frontiera

Pertanto, m è minimo assoluto ed estremo inferiore, perché

$$m = \min[m, l, L] = \min[-0.2336, 0, +\infty] = \inf f\,.$$ [4]

(si veda il box a pag. 63 del Fascicolo 3). L'estremo superiore di f è $\sup f = +\infty$ (la funzione è illimitata superiormente).

[4] Che $x = 0.7165$ sia punto di minimo assoluto lo si deduce immediatamente anche dall'andamento di f, che è decrescente a sinistra e crescente a destra di $x = 0.7165$ (si riguardi il grafico tabellare descritto sopra).



Esercizio 9.22 (modificato), pag. 247 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione $f(x) = |x^2 - x| + |x|$ *nell'intervallo* $[-1, 1]$ *e gli estremi superiore e inferiore della funzione.*

<u>Soluzione</u>.

Studiando il segno del binomio di secondo grado $x^2 - x$ e del monomio di primo grado x, e applicando la definizione di valore assoluto si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } x \in [-1, 0] \\ -x^2 + 2x, & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

La funzione è continua negli intervalli $[-1,0]$ e $(0,1]$ perché, nei due tratti, sono coinvolte espressioni polinomiali. L'unico eventuale punto di discontinuità è $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 2x) = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - x^2) = 0$$

Inoltre, $f(0) = 0$. Pertanto,

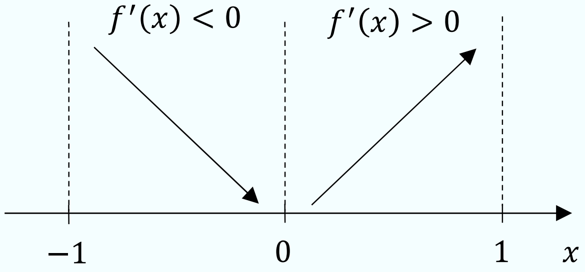
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

e la funzione è continua anche in $x = 0$ (e quindi, su tutto il dominio $[-1,1]$). Vale dunque il teorema di Weierstrass perché f è continua in un intervallo chiuso e limitato; quindi, esistono sicuramente sia un massimo assoluto sia un minimo assoluto.

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$ nei punti in cui essa è derivabile,[5] applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x \in (-1, 0) \\ -2x + 2, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Si ha $2x - 2 < 0 \ \forall\, x \in (-1, 0)$, quindi la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $(-1, 0)$. Si ha $2x - 2 > 0 \ \forall\, x \in (0, 1)$, quindi la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(0, 1)$. Dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



[5] In $x = 0$, la funzione non è derivabile perché

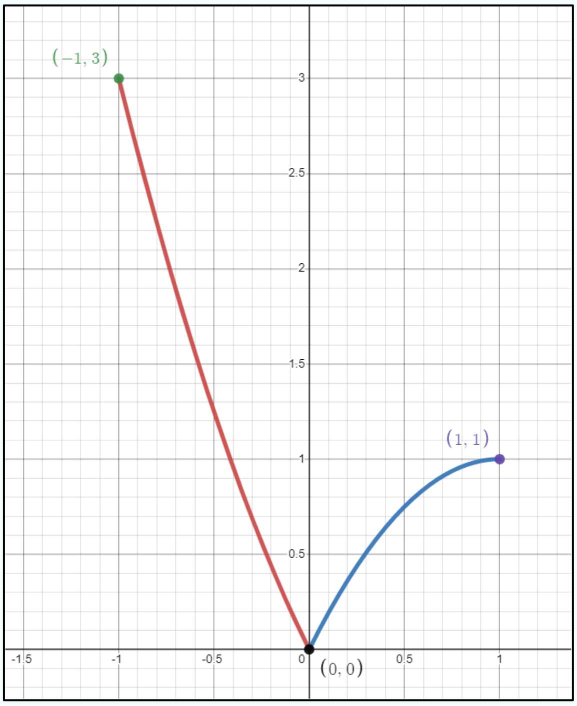
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = 2\,.$$

e tenendo conto che la funzione è continua in $x = 0$ e anche agli estremi del dominio, $x = -1, x = 1$ (quindi si può applicare il criterio di monotonia), possiamo concludere che

- la funzione presenta un minimo relativo in corrispondenza del punto di ascissa $x = 0$, in cui la funzione vale $f(0) = 0$. Si tratta evidentemente anche di un punto di minimo assoluto: $m = 0 = \inf f$ è il minimo assoluto (ed estremo inferiore) di $f(x)$;
- $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di massimo relativo. Essendo $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$, deduciamo che $x = -1$ è anche punto di massimo assoluto di $f(x)$: $M = 3 = \sup f$ è il massimo assoluto (ed estremo superiore) di f.



Esercizio 9.23, pag. 247 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - e^x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ (1 - x)\ln(1 - x), & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

e gli estremi superiore e inferiore di f (cliccare qui per il video).

<u>Soluzione</u>.

La funzione è una funzione definita a tratti, continua in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1)$. Verifichiamo se essa è continua anche in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - e^x + 1 = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) \ln(1 - x) = 0.$$

Inoltre, $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$. Pertanto, la funzione è continua anche in $x = 0$.

