

ESERCIZI DI MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management



UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Fascicolo n. 2

Funzioni di una variabile reale

- *Dominio di una funzione*
- *Funzioni continue*
- *Calcolo dei limiti*
- *Asintoti*

Carlo Alberto Magni

magni@unimore.it

Dario Vezzali

dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Dominio di una funzione

Esercizio 1, pag. 17 (Videolibro - Fascicolo n. 2)

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Soluzione.

Per la ricerca del dominio (o campo di esistenza) dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &\neq 0 \\(x + 1) \cdot (x - 1) &\neq 0 \\x &\neq \pm 1\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$b) f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice dispari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+1} &\neq 0 \\ x+1 &\neq 0 \\ x &\neq -1\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

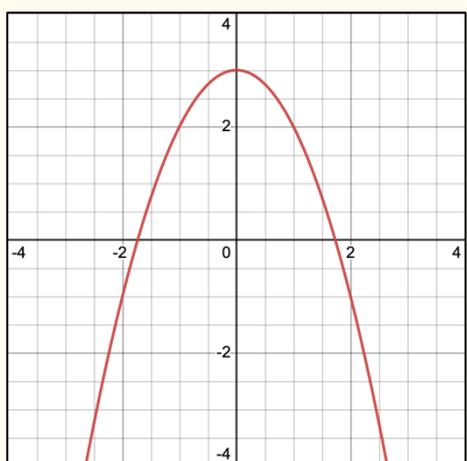
$$c) f(x) = \sqrt{3 - x^2}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$3 - x^2 \geq 0.$$

Visualizziamo graficamente su un piano cartesiano la parabola (con concavità verso il basso) descritta dalla legge $y = 3 - x^2$:



Sapendo che $3 - x^2 = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$, ovvero che il grafico della parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$, risulta evidente che la condizione $3 - x^2 \geq 0$ è verificata per

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

¹ Il grafico è stato ottenuto utilizzando l'elaboratore grafico *desmos* (<https://www.desmos.com/>)

$$d) f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo una funzione esponenziale avente come esponente un radicale con indice della radice pari, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ è sufficiente imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero

$$x - 2 \geq 0$$

$$x \geq 2.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2, +\infty).$$

$$e) f(x) = \ln(2 + \sqrt{x-2})$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale e, all'interno dell'argomento del logaritmo, un radicale con indice della radice pari. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 + \sqrt{x - 2} > 0 \end{cases}$$

Imponendo la prima condizione del sistema, risulta automaticamente verificata anche la seconda. Infatti, se sommiamo una quantità maggiore o uguale a 0 ($x - 2$ e, di conseguenza, $\sqrt{x - 2}$) ad una quantità positiva (2), otteniamo sicuramente una quantità positiva. Pertanto, possiamo ridurre il precedente sistema alla verifica della seguente condizione:

$$\begin{aligned} x - 2 &\geq 0 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2, +\infty).$$

$$f) f(x) = \frac{7}{\ln(4-x)}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(4-x) \neq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln(4-x)} \neq e^0 \\ x < 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4-x \neq 1 \\ x < 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (-\infty, 3) \cup (3, 4).$$

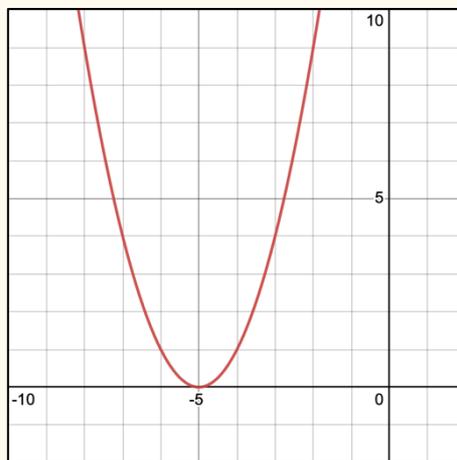
$$g) f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+10x+25}}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che il radicando sia maggiore o uguale a 0. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} \neq 0 \\ x^2 + 10x + 25 \geq 0 \end{cases}$$