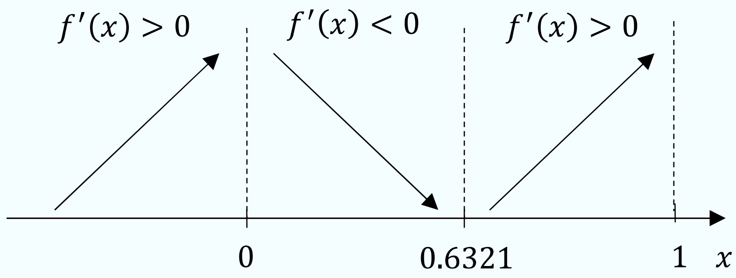
Essendo la funzione continua su $(-\infty, 1)$ e derivabile su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ (trattandosi di funzioni composte da funzioni elementari),[6] il criterio di monotonia è sufficiente per determinare i massimi e minimi della funzione su tutto il dominio. Calcoliamo $f'(x)$ nei due intervalli di definizione, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & \text{se } x < 0 \\ -1 \cdot \ln(1 - x) + (1 - x) \cdot \dfrac{1}{(1 - x)} \cdot (-1), & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^x, & \text{se } x < 0 \\ -\ln(1 - x) - 1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La condizione $1 - e^x > 0$ è verificata sull'intero intervallo $(-\infty, 0)$, mentre la condizione $-\ln(1 - x) - 1 > 0$ è verificata per $x > 1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321$. Dalla seguente rappresentazione

[6] Si noti che la funzione non è derivabile in $x = 0$, essendo $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, come si verifica agevolmente.



risulta che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 0.6321)$ e strettamente crescente nell'intervallo $(0.6321, 1)$. Il punto di ascissa $x = 0$, in cui la funzione vale $f(0) = 0$, è dunque punto di massimo relativo; il punto di ascissa $x = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321$, in cui la funzione vale $f\left(1 - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \approx -0.3679$, è invece punto di minimo relativo.

Analizziamo la funzione alla frontiera. Per $x \to -\infty$, risulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - e^x + 1 = -\infty,$$

quindi non esiste minimo assoluto e l'estremo inferiore di f è

$$\inf f = -\infty.$$

Studiamo la funzione per x che tende a 1 da sinistra:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{(1-x)}}.$$

Applicando il secondo teorema di De l'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{(1-x)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(1-x) = 0$$

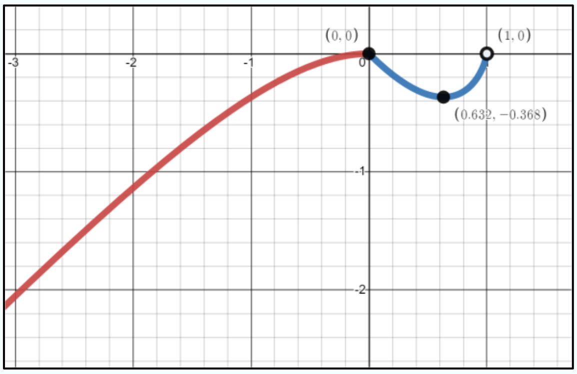
Questo risultato ci permette di affermare che $x = 0$ è punto di massimo assoluto. Infatti,

- $M = f(0) = 0$ è il massimo dei massimi relativi della funzione
- $m = f(0.632) = -0.368$ è il minimo dei minimi relativi della funzione
- $L = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ è il massimo dei limiti per i punti di frontiera
- $l = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ è il minimo dei limiti per i punti di frontiera.

Allora, $M = 0$ è massimo assoluto (ed estremo superiore) di f perché

$$M = 0 = \max[M, m, L, l] = \max[0, -0.368, 0, -\infty] = \sup f$$

(si veda il box a pag. 63 del Fascicolo 3). Invece, m è soltanto punto di minimo relativo perché $m > \inf f = -\infty$ (la funzione è illimitata inferiormente).



Esercizio 2, prova intermedia MGF del 27/01/2022 – Turno B (cliccare qui per il video)

La funzione $f(x) = \begin{cases} -1 + x^2, & \text{se } x \in [0,2) \\ 5 + \frac{1}{x-3}, & \text{se } x \in [2,3) \end{cases}$ *presenta*

A. *1 massimo relativo (e assoluto) e 1 minimo relativo (e assoluto)*

B. *1 massimo relativo (e assoluto) e 1 minimo relativo (non assoluto)*

C. *1 massimo relativo (non assoluto) e 1 minimo relativo (e assoluto)*

D. *1 massimo relativo (non assoluto) e 1 minimo relativo (non assoluto)*

<u>Soluzione</u>.

La funzione è una funzione definita a tratti, continua nei due tratti costituenti. Per $x = 2$, dove la funzione cambia espressione, si ha

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -1 + x^2 = 3$$

e

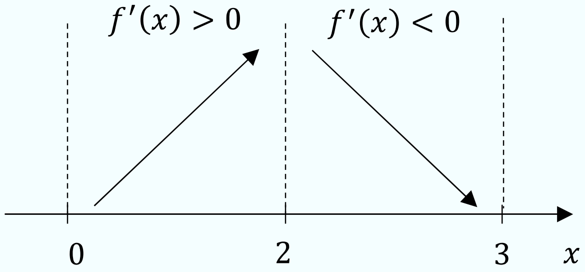
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 5 + \frac{1}{x-3} = 4.$$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$, il che implica che la funzione non è continua in $x = 2$ e quindi neppure derivabile.

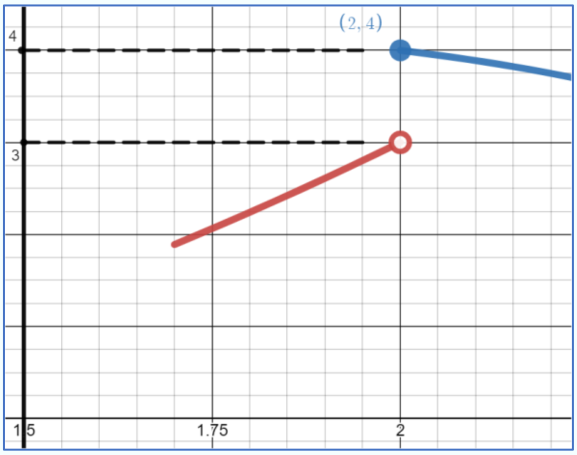
La funzione è derivabile nei due tratti costituenti $(0,2)$ e $(2,3)$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in (0,2) \\ -\dfrac{1}{(x-3)^2}, & \text{se } x \in (2,3) \end{cases}$$

Essendo $2x > 0$ nell'intervallo $x \in (0,2)$, la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(0,2)$. Essendo $-\frac{1}{(x-3)^2} < 0$ in $(2,3)$, la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $(2,3)$. Non esistono punti stazionari. Graficamente,



Consideriamo *in primis* il punto $x = 2$. Non possiamo affermare con certezza che si tratti di un punto di massimo perché abbiamo già verificato che la funzione è discontinua $x = 2$. Effettuiamo allora un'analisi locale e studiamo la funzione nell'intorno di $x = 2$ per determinare la sua natura. Vediamo che $f(2) = 4 = \lim_{x \to 2^+} f(x) > 3 = \lim_{x \to 2^-} f(x)$ e che la funzione è decrescente per valori di x superiori a 2 (a destra di $x = 2$). Pertanto, $x = 2$ è un punto di massimo relativo (si veda il grafico sottostante).



Per quanto riguarda la frontiera del dominio, studiando la monotonia della funzione nell'intorno destro di $x = 0$ vediamo che essa è crescente per valori di x superiori a 0 (a destra di $x = 0$). Inoltre, $f(0) = -1 + (0)^2 = -1$. Invece, la funzione è strettamente decrescente in (2,3) e

$$\lim_{x \to 3^-} 5 + \frac{1}{x - 3} = 5 + \frac{1}{0^-} = -\infty = \inf f$$

Essendo $-1 > \inf f$, il punto $x = 0$ non è punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda l'esistenza del massimo assoluto, si ha

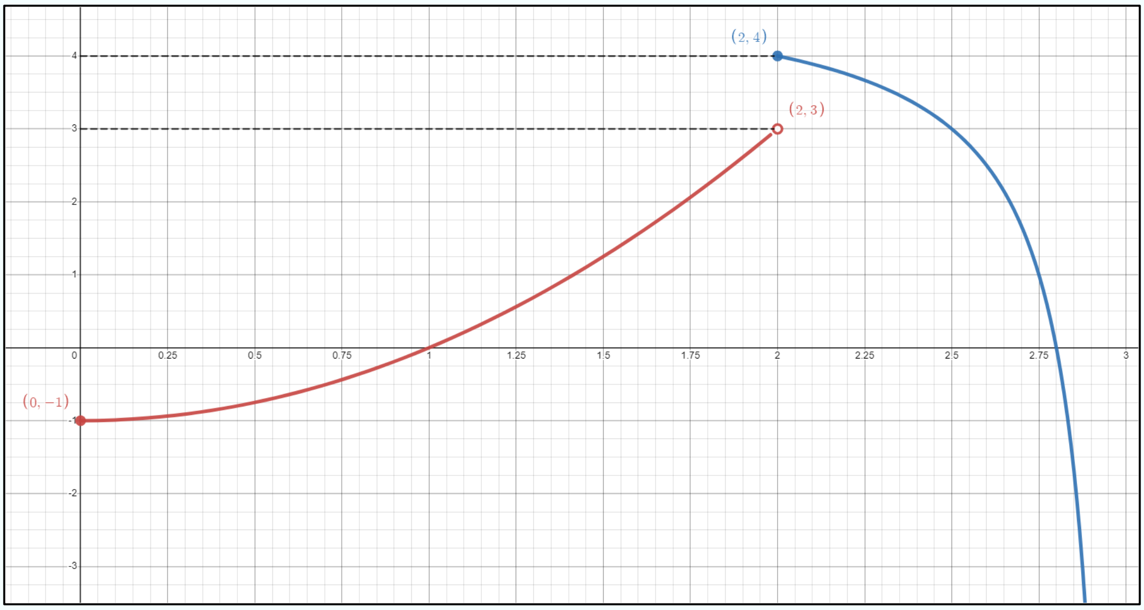
- $M = f(2) = 4$ è il massimo dei massimi relativi della funzione
- $m = f(0) = -1$ è il minimo dei minimi relativi della funzione
- $L = \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ è il massimo dei limiti per i punti di frontiera

- $l = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$ è il minimo dei limiti per i punti di frontiera
- $L^* = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ è il massimo dei limiti per i punti di discontinuità
- $l^* = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ è il minimo dei limiti per i punti di discontinuità

(si veda il box a pag. 63 del Fascicolo 3). Allora, $M = 4$ è massimo assoluto (ed estremo superiore) di f perché

$$M = 4 = \max[M, m, L, l, L^*, l^*] = \max[4, -1, -\infty, 4,3] = \sup f.$$

Il punto di ascissa $x = 2$ è punto di massimo assoluto.



Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	B	…	…	…	…	…

Esercizio 5, prova MGF del 30/06/2022

La funzione $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$ *presenta*

A. *un minimo locale* x^* *tale che* $0.4 < x^* < 0.6$ *e un massimo locale* x° *tale che* $1.9 < x^\circ < 2.0$
B. *un massimo locale* x^* *tale che* $0.4 < x^* < 0.6$ *e un minimo locale* x° *tale che* $1.9 < x^\circ < 2.1$
C. *un massimo locale* x^* *tale che* $0.6 < x^* < 0.7$ *e un minimo locale* x° *tale che* $1.9 < x^\circ < 2.1$
D. *nessuna delle precedenti*

Soluzione.