La prima condizione è soddisfatta per $x^2 + 10x + 25 \neq 0$. Questo implica che il sistema è risolto per tutti gli x tali che $x^2 + 10x + 25 \neq 0$. Visualizziamo graficamente su un piano cartesiano la parabola (con concavità verso l'alto) descritta dalla legge $y = x^2 + 10x + 25$:



Poiché $x^2 + 10x + 25 = 0$ per $x = -5$, risulta evidente che la parabola è strettamente positiva e tangente all'asse delle ascisse in corrispondenza del punto $(-5, 0)$. Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty).$$

$$h) f(x) = \frac{2x-x^2}{\ln(x-10)}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(x-10) \neq 0 \\ x-10 > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln(x-10)} \neq e^0 \\ x > 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-10 \neq 1 \\ x > 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \neq 11 \\ x > 10 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (10, 11) \cup (11, +\infty).$$

$$i) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un logaritmo naturale e, all'interno dell'argomento del logaritmo, una frazione. Per la ricerca del dominio della funzione dobbiamo, quindi, imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 4 > 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases}$$

Consideriamo singolarmente la disequazione fratta $\frac{x+1}{x-4} > 0$. La prima cosa da fare è studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D).

$$(N) \quad x + 1 > 0; x > -1;$$

$$(D) \quad x - 4 > 0; x > 4.$$

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 4)$	$(4, +\infty)$
(N)	(-)	(+)	(+)
(D)	(-)	(-)	(+)
$\frac{(N)}{(D)}$	(+)	(-)	(+)

La disequazione $\frac{x+1}{x-4} > 0$ è verificata per $x < -1$ e per $x > 4$. Possiamo, quindi, riscrivere il precedente sistema nella forma

$$\begin{cases} x < -1 \text{ oppure } x > 4 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < -1 \text{ oppure } x > 4 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty).$$

$$1) f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo due radicali con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando di entrambi sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

da cui

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \left[\frac{3}{2}, 2 \right].$$

$$\text{m) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - e^x}$$

Soluzione.

In questo caso, per la ricerca del dominio dobbiamo semplicemente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$\begin{aligned} 1 - e^x &\neq 0 \\ e^x &\neq 1 \end{aligned}$$

Applicando la funzione logaritmo naturale ad entrambi i membri, otteniamo

$$\begin{aligned} \ln e^x &\neq \ln 1 \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$n) f(x) = \sqrt{|2x - 1| - 3}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo un radicale con indice della radice pari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che il radicando sia maggiore o uguale a 0, ovvero:

$$|2x - 1| - 3 \geq 0$$

$$|2x - 1| \geq 3$$

Quando incontriamo una disequazione in cui è presente un valore assoluto, del tipo $|f(x)| \geq k$, la sua soluzione è data dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni $f(x) \leq -k$ e $f(x) \geq k$. Di conseguenza, la soluzione della disequazione $|2x - 1| \geq 3$ è data dall'unione delle soluzioni $2x - 1 \leq -3$ e $2x - 1 \geq 3$.

$$2x - 1 \leq -3 \quad \text{oppure} \quad 2x - 1 \geq 3$$

$$2x \leq -2 \quad \text{oppure} \quad 2x \geq 4$$

$$x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 2$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty).$$

$$p) f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$$

Soluzione.

In questo caso, dobbiamo semplicemente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero:

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &\neq 0 \\x^2 &\neq 9 \\x &\neq \pm 3\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

$$q) f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+4}$$

Soluzione.

In questo caso, la legge individua un numero reale per ogni $x \in \mathbb{R}$, Infatti, il numeratore non richiede nessuna condizione particolare di esistenza e il denominatore non si annulla mai:

$$2x^2 + 4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

$$s) f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-4}}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un radicale con indice della radice dispari. Di conseguenza, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0 (e non necessariamente positivo), ovvero

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{x^2-4} &\neq 0 \\ x^2-4 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 4 \\ x &\neq \pm 2\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$v) f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo una funzione esponenziale avente come base 2 e come esponente una frazione. Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ è sufficiente imporre che il denominatore della frazione sia diverso da 0, ovvero:

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$w) f(x) = \frac{x}{1-2^x}$$

Soluzione.