Dalla verifica della condizione di esistenza del logaritmo, ovvero $x > 0$, otteniamo che il dominio della funzione è $(0, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile sul suo dominio. Calcoliamo la derivata di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x}.$$

Studiamo la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat, ovvero $f'(x) = 0$, da cui $2x - 5 + \frac{2}{x} = 0$, che implica

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x} = 0$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Il trinomio di secondo grado ha radici

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5+3}{4} = 2$$

e

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ne consegue che i punti $x_1 = 2$ e $x_2 = 0.5$ sono punti stazionari, candidati ad essere di massimo o di minimo relativo. Per determinare la loro natura, studiamo la condizione sufficiente data dal criterio di monotonia, ovvero$f'(x) > 0$ da cui $\frac{2x^2-5x+2}{x} > 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

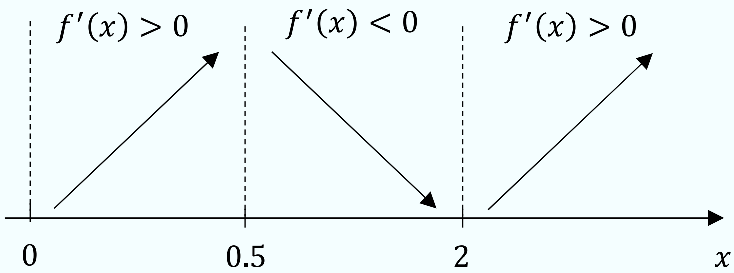
(N) $2x^2 - 5x + 2 > 0$ se $x < 0.5$ oppure $x > 2$;

(D) $x > 0$.

Andiamo quindi a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(0, 0.5)$	$(0.5, 2)$	$(2, +\infty)$
(N)	$(+)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{2x^2-5x+2}{x} > 0$ è verificata per $x < 0.5$ e per $x > 2$. Dalla seguente rappresentazione



risulta che

- la funzione è strettamente crescente, separatamente, negli intervalli $(0, 0.5)$ e $(2, +\infty)$
- la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $(0.5, 2)$
- il punto di ascissa $x^* = 0.5$ è punto di massimo relativo, in cui la funzione vale $f(0.5) \approx -3.6363$
- il punto di ascissa $x^\circ = 2$ è punto di minimo relativo, in cui la funzione vale $f(2) \approx -4.6137$.

Pertanto, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	…	B	…	…

Funzioni convesse e concave

Esercizio 9.30 (modificato), pag. 248 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Determinare gli eventuali punti di flesso della funzione $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1$ *e stabilire la loro natura.*

Soluzione.

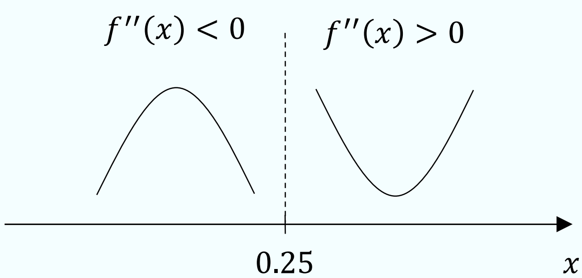
Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ e la funzione è derivabile almeno due volte nel suo dominio. Pertanto, calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f'(x) = 24x^2 - 12x$$

e

$$f''(x) = 48x - 12.$$

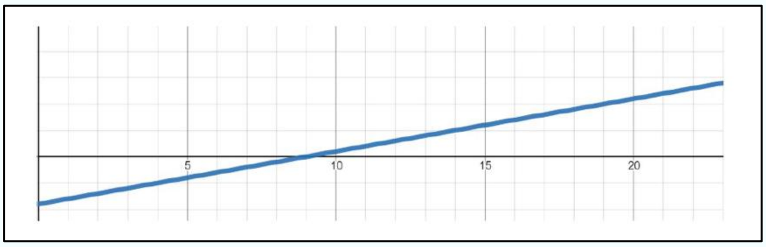
Studiamo il segno della derivata seconda per determinare gli eventuali punti di flesso e gli intervalli in cui funzione è concava o convessa, ovvero $f'(x) \geq 0$ da cui $48x - 12 \geq 0$, che implica $x \geq \frac{1}{4}$. In particolare, $x = \frac{1}{4} = 0.25$ è punto di flesso della funzione. Inoltre, dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



risulta che la funzione è concava nell'intervallo $(-\infty,\ 0.25)$ e convessa nell'intervallo $(0.25, +\infty)$.
Il punto di flesso è a tangente orizzontale, giacché $f'(0.25) = 0$.

Esercizio 4, prova MGF del 30/06/2022

La derivata seconda, $f''(x)$ *della funzione* $f(x)$ *è rappresentata nel seguente grafico:*



Dunque, la funzione $f(x)$ *è*

A. *convessa nell'intervallo* $(5, 15)$
B. *convessa nell'intervallo* $(15, 20)$
C. *concava nell'intervallo* $(5, 15)$
D. *concava nell'intervallo* $(15, 20)$

<u>Soluzione</u>.

Dalla figura risulta che il grafico della derivata seconda è positivo per $x > 9$; conseguentemente la funzione è convessa nell'intervallo $(9, +\infty)$. In particolare, nell'intervallo $(15, 20) \subset (9, +\infty)$ la funzione è convessa. La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
…	…	…	B	…	…	…

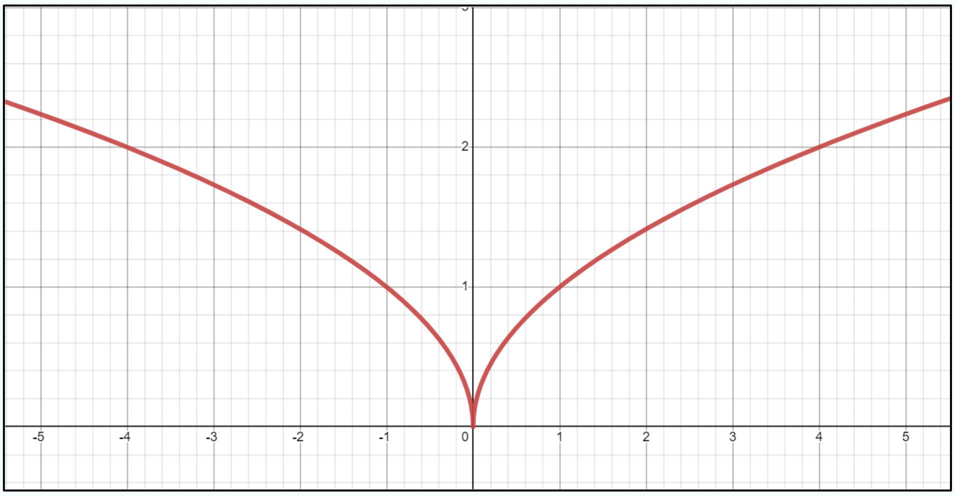
Esercizio.

Sia $f(x)$ continua in (a,b). Se essa assume un punto di flesso in x_0 ed esso è allo stesso tempo un minimo, quale di queste affermazioni è sicuramente falsa?

A. $f(x)$ *ha una cuspide in* x_0
B. $f(x)$ *è convessa in un intorno destro di* x_0
C. $f(x)$ *è decrescente in un intorno sinistro di* x_0
D. $f'(x)$ *è crescente in un intorno di* x_0

Soluzione.

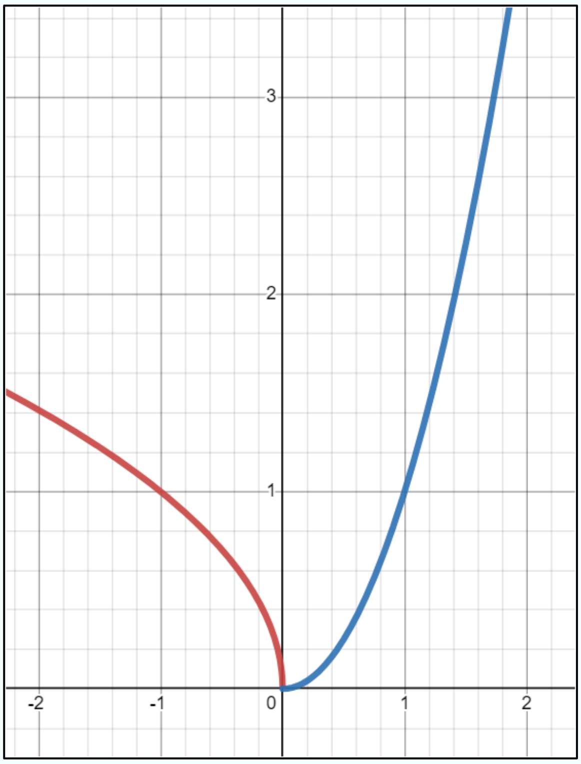
Per quanto riguarda A., basta considerare come esempio la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$, che è continua sul suo dominio e presenta in x_0 una cuspide e un punto di minimo in $x = 0$)



Quindi A. non è sicuramente falsa.

Per quanto riguarda B., basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Pertanto, anche B. non è sicuramente falsa.

Per quanto riguarda C., essa è necessariamente vera perché se la funzione non fosse decrescente in un intorno sinistro di x_0, esso non potrebbe essere punto di minimo.

Per quanto riguarda D., essa è sicuramente falsa. Infatti, se $f'(x)$ fosse crescente in un intorno I di x_0, allora sarebbe $f''(x) \geq 0$ su I, e questo implica che la funzione è convessa in I. Ma questo contraddice l'ipotesi che in x_0 la funzione assuma un punto di flesso.

La risposta corretta è dunque la D.

Studio di funzione

Esercizio 9.32, pag. 248 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

II) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$

Soluzione.

1. Insieme di esistenza

Per la ricerca del dominio (o campo di esistenza) dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$x + 2 \neq 0$$
$$x \neq -2.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

2. Eventuali simmetrie (funzioni pari o dispari)

La funzione non è né pari né dispari. Pertanto, non presenta alcuna simmetria.

3. Intersezioni del grafico con gli assi cartesiani

Per la ricerca delle intersezioni del grafico con gli assi cartesiani dobbiamo imporre la condizione $f(x) = 0$ (intersezione con l'asse x) e valutare $f(0)$ (intersezione con l'asse y). Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse x,

$$f(x) = 0 \text{ da cui } \frac{x^2+3x}{x+2} = 0,$$

che implica

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x + 3) = 0.$$

Il binomio di secondo grado ha radici $x_1 = 0$ oppure $x_2 = -3$. Il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nei punti di coordinate (0,0) e $(-3,0)$.

Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ordinate, valutiamo la funzione in $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0^2 + 3 \cdot 0}{0 + 2} = 0.$$

Quindi, il grafico di f interseca l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, 0)$.

Riassumendo, la funzione passa per l'origine degli assi cartesiani e interseca nuovamente l'asse x nel punto di coordinate $(-3, 0)$.

4. Segno della funzione: $f(x) \geq 0$

Avendo verificato in precedenza la condizione $f(x) = 0$, ci resta da verificare la condizione $f(x) > 0$, ovvero $\frac{x^2+3x}{x+2} > 0$.

Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

(N) $x^2 + 3x > 0$ se $x < -3$ oppure se $x > 0$;

(D) $x + 2 > 0$ se $x > -2$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
(N)	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(\mathrm{N})}{(\mathrm{D})}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{x^2+3x}{x+2} > 0$ è verificata per $-3 < x < -2$ e per $x > 0$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-3,-2)$ e $(0,+\infty)$, e negativa negli intervalli $(-\infty,-3)$ e $(-2,0)$.

5. Limiti e asintoti

Avendo un punto di accumulazione in cui la funzione non risulta definita ($x=-2$), andiamo a ricercare un eventuale asintoto verticale in corrispondenza di tale punto calcolando i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3x}{x+2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x}{x+2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x=-2$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$.

Verifichiamo ora la presenza di eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Ne consegue che la funzione non ha asintoti orizzontali. Andiamo quindi a verificare la presenza di eventuali asintoti obliqui. In particolare,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x}{x+2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1$$

Ne consegue che la retta di equazione $y=x+1$ è asintoto obliquo (sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$).

6. $f'(x)\geq 0$: ricerca dei punti di massimo e di minimo

Essendo la funzione definita e derivabile su un insieme aperto, dobbiamo ricercare eventuali punti di massimo o di minimo tra i punti interni. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

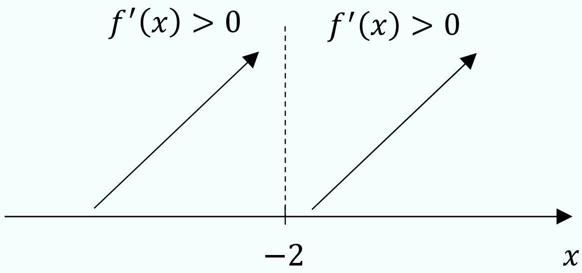
$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(2x+3)\cdot(x+2)-(x^2+3x)\cdot 1}{(x+2)^2}\\ &=\frac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x}{(x+2)^2}\\ &=\frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat, ovvero $f'(x)=0$, da cui $\frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}=0$, che implica

$$x^2+4x+6=0.$$

Il trinomio di secondo grado non ha radici reali perché $\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 6=16-24=-8<0$. Pertanto, non esistono valori di x tali per cui la derivata prima si annulla (in altre parole la funzione non presenta punti stazionari). Studiamo ora la monotonia della funzione col criterio di monotonia, ovvero $f'(x) > 0$ da cui $\frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2} > 0$.

In questo caso, il segno di $f'(x)$ dipende esclusivamente dal segno del numeratore perché il denominatore è positivo per ogni x. Siccome $x^2 + 4x + 6 > 0 \; \forall \, x \in \text{Dom } f$, la funzione è strettamente crescente separatamente negli intervalli definitori $(-\infty, -2)$ e $(-2, +\infty)$ e non presenta alcun punto di massimo o minimo relativo, come confermato dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse:



7. Eventuali punti in cui f non è continua

Non esistono punti in cui la funzione non è continua.

8. $f''(x)$: ricerca dei punti di flesso

Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$ nei punti in cui essa è derivabile, applicando le opportune regole di derivazione:

$$f''(x) = \frac{(2x+4) \cdot (x+2)^2 - (x^2+4x+6) \cdot 2 \cdot (x+2) \cdot 1}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(2x+4) \cdot (x^2+4x+4) - (x^2+4x+6) \cdot (2x+4)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(2x+4) \cdot (x^2+4x+4-x^2-4x-6)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{2 \cdot (x+2) \cdot (-2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda per determinare gli eventuali punti di flesso e gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa, ovvero $f'(x) \geq 0$, da cui $\frac{-4}{(x+2)^3} \geq 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

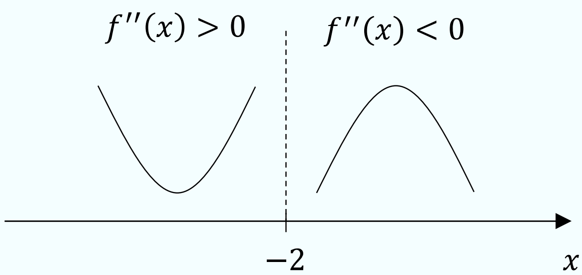
(N) $\quad -4 < 0 \; \forall \, x$

(D) $\quad (x+2)^3 > 0$ se $x+2 > 0$ cioè se $x > -2$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
(N)	$(-)$	$(-)$
(D)	$(-)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$