In questo caso, per la ricerca del dominio è sufficiente imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$1 - 2^x \neq 0$$

$$2^x \neq 1$$

Applicando ad entrambi i membri la funzione logaritmo naturale, otteniamo:

$$\ln 2^x \neq \ln 1$$

$$x \ln 2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$z) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\ln x}$$

Soluzione.

In questo caso, abbiamo a denominatore un logaritmo. Di conseguenza, per la ricerca del dominio non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Inoltre, avendo un radicale a numeratore, dobbiamo imporre anche che il radicando sia maggiore o uguale a 0. Otteniamo, quindi, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 - \ln x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che la seconda condizione è più stringente della terza. Di conseguenza, la terza condizione può essere ignorata. Pertanto, possiamo ridurre il precedente sistema alla verifica delle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 - \ln x \neq 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della prima condizione, otteniamo

$$\begin{cases} e^{\ln x} \neq e^1 \\ x > 0 \\ x \neq e \\ x > 0 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (0, e) \cup (e, +\infty).$$

Da notare che il numero di Nepero e lo possiamo approssimare al valore 2.718282, perciò identifica una quantità maggiore di 0.

Esercizio 6, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno A

Il dominio di $f(x) = \sqrt{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ è

- A. $(2, +\infty)$
- B. $[-1, +\infty)$
- C. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- D. $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$

Soluzione.

La soluzione dell'esercizio è riportata anche nel seguente video del Prof. Magni: [Matematica generale e finanziaria - Soluzione prova intermedia 27 gennaio 2022 \(Turno A\) - Esercizio 6.](#)

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \frac{x}{x-2} > 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

La terza condizione può essere omessa perché, se è soddisfatta la seconda, allora lo è anche la terza (se fosse $x - 2 \neq 0$, allora $\frac{x}{x-2}$ non sarebbe neppure definita):

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases}$$

Consideriamo singolarmente la disequazione fratta $\frac{x}{x-2} > 0$. La prima cosa da fare è studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D).

(N) $x > 0$;

(D) $x - 2 > 0; x > 2$.

Andiamo, quindi, a studiare il segno della disequazione fratta nei singoli intervalli in cui è definita, con l'ausilio della seguente tabella:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
(N)	(-)	(+)	(+)
(D)	(-)	(-)	(+)
$\frac{(N)}{(D)}$	(+)	(-)	(+)

La disequazione fratta $\frac{x}{x-2} > 0$ è verificata per $x < 0$ e per $x > 2$. Possiamo, quindi, riscrivere il precedente sistema nella forma

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \text{ oppure } x > 2$$

da cui

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

Risulta evidente che il primo sistema è risolto da tutti gli x tali che $-1 \leq x < 0$ e il secondo sistema è risolto da tutti gli x tali che $x > 2$.

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [-1, 0) \cup (2, +\infty).$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	D	...

Esercizio 6, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno B

Il dominio di $f(x) = \sqrt{x-2} + \ln(x-1) + \frac{1}{x-3}$ è

- A. $(1, 3) \cup (3, +\infty)$
- B. $(1, 2) \cup [2, +\infty)$
- C. $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
- D. $[2, 3) \cup (3, +\infty)$

Soluzione.

La soluzione dell'esercizio è riportata anche nel seguente video del Prof. Magni: [Matematica generale e finanziaria - Soluzione prova intermedia 27 gennaio 2022 \(Turno B\) - Esercizio 6.](#)

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

La seconda condizione è soddisfatta se è soddisfatta la prima, quindi può essere omessa:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = [2, 3) \cup (3, +\infty).$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	D	...

Esercizio 2, prova totale MGF/MMF del 30/06/2022*Il dominio della funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\ln(x-4)}$$

è

- A. nessuna delle seguenti
- B. $[4, 5)$
- C. $(4, 5]$
- D. $(4, 5)$

Soluzione.

Per la ricerca del dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ \ln(x - 4) \neq 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della seconda condizione, otteniamo

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ e^{\ln(x-4)} \neq e^0 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x - 4 \neq 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \neq 5 \\ x > 4 \end{cases}$$

Le prime due condizioni posso essere riassunte nella seguente condizione: $x < 5$. Pertanto, il sistema diventa

$$\begin{cases} x < 5 \\ x > 4 \end{cases}$$

che è soddisfatto da tutti gli x tali che $4 < x < 5$. Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (4, 5)$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	D

Funzioni continue

Esercizio 6, prova totale MGF/MMF del 14/07/2022

Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ che rende continua su tutto \mathbb{R} la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 + a, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- A. $a = 0$
- B. $a = 1$
- C. $a = -1$
- D. la funzione è discontinua in \mathbb{R} per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua per $x \neq 0$ ed è continua nel punto $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Per verificare l'esistenza di tale limite, occorre verificare innanzi tutto se esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{ax} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + a = a.$$

Quindi, il limite esiste se $a = 1$ e risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$. Inoltre, $f(0) = e^0 = 1$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto \mathbb{R} per $a = 1$.

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la B. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	B	...

Esercizio 1, prova totale MGF/MMF del 27/01/2022

$$\text{La funzione } f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & \text{se } x < 0 \\ -x^4 + 3(x^2 + a), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- A. è continua in $x = 0$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$
 B. è discontinua in $x = 0$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$
 C. è continua in $x = 0$ se $a = 1$
 D. è continua in $x = 0$ se $a = 3$

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua per $x \neq 0$ ed è continua nel punto $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Per verificare l'esistenza di tale limite, occorre verificare innanzi tutto se esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^4 + 3(x^2 + a) = 3a$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x + 2 = 3.$$

Quindi, il limite esiste se $3a = 3$, cioè $a = 1$, e risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$. Inoltre, $f(0) = -0^4 + 3(0^2 + 1) = 3$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto \mathbb{R} per $a = 1$.

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
C

Esercizio 7.7, pag. 169 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 1 \\ a - \frac{b}{x}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 5, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

sia continua in \mathbb{R} .

Soluzione.

La funzione $f(x)$, definita a tratti, è continua nei punti $x = 1$ e $x = 3$ se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ e

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, rispettivamente. Per verificare l'esistenza di tali limiti, occorre innanzi tutto

verificare se esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

In particolare, occorre verificare che $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$. Tali condizioni devono

essere verificate contemporaneamente e danno luogo al seguente sistema di due equazioni

in due incognite:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} a - \frac{b}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} a - \frac{b}{x} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a - \frac{1}{3}b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ b + 3 - \frac{1}{3}b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ \frac{2}{3}b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

Per $a = 6$ e $b = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} a - \frac{b}{x} = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} a - \frac{b}{x} = 5$. Inoltre, $f(1) = 3$ e $f(3) = 6 - \frac{3}{3} = 5$. Ne consegue che $f(x)$ è continua su tutto \mathbb{R} per $a = 6$ e $b = 3$.

Calcolo dei limiti

Esercizio 7.19, pag. 170 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare i seguenti limiti:

$$I) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^2)$$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $+\infty - \infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \left(\frac{5}{x} + 2 \right) = -\infty \cdot (0 + 2) = -\infty$$

Il limite può essere risolto mediante la gerarchia degli infiniti: essendo il termine di secondo grado un infinito di ordine superiore al termine di primo grado, ne consegue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty.$$

$$II) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x}) \cdot \left(e^{\frac{2}{x}} - 2 \right)$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x}) \cdot \left(e^{\frac{2}{x}} - 2 \right) = (+\infty) \cdot (e^0 - 2) = (+\infty) \cdot (1 - 2) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$$

$$III) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Attraverso semplici operazioni algebriche e applicando le proprietà delle potenze,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Il limite può essere risolto anche notando che il numeratore ha grado $3/2$ e il denominatore ha grado 2. Il denominatore è dunque un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} = 0.$$

$$\text{IV) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x} \right)$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x} \right) = 5 + 1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\text{V) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2+1} + \frac{1}{x} \right)$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2+1} + \frac{1}{x} \right) = +\infty + 0^+ = +\infty$$

$$\text{VI) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x} \right)$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x} \right) = 5 + 0^+ - 0^+ = 5$$

$$\text{VII) } \lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^{3x}$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^{3x} = 3^3 = 27$$

$$\text{VIII) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x} \right)$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = 0^+ \cdot \left(1 - \frac{2}{-\infty}\right) = 0^+ \cdot (1 - 0^-) = 0^+$$

Esercizio 7.24, pag. 171 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$.

Soluzione.

Si noti che, se $x > 0$, allora $\sqrt{x^2} = |x| = x \geq 0$; se invece $x < 0$, allora $\sqrt{x^2} = |x| = -x \geq 0$.

Pertanto, se x tende a zero per valori positivi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \frac{x}{x}\right) = 0^+ + 1 + 1 = 2;$$

se x tende a 0 per valori negativi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 1 + \frac{-x}{x}\right) = 0^- + 1 - 1 = 0$$

Abbiamo così verificato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$. Ne consegue che

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right).$$

Esercizio 7.25, pag. 171 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Calcolare i seguenti limiti:

$$I) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Prima di giungere a conclusioni affrettate, conviene scomporre (con somma e prodotto) i trinomi di secondo grado a numeratore e denominatore, come segue:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x - 3} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$II) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3} \right)$$

Soluzione.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0}.$$

Per capire se $\frac{1}{0}$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$ è necessario distinguere il caso in cui x tende a 0 da destra dal caso in cui x tende a 0 da sinistra:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3} \right) = \frac{1}{1^+ - 1} - \frac{1}{1 - 1^+} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^-} = +\infty - (-\infty) = +\infty.$$

Se x tende a 0 da sinistra,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3} \right) = \frac{1}{1^- - 1} - \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^-} - \frac{1}{0^+} = -\infty - \infty = -\infty.$$

$$\text{III) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}$$

Soluzione.

In questo caso, si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo scomporre la differenza di quadrati a denominatore $(x^2 - 36)$ come $(x + 6) \cdot (x - 6)$ e applicare una tecnica di “razionalizzazione”, moltiplicando e dividendo per $2 + \sqrt{x-2}$, come segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{(x+6) \cdot (x-6)} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-2}}{2 + \sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - (x-2)}{(x+6) \cdot (x-6) \cdot (2 + \sqrt{x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - x}{(x+6) \cdot (x-6) \cdot (2 + \sqrt{x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x-6)}{(x+6) \cdot (x-6) \cdot (2 + \sqrt{x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{(x+6) \cdot (2 + \sqrt{x-2})} \\ &= \frac{-1}{12 \cdot 4} = -\frac{1}{48} \end{aligned}$$

Asintoti

Esercizio 7.38, pag. 173 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Verificare che la retta di equazione $y = 9x$ è asintoto per $x \rightarrow \pm\infty$ di $f(x) = \frac{9x^2+1}{x}$.

Soluzione.

Per verificare che la retta di equazione $y = 9x$ è asintoto (obliquo) di $f(x) = \frac{9x^2+1}{x}$ dobbiamo verificare che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ corrisponda al coefficiente angolare della retta data. In particolare,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{9x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2}{x^2} = 9$$

Abbiamo così verificato che $m = 9$ è il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo della funzione $f(x)$. Determiniamo ora il termine noto q , come segue:

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2+1}{x} - 9x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2+1-9x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Pertanto, abbiamo verificato che la retta di equazione $y = 9x$ è asintoto obliquo della funzione $f(x)$.

Esercizio 7.43, pag. 173 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Determinare, se esistono, gli asintoti delle seguenti funzioni:

$$I) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. Per la determinazione del dominio, dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ovvero

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\neq 0 \\ e^x &\neq 1 \end{aligned}$$

Applicando la funzione logaritmo naturale ad entrambi i membri, otteniamo

$$\begin{aligned} \ln e^x &\neq \ln 1 \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Calcoliamo di seguito il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1}$. Se x tende a 0 da destra, allora e^x tende a 1 per valori maggiori di 1 e, di conseguenza, $(e^x - 1)$ tende a 0 per valori positivi. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Se x tende a 0 per valori negativi, allora e^x tende a 1 per valori minori di 1 e, di conseguenza, $(e^x - 1)$ tende a 0 per valori negativi. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = 0$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Verifichiamo ora la presenza di eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

Ne consegue che le rette orizzontali di equazione $y = 1$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali della funzione $f(x)$, rispettivamente per $x \rightarrow +\infty$ (asintoto orizzontale destro) e per $x \rightarrow -\infty$ (asintoto orizzontale sinistro). Essendo presenti asintoti orizzontali per $x \rightarrow \pm\infty$, possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui.

$$\text{II) } f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 2}$$

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. Per la determinazione del dominio, non solo dobbiamo imporre che il denominatore della funzione $f(x)$ sia diverso da 0, ma anche che gli argomenti dei logaritmi a numeratore e denominatore siano strettamente positivi. Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 2 \end{cases}$$

Applicando la funzione esponenziale ad entrambi i membri della seconda condizione, otteniamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{\ln x} \neq e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty).$$

Calcoliamo di seguito $\lim_{x \rightarrow e^{2+}} \frac{\ln x}{\ln x - 2}$ e $\lim_{x \rightarrow e^{2-}} \frac{\ln x}{\ln x - 2}$. Se x tende a e^2 per valori maggiori di e^2 , allora $\ln x$ tende a 2 per valori maggiori di 2. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow e^{2+}} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \frac{2}{2^+ - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Se x tende a e^2 per valori minori di e^2 , allora $\ln x$ tende a 2 per valori negativi. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow e^{2-}} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \frac{2}{2^- - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = e^2$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow e^2$.

Calcoliamo il limite anche in corrispondenza dell'estremo di sinistra del dominio, per verificare se la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale (destro):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \frac{2}{\ln x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 1.$$

Il limite è finito, ne consegue che la retta verticale di equazione $x = 0$ non è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

Verifichiamo ora la presenza di un eventuale asintoto orizzontale destro:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{\ln x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 1$$

Ne consegue che la retta orizzontale di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ (asintoto orizzontale destro). Essendo presente un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$, possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui.

$$\text{III) } f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln(x + 1)$$

Soluzione.

Per prima cosa, occorre determinare il dominio della funzione per verificare l'esistenza di eventuali punti di accumulazione in cui la funzione non risulta definita. Infatti, è in corrispondenza di tali punti che vanno ricercati gli asintoti verticali. In questo caso, abbiamo un radicale, con indice della radice dispari, e un logaritmo. Di conseguenza, per la determinazione del dominio è sufficiente imporre che l'argomento del logaritmo sia maggiore di 0, ovvero

$$\begin{aligned} x + 1 &> 0 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\text{Dom } f = (-1, +\infty).$$

La retta verticale di equazione $x = -1$, in corrispondenza dell'estremo di sinistra del dominio, è l'unica candidata ad essere asintoto verticale della funzione per $x \rightarrow -1^+$.

Calcoliamo, quindi, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{x} + \ln(x + 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{x} + \ln(x + 1) = -1 - \ln 0^+ = -\infty$$

Ne consegue che la retta verticale di equazione $x = -1$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow -1^+$ (asintoto verticale destro).

Verifichiamo ora la presenza di un eventuale asintoto orizzontale destro:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} + \ln(x + 1) = +\infty + \ln +\infty = +\infty$$

Ne consegue che non abbiamo alcun asintoto orizzontale destro. Verifichiamo, allora, la presenza di un eventuale asintoto obliquo. Ricordando che x è un infinito superiore a $\ln x$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{\ln(x + 1)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\ln x}{x} \right) = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che non abbiamo nemmeno un asintoto obliquo.

Esercizio 6, prova totale MGF/MMF del 09/09/2022

La retta $y = 2$ è

A. asintoto orizzontale per $f(x) = \frac{x^3+5x}{2x^3+3}$

B. asintoto orizzontale per $f(x) = \frac{2x^4+2x}{0,5x^4+4}$

C. asintoto orizzontale per $f(x) = \frac{x^4+2x}{0,5x^4+4}$

D. asintoto orizzontale per $f(x) = \frac{x^2+2x}{0,5x^3+4}$

Soluzione.

Affinché la retta orizzontale di equazione $y = 2$ sia asintoto orizzontale per $f(x)$, occorre che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$. Pertanto, escludiamo sicuramente la risposta D perché, per ottenere un limite finito, a numeratore e denominatore della funzione dobbiamo avere infiniti dello stesso ordine. Verifichiamo di seguito i restanti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x}{0,5x^4 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{0,5x^4} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x}{0,5x^4 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{0,5x^4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la C. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
...	C	...