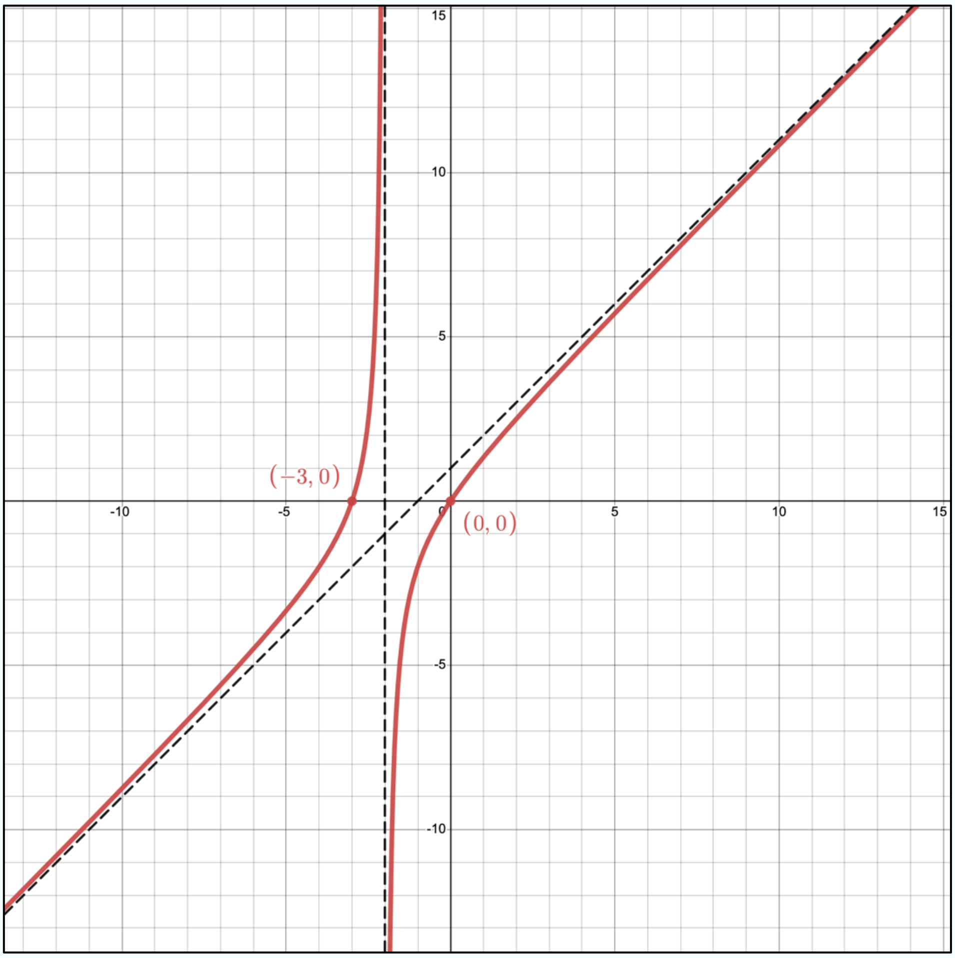
La condizione $\frac{-4}{(x+2)^3} > 0$ è verificata per $x < -2$. Dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



risulta che la funzione è convessa nell'intervallo $(-\infty, -2)$, e concava nell'intervallo $(-2, +\infty)$. Non esistono punti di flesso, atteso che la funzione non è definita $x = -2$.

Grafico

Possiamo finalmente rappresentare il grafico della funzione:



Esercizio 9.34, pag. 248 (Guerraggio, A. 2020. *Matematica*. Pearson, terza edizione)

Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

II) $f(x) = \frac{5x^2-2x}{e^x}$

<u>Soluzione</u>.

1. Insieme di esistenza

Per la ricerca del dominio (o campo di esistenza) dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero $e^x \neq 0$. Dal momento che tale condizione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

2. Eventuali simmetrie (funzioni pari o dispari)

La funzione non è né pari né dispari. Pertanto, non presenta alcuna simmetria.

3. Intersezioni del grafico con gli assi cartesiani

Per la ricerca delle intersezioni del grafico con gli assi cartesiani dobbiamo imporre la condizione $f(x) = 0$ (intersezione con l'asse x) e valutare $f(0)$ (intersezione con l'asse y). Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse x,

$$f(x) = 0, \text{ da cui } \frac{5x^2-2x}{e^x} = 0,$$

che implica

$$5x^2 - 2x = 0$$
$$x(5x-2) = 0.$$

Il binomio di secondo grado ha radici $x_1 = 0$ oppure $x_2 = \frac{2}{5} = 0.4$.

Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse y,

$$f(0) = \frac{5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0}{e^0} = 0.$$

Riassumendo, la funzione passa per l'origine degli assi cartesiani e interseca nuovamente l'asse x nel punto di coordinate $(0.4, 0)$.

4. Segno della funzione: $f(x) \geq 0$

Avendo verificato in precedenza la condizione $f(x) = 0$, ci resta da verificare la condizione $f(x) > 0$, ovvero $f(x) > 0$ da cui $\frac{5x^2-2x}{e^x} > 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

(N) $5x^2 - 2x > 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 0.4$;

(D) $e^x > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 0.4)$	$(0.4, +\infty)$
(N)	$(+)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{5x^2-2x}{e^x} > 0$ è verificata per $x < 0$ e per $x > 0.4$. Pertanto, la funzione è positiva negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0.4, +\infty)$ e negativa nell'intervallo $(0, 0.4)$.

5. Limiti e asintoti

Dal momento che la funzione non presenta alcun punto di accumulazione in cui non risulta definita, possiamo escludere la presenza di asintoti verticali.

Verifichiamo la presenza di eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{e^x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{e^x} = +\infty$$

Ne consegue che la retta orizzontale di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale (destro) della funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$.

Verifichiamo ora la presenza di un eventuale asintoto obliquo (sinistro):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x}{xe^x}$$

A numeratore abbiamo un binomio di secondo grado che tende a $+\infty$ (per la gerarchia degli infiniti), mentre a denominatore $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$ e, applicando il secondo teorema di De l'Hôpital, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0^-$. Pertanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x}{xe^x} = \frac{+\infty}{0^-} = +\infty \cdot -\infty = -\infty.$$

Abbiamo così verificato che la funzione non presenta alcun asintoto obliquo.

6. $f'(x) \geq 0$: ricerca dei punti di massimo e di minimo

Essendo la funzione continua e derivabile in tutti i punti dell'insieme di esistenza ed essendo definita su tutto $\mathbb{R}$, se esistono punti di massimo o minimo, essi sono punti stazionari. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x-2)\cdot e^x - (5x^2-2x)\cdot e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^x(-5x^2+12x-2)}{e^{2x}} \\ &= \frac{-5x^2+12x-2}{e^x} \end{aligned}$$

Studiamo la condizione necessaria (o del prim'ordine) data dal Teorema di Fermat, ovvero $f'(x) = 0$ da cui $\frac{-5x^2+12x-2}{e^x} = 0$, che implica

$$-5x^2 + 12x - 2 = 0.$$

Il trinomio di secondo grado ha radici

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 - 4\cdot(-5)\cdot(-2)}}{-10} = \frac{12 - 2\sqrt{26}}{10} = \frac{6-\sqrt{26}}{5} \approx 0.1802$$

e

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 - 4\cdot(-5)\cdot(-2)}}{-10} = \frac{12 + 2\sqrt{26}}{10} = \frac{6+\sqrt{26}}{5} \approx 2.2198$$

Ne consegue che i punti $x_1 = 0.1802$ e $x_2 = 2.2198$ sono punti stazionari, candidati ad essere punti di massimo o di minimo relativo.

Per stabilirne la natura, studiamo la condizione sufficiente data dal criterio di monotonia, ovvero $f'(x) > 0$ da cui $\frac{-5x^2+12x-2}{e^x} > 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

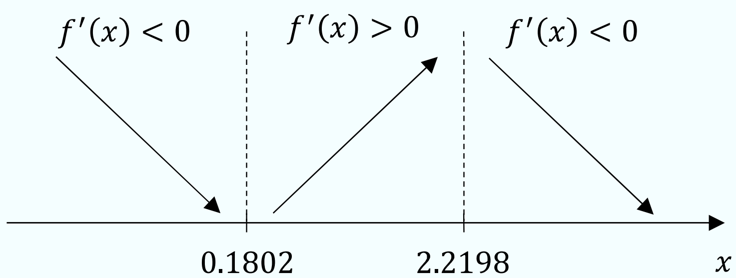
(N) $-5x^2 + 12x - 2 > 0$ per $0.1802 < x < 2.2198$;

(D) $e^x > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, 0.1802)$	$(0.1802, 2.2198)$	$(2.2198, +\infty)$
(N)	$(-)$	$(+)$	$(-)$
(D)	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$

La condizione $\frac{-5x^2+12x-2}{e^x} > 0$ è verificata per $0.1802 < x < 2.2198$. Pertanto, la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $(-\infty, 0.1802)$ e $(2.2198, +\infty)$, e strettamente crescente nell'intervallo $(0.1802, 2.2198)$. Dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse



risulta che il punto di ascissa $x = 0.1802$ è punto di minimo relativo, in cui la funzione vale $f(0.1802) \approx -0.1654$, e il punto di ascissa $x = 2.2198$ è punto di massimo relativo, in cui la funzione vale $f(2.2198) \approx 2.1941$. Inoltre, $x = 0.1802$ è anche punto di minimo assoluto perché $-0.1654 < \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, mentre $x = 2.2198$ è soltanto punto di massimo relativo perché $2.1941 < +\infty$ (la funzione è illimitata superiormente).

7. Eventuali punti in cui f non è continua

La funzione è continua in tutti i punti dell'insieme di esistenza.

8. $f''(x)$: ricerca dei punti di flesso

Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$, applicando le opportune regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-10x+12)\cdot e^x - (-5x^2+12x-2)\cdot e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^x(5x^2-22x+14)}{e^{2x}} \\ &= \frac{5x^2-22x+14}{e^x}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata seconda per determinare gli eventuali punti di flesso e gli intervalli in cui funzione è concava o convessa, ovvero $f'(x) \geq 0$, da cui $\frac{5x^2-22x+14}{e^x} \geq 0$. Trattandosi di una disequazione fratta, la condizione è verificata soltanto se il numeratore (N) e il denominatore (D) hanno lo stesso segno.

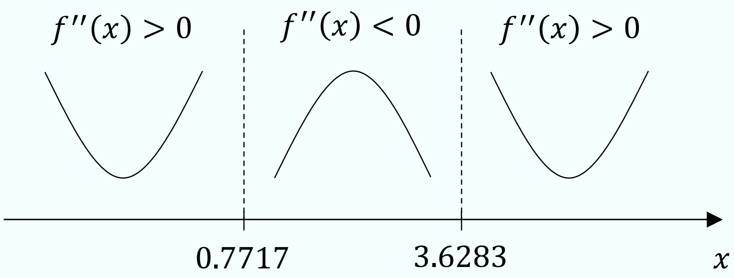
(N) $5x^2 - 22x + 14 \geq 0$ se $x \leq 0.7717$ oppure se $x \geq 3.6283$

(D) $e^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, 0.7717)$	$(0.7717, 3.6283)$	$(3.6283, +\infty)$
(N)	$(+)$	$(-)$	$(+)$
(D)	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(N)}{(D)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La condizione $\frac{5x^2-22x+14}{e^x} \geq 0$ è verificata per $x \leq 0.7717$ e per $x \geq 3.6283$. In particolare, $x = 0.7717$ e $x = 3.6283$ sono punti di flesso della funzione. Inoltre, dalla seguente rappresentazione sull'asse delle ascisse:



risulta che la funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, 0.7717)$ e $(3.6283, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(0.7717, 3.6283)$.

Andiamo ora a determinare la natura dei due punti di flesso valutando $f'(0.7717)$ e $f'(3.6283)$:

$$f'(0.7717) = 1.9796$$

e

$$f'(3.6283) = -0.6450.$$

Pertanto, entrambi i flessi sono a tangente obliqua (la retta tangente è inclinata positivamente nel primo caso, negativamente nel secondo).

Grafico

Possiamo finalmente rappresentare il grafico della funzione: