ESERCIZI DI
MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24

Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

Fascicolo n. 1
Algebra lineare delle matrici

- *Operazioni con le matrici*
- *Determinante di una matrice quadrata*
- *Matrice inversa*
- *Rango di una matrice, matrici parametriche*
- *Sistemi lineari di equazioni*

Carlo Alberto Magni

magni@unimore.it

Dario Vezzali

dario.vezzali@unimore.it

Università di Modena e Reggio Emilia

Operazioni con le matrici

Esercizio 1, pag. 9 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Trovare la matrice X tale che $A + X = B$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

Possiamo scrivere l'equazione $A + X = B$ nella forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

da cui, con operazioni algebriche elementari, si ricava

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & -2-(-1) \\ 0-3 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2, pag. 9 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Eseguire i seguenti prodotti righe per colonne.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Prima di effettuare un prodotto righe per colonne si consiglia di controllare sempre che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda matrice.

Eseguendo il prodotto righe per colonne otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

La matrice risultante ha un numero di righe pari al numero di righe della prima matrice, e un numero di colonne pari al numero di colonne della seconda matrice (2×2 in questo caso).

b) $(8 \quad 5 \quad -1)_{1\times \mathbf{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}\times 1}$

Eseguendo il prodotto righe per colonne si ottiene

$$(8 \quad 5 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (8 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 4) = (6)_{1\times 1}$$

In questo caso, la matrice risultante è una matrice 1×1.

Esercizio 3, pag. 9 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ *verificare che* $A \cdot B \neq B \cdot A$.

<u>Soluzione</u>.

Questa verifica si potrebbe effettuare anche senza far calcoli. Infatti, dal prodotto righe per colonne $A \cdot B$ ci aspettiamo di ottenere una matrice 2×2, mentre dal prodotto righe per colonne $B \cdot A$ ci aspettiamo di ottenere una matrice 3×3. Avendo dimensioni diverse, le due matrici differiscono sicuramente.

Di seguito si riporta il calcolo dei due prodotti righe per colonne:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Ne consegue che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Esercizio 4, pag. 9 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ *verificare che* $(A+B)^T = A^T + B^T$.

<u>Soluzione</u>.

Calcoliamo inizialmente $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 1-2 \\ 3+0 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo $(A+B)^T$ mantenendo fissi gli elementi che si trovano sulla diagonale principale:

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ora calcoliamo singolarmente A^T e B^T (scambiando gli elementi che si trovano sulla diagonale secondaria):

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Infine, calcoliamo $A^T + B^T$:

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 3+0 \\ 1-2 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Determinante di una matrice quadrata

Esercizio 2, pag. 20 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ x^2+1 & x+1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} a-b & a^2 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Il determinante di una matrice quadrata 2×2 si calcola come differenza tra il prodotto degli elementi che stanno sulla diagonale principale e il prodotto degli elementi che stanno sulla diagonale secondaria. In questo caso, abbiamo

$$\det A = \left(1-\sqrt{3}\right) \cdot \left(1+\sqrt{3}\right) - \left(1-\sqrt{2}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) = 1 - 3 - (1-2) = -1.$$

Analogamente,

$$\det B = (x+1) \cdot (x+1) - 1 \cdot (x^2+1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1 = 2x.$$

Infine,

$$\det C = (a-b) \cdot (a+b) - a^2 \cdot 1 = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2.$$

Esercizio 2, pag. 20 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Applicando la regola di Sarrus, calcolare i seguenti determinanti:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$$

Soluzione.

Per calcolare il determinante con la regola di Sarrus, si aggiunge una "copia" delle colonne 1 e 2 a destra della matrice (in blu) e si applica lo schema a pagina 13 del Videolibro (Fascicolo n. 1):

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 9 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{matrix} \\ &= 6\cdot 0\cdot(-6) + 9\cdot 3\cdot 2 + (-9)\cdot 4\cdot 5 - \big((-9)\cdot 0\cdot 2 + 6\cdot 3\cdot 5 + 9\cdot 4\cdot(-6)\big) \\ &= 54 - 180 - (90 - 216) \\ &= 0\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{matrix} \\ &= 1\cdot(-5)\cdot(-9) + 4\cdot 6\cdot(-3) + 3\cdot 2\cdot 6 - \big(3\cdot(-5)\cdot(-3) + 1\cdot 6\cdot 6 + 4\cdot 2\cdot(-9)\big) \\ &= 45 - 72 + 36 - (45 + 36 - 72) \\ &= 0\end{aligned}$$

Esercizio 3, pag. 20 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Calcolare il seguente determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Soluzione.

In questo caso si utilizza il metodo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine n. Si consiglia di scegliere sempre una riga o una colonna in cui siano presenti degli zeri.

Sviluppiamo il determinante secondo la terza riga:

$$\det A = -3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

dove $(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ e $(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ sono i complementi algebrici degli elementi -3 e 6, rispettivamente.

In particolare, $\det A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ e $\det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ sono i rispettivi minori complementari degli elementi -3 e 6. A_{31} e A_{32} sono ottenuti come segue:

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ritornando al calcolo del determinante,

$$\begin{aligned} \det A &= -3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot \big(24 - (-15)\big) - 6 \cdot (6 - 6) \\ &= -117 \end{aligned}$$

Esercizio 4, pag. 20 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Calcolare il seguente determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

Sviluppiamo il determinante secondo la seconda colonna:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente i due determinanti dei minori complementari degli elementi 1 e 4:

$$\begin{aligned}
\det A_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{matrix} \\
&= 0 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - (1 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 0) \\
&= 12 + 6 \\
&= 18 \\
\det A_{42} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 - \big((-1) \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \cdot 1\big) \\
&= 9 - 2 - (-6) \\
&= 13
\end{aligned}$$

Ritornando al calcolo del determinante,

$$\begin{aligned}
\det A &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \cdot 18 + 4 \cdot 13 \\
&= 34
\end{aligned}$$

Matrice inversa

Esercizio 1, pag. 25 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Calcolare, se esistono, le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Per prima cosa, bisogna verificare che A sia invertibile (ovvero che $\det A$ sia diverso da 0):

$$\det A = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1 \neq 0 \Longrightarrow A \text{ è invertibile.}$$

Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinare la matrice inversa.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta A^* dei complementi algebrici degli elementi di A^T:

$$A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 2 & (-1)^{1+2} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa A^{-1} premoltiplicando la matrice A^* per lo scalare $\frac{1}{\det A}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice A^* per $\det A$):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$. Per prima cosa, bisogna verificare che B sia invertibile (ovvero che $\det B$ sia diverso da 0).

$$\det B = x \cdot y - 1 \cdot 1 = xy - 1 \neq 0 \text{ se } xy \neq 1, \text{ cioè } x \neq \frac{1}{y}, \text{ con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0.$$

Seguendo lo stesso procedimento applicato in precedenza, ricaviamo la matrice trasposta B^T:

$$B^T = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}.$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta B^* dei complementi algebrici degli elementi di B^T:

$$B^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot y & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa B^{-1} premoltiplicando la matrice B^* per lo scalare $\frac{1}{\det B}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice B^* per $\det B$):

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = \frac{1}{xy - 1} \cdot \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che è una matrice triangolare superiore. Per prima cosa, bisogna verificare che C sia invertibile (ovvero che $\det C$ sia diverso da 0). Sviluppiamo il determinante secondo la prima colonna:

$$\det C = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1 \Longrightarrow C \text{ è invertibile.}$$

Seguendo lo stesso procedimento applicato in precedenza, ricaviamo la matrice trasposta C^T:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che C^T è una matrice triangolare inferiore. Ricaviamo a questo punto la matrice aggiunta C^* dei complementi algebrici degli elementi di C^T:

$$\begin{aligned} C^* &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) & -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) & 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\ -1 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) & 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) & -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \\ 1 \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1) & -1 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) & 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa C^{-1} premoltiplicando la matrice C^* per lo scalare $\frac{1}{\det C}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice C^* per $\det C$):

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^* = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3a, pag. 25 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta invertibile la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2k & 2+2k & 6 \\ k & 4-2k & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Per prima cosa, bisogna valutare il determinante della matrice A. Sviluppiamo secondo la prima colonna:

$$\begin{aligned}
\det A &= 2k \cdot (-1^{2+1}) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4-2k & 3 \end{vmatrix} + k \cdot (-1^{3+1}) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2+2k & 6 \end{vmatrix} \\
&= -2k \cdot (2 \cdot 3 - \big(3 \cdot (4-2k)\big) + k \cdot (2 \cdot 6 - \big(3 \cdot (2+2k)\big) \\
&= -2k \cdot \big(6 - (12-6k)\big) + k \cdot \big(12 - (6+6k)\big) \\
&= -2k \cdot (6 - 12 + 6k) + k \cdot (12 - 6 - 6k) \\
&= -2k \cdot (-6 + 6k) + k \cdot (6 - 6k) \\
&= 12k - 12k^2 + 6k - 6k^2 \\
&= -18k^2 + 18k
\end{aligned}$$

Affinché la matrice A sia invertibile deve valere la seguente condizione: $\det A \neq 0$:

$$-18k^2 + 18k \neq 0.$$

Raccogliendo a fattor comune $-18k$ otteniamo

$$-18k \cdot (k-1) \neq 0 \Longrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 1.$$

La matrice A risulta, quindi, invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Rango di una matrice, matrici parametriche

Esercizio 1, pag. 34 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, che è una matrice 2×3. Ne consegue che

$$r(A) \leq \min\{2, 3\} = 2.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo inizialmente la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 3 = -3 + 3 = 0.$$

Infine, consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 6 = -6 + 6 = 0.$$

Tutti i minori di ordine 2 hanno determinante nullo. Scendiamo allora di ordine e controlliamo se esiste almeno un minore di ordine 1 diverso da zero. In effetti, basta considerare il minore $|2| = 2 \neq 0$; ne consegue che $r(A) = 1$.

Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, anche in questo caso matrice 2×3. Ne consegue che

$$r(B) \leq \min\{2,3\} = 2.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(B) = 2$, perché la matrice B presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Consideriamo la matrice $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, che è una matrice 3×3. Ne consegue che

$$r(C) \leq 3.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo la matrice $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ e ne calcoliamo il determinante con il metodo di Laplace, sviluppando secondo la terza colonna:

$$\det C = 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (10 \cdot 1 - 11 \cdot 8) = 6 \cdot (10 - 88) = -468 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(C) = 3$.

In alternativa alla definizione di rango di una matrice, avremmo potuto utilizzare il procedimento di Kronecker. Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 0 \cdot (-3) = 6 \neq 0.$$

Ne consegue che $2 \leq r(C) \leq 3$.

"Orliamo" la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ (ottenendo così la matrice C):

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 10 & 11 & 0 \\ \hline 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{array}\right).$$

A questo punto calcoliamo il determinante della matrice C con il metodo di Laplace, sviluppando secondo la terza colonna:

$$\det C = 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (10 \cdot 1 - 11 \cdot 8) = 6 \cdot (10 - 88) = -468 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(C) = 3$.

Esercizio 2, pag. 34 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Studiare il rango delle seguenti matrici in funzione di k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 8 & 2k \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 8 & 2k \end{pmatrix}$, che è una matrice 2×2. Ne consegue che

$$r(A) \leq 2.$$

Tuttavia, risulta evidente come il rango della matrice A dipenda dal parametro k. Per studiarlo, utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo).

In particolare, troviamo i valori del parametro k per i quali si annulla il determinante della matrice A.

$$\det A = k \cdot 2k - 1 \cdot 8 = 2k^2 - 8 = 2 \cdot (k^2 - 4) = 2 \cdot (k + 2) \cdot (k - 2).$$

Distinguiamo i seguenti casi:

Caso 1. Per $k = \pm 2$, il determinante della matrice A è uguale a zero ed esiste un minore di ordine 1 diverso da zero (ad esempio, $|8| = 8 \neq 0$) $\Longrightarrow r(A) = 1$.

Caso 2. Per $k \neq \pm 2$, il determinante della matrice A è diverso da zero $\Longrightarrow r(A) = 2$.

Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, che è una matrice 3×3. Ne consegue che

$$r(B) \leq 3.$$

Ancora una volta, risulta evidente come il rango della matrice B dipenda dal parametro k. Per studiarlo, utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo).

In particolare, troviamo i valori del parametro k per i quali si annulla il determinante della matrice B.

Calcoliamo il determinante della matrice B con il metodo di Laplace, sviluppando secondo la seconda colonna.

$$\begin{aligned}\det B &= 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (k \cdot (-1) - (-k) \cdot 1) \\ &= -4 \cdot (-k + k) \\ &= 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$r(B) \leq 2.$$

A questo punto, scendiamo di ordine considerando sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = 4 \neq 0.$$

Ne consegue che

$$r(B) = 2 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno B

Si calcoli il rango $r(A)$ di $A = \begin{pmatrix} 3 & 2.4 & -1 \\ 4.5 & 3.6 & -1.5 \\ a & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

A. $r(A) = 2$

B. $r(A) = 3$

C. $r(A) = 2 \text{ } se \text{ } a \neq 0$

D. $r(A) = 3 \text{ } se \text{ } a \neq 0$

Soluzione.

La soluzione dell'esercizio, utilizzando la definizione di rango di una matrice, è riportata nel seguente video del Prof. Magni: [Matematica generale e finanziaria - Soluzione prova intermedia 27 gennaio 2022 (Turno B) - Esercizio 1].

In alternativa alla definizione di rango di una matrice, potremmo utilizzare il procedimento di Kronecker. Consideriamo inizialmente la sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & 2.4 \\ 4.5 & 3.6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2.4 \\ 4.5 & 3.6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3.6 - 2.4 \cdot 4.5 = 10.8 - 10.8 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4.5 & -1.5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4.5 & -1.5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1.5) - (-1) \cdot 4.5 = -4.5 + 4.5 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2.4 & -1 \\ 3.6 & -1.5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2.4 & -1 \\ 3.6 & -1.5 \end{vmatrix} = 2.4 \cdot (-1.5) - (-1) \cdot 3.6 = -3.6 + 3.6 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2.4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2.4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2.4 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = 7.2 - 2 = 5.2 \neq 0.$$

Ne consegue che $2 \leq r(A) \leq 3$.

"Orliamo" la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2.4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (ottenendo così la matrice A):

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2.4 & -1 \\ \hline 4.5 & 3.6 & -1.5 \\ \hline a & -2 & 3 \end{array}\right).$$

A questo punto calcoliamo il determinante della matrice A con il metodo di Laplace, sviluppando secondo la prima colonna:

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{A} &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3.6 & -1.5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 4.5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2.4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + a \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2.4 & -1 \\ 3.6 & -1.5 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot \big(3.6 \cdot 3 - (-1.5) \cdot (-2)\big) - 4.5 \cdot \big(2.4 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2)\big) + a \cdot (2.4 \cdot (-1.5) - (-1) \cdot 3.6) \\
&= 3 \cdot (10.8 - 3) - 4.5 \cdot (7.2 - 2) + a \cdot (-3.6 + 3.6) \\
&= 23.4 - 23.4 + a \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ne consegue che $r(A) = 2 \quad \forall\, a$.

Quindi, la risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la A. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
A	…	…	…	…	…	…

Sistemi lineari di equazioni

Esercizio 1, pag. 45 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Risolvere il sistema $A \cdot X = B$ essendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

Possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ x + 5y - z = 7 \end{cases}$$

Siamo nel caso generale in cui $m \neq n$ (si tratta, infatti, di un sistema di m equazioni in n incognite; in particolare, di 2 equazioni in 3 incognite).

La prima cosa da fare è verificare la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema abbia soluzioni, data dal **teorema di Rouchè-Capelli**, ovvero che le matrici completa e incompleta del sistema abbiano lo stesso rango.

Consideriamo la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(A)$. La matrice A è una matrice 2×3. Ne consegue che

$$r(A) \leq \min\{2, 3\} = 2.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo inizialmente la sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 15 + 2 = 17 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(A) = 2$, perché la matrice A presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Consideriamo ora la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(C)$. La matrice C è una matrice 2×4. Ne consegue che

$$r(C) \leq \min\{2, 4\} = 2.$$

Se consideriamo la stessa sottomatrice di prima, avente determinante non nullo, possiamo concludere che $r(C) = 2$.

Le matrici A e C hanno entrambe rango 2, pertanto il sistema ammette soluzioni. In particolare, il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia, per esempio,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 - 5z \\ x + 5y = 7 + z \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D, mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti".

Possiamo riscrivere il sistema nella seguente forma matriciale:

$$D \cdot X = B, \text{ con } D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 - 5z \\ 7 + z \end{pmatrix}$$

dove

$$X = D^{-1} \cdot B.$$

Si ricorda che tale risultato viene ottenuto moltiplicando i termini a destra e sinistra dell'uguale per la matrice inversa D^{-1}:

$$\begin{aligned} D \cdot X &= B \\ D^{-1} \cdot D \cdot X &= D^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= D^{-1} \cdot B \\ X &= D^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Avendo determinante non nullo (l'abbiamo calcolato in precedenza), la matrice D ammette l'inversa. Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinarla.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta D^T:

$$D^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta D^* (matrice dei complementi algebrici degli elementi di D^T):

$$D^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{1+2} \cdot (-2) \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa D^{-1} premoltiplicando la matrice D^* per lo scalare $\frac{1}{\det D}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice D^* per $\det D$):

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot D^* = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-5z \\ 7+z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{17} \cdot (1-5z) + \frac{2}{17} \cdot (7+z) \\ -\frac{1}{17} \cdot (1-5z) + \frac{3}{17} \cdot (7+z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{17} - \frac{25}{17} z + \frac{14}{17} + \frac{2}{17} z \\ -\frac{1}{17} + \frac{5}{17} z + \frac{21}{17} + \frac{3}{17} z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{19}{17} - \frac{23}{17} z \\ \frac{20}{17} + \frac{8}{17} z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La soluzione generale del sistema è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{17} - \frac{23}{17} z \\ \frac{20}{17} + \frac{8}{17} z \\ z \end{pmatrix}$$

Per ogni $z \in \mathbb{R}$, il sistema ammette la soluzione $x = \frac{19}{17} - \frac{23}{17}z$, $y = \frac{20}{17} + \frac{8}{17}z$. Perciò, il sistema dato ammette ∞^1 soluzioni (cioè, infinite soluzioni dipendenti da 1 parametro). Le infinite soluzioni $(\frac{19}{17} - \frac{23}{17}z, \frac{20}{17} + \frac{8}{17}z, z)$ ottenute al variare del parametro z in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, se $z = 1$, allora si ottiene la soluzione particolare $(x, y, z) = \left(-\frac{4}{17}, \frac{28}{17}, 1\right)$. Se $z = -1$, allora si ottiene la soluzione particolare $(x, y, z) = \left(\frac{42}{17}, \frac{12}{17}, -1\right)$. E così via.

Esercizio 2, pag. 45 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Discutere e risolvere, al variare del parametro reale k, il sistema $A \cdot X = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & k \\ -k & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

Possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} kx + y + kz = 0 \\ ky + kz = 2k \\ -kx - y = -1 \end{cases}$$

Siamo nel caso particolare in cui $m = n$ (in particolare, si tratta di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite).

La prima cosa da fare è verificare se la matrice completa e la matrice incompleta del sistema hanno lo stesso rango. Il rango di A è $r(A) \leq 3$. Calcoliamo il determinante utilizzando la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det A &= k \cdot k \cdot 0 + 1 \cdot k \cdot (-k) + k \cdot 0 \cdot (-1) - \big(k \cdot k \cdot (-k) + 1 \cdot 0 \cdot 0 + k \cdot k \cdot (-1)\big) \\ &= -k^2 + k^3 + k^2 \\ &= k^3 \end{aligned}$$

Distinguiamo i seguenti casi:

Caso 1. Per $k = 0$, la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è uguale a zero; quindi, il rango di A è minore di 3. Poiché si verifica facilmente che tutti i minori di ordine 2 estratti dalla matrice A sono nulli, il suo rango è minore di 2 e, in particolare, è uguale a $r(A) = 1$ (infatti, $|1| = 1 \neq 0$). La matrice completa del sistema è uguale a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è minore di 3 (perché tutti i suoi minori di ordine 3 sono nulli) e, in particolare, è uguale a $r(C) = 2$, perché la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero. Pertanto, per il Teorema di Rouché-Capelli, le due matrici non hanno lo stesso rango e quindi il sistema è impossibile.

Caso 2. Per $k \neq 0$, il determinante della matrice A è diverso da zero, per cui il suo rango è $r(A) = 3$. Questo è anche il rango della matrice completa (infatti, la matrice A è una sua sottomatrice). Pertanto, il sistema è possibile ed ammette un'unica soluzione.

Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinare la matrice inversa.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & k & -1 \\ k & k & 0 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta A^* dei complementi algebrici degli elementi di A^T:

$$\begin{aligned}
A^* &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} k & -1 \\ k & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} k & -k \\ k & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} k & 0 \\ k & k \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -k \\ k & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k \cdot 0 - (-1) \cdot k & -(1 \cdot 0 - (-1) \cdot k) & 1 \cdot k - k \cdot k \\ -(0 \cdot 0 - (-k) \cdot k) & k \cdot 0 - (-k) \cdot k & -(k \cdot k - 0 \cdot k) \\ 0 \cdot (-1) - (-k) \cdot k & -(k \cdot (-1) - (-k) \cdot 1) & k \cdot k - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k & -k & k - k^2 \\ -k^2 & k^2 & -k^2 \\ k^2 & 0 & k^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa A^{-1} premoltiplicando la matrice A^* per lo scalare $\frac{1}{\det A}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice A^* per $\det A$):

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* \\
&= \frac{1}{k^3} \cdot \begin{pmatrix} k & -k & k - k^2 \\ -k^2 & k^2 & -k^2 \\ k^2 & 0 & k^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} & \frac{(1-k)}{k^2} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} & \frac{(1-k)}{k^2} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} \cdot 0 - \frac{1}{k^2} \cdot 2k + \frac{(1-k)}{k^2} \cdot (-1) \\ -\frac{1}{k} \cdot 0 + \frac{1}{k} \cdot 2k - \frac{1}{k} \cdot (-1) \\ \frac{1}{k} \cdot 0 + 0 \cdot 2k + \frac{1}{k} \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{k} - \frac{(1-k)}{k^2} \\ 2 + \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2k-1+k}{k^2} \\ \frac{2k+1}{k} \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-k-1}{k^2} \\ \frac{2k+1}{k} \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

Pertanto, al variare del parametro k in $\mathbb{R}$ (con $k \neq 0$), il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k-1}{k^2} \\ \frac{2k+1}{k} \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3c, pag. 45 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>.

In questo caso, essendo il vettore dei termini noti $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ci troviamo di fronte ad un sistema omogeneo del tipo $A \cdot X = 0$. Tale sistema ammette sempre la soluzione banale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Consideriamo la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e ne calcoliamo il determinante, per verificare se il sistema ammette anche soluzione propria (cioè, non banale). Questo avviene se e solo se $\det A = 0$. Sviluppiamo il determinante con il metodo di Laplace secondo la seconda riga:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(1 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)\big) + 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \\ &= -(2 - 3) + 2 + 3 \\ &= 1 + 5 = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che il sistema ammette soltanto la soluzione banale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3d, pag. 45 (Videolibro - Fascicolo n. 1)

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 5y - z = 0 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>.

Anche in questo caso, essendo il vettore dei termini noti $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ci troviamo di fronte ad un sistema omogeneo del tipo $A \cdot X = 0$. Tale sistema ammette sempre la soluzione banale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Consideriamo la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ e ne calcoliamo il determinante, utilizzando il metodo di Sarrus, per verificare se il sistema ammette anche soluzione propria. Questo avviene se e solo se $\det A = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-5) - \big(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1)\big) \\ &= -2 - 1 - 5 - (1 - 10 + 1) \\ &= -8 + 8 = 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che il sistema ammette anche soluzione propria. Riconducendoci al teorema di Rouchè-Capelli verifichiamo se le matrici completa e incompleta del sistema hanno lo stesso rango.

Nel caso della matrice incompleta A abbiamo appena verificato che

$$r(A) \leq 2.$$

Scendiamo allora di ordine e controlliamo se esiste almeno un minore di ordine 2 diverso da zero. Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(A) = 2$, perché la matrice A presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Consideriamo ora la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(C)$. La matrice C è una matrice 3×4. Ne consegue che

$$r(C) \leq \min\{3, 4\} = 3.$$

Inoltre, dal momento che la matrice C contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avente determinante non nullo, possiamo aggiungere che

$$2 \leq r(C) \leq 3.$$

A questo punto dobbiamo verificare che non vi siano minori di ordine 3 non nulli. Abbiamo già visto che $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Consideriamo pertanto gli altri minori:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tutti i minori di ordine 3 della matrice C hanno determinante nullo (era naturale aspettarselo, avendo aggiunto la colonna dei termini noti nulli). Ne consegue che

$$r(C) = 2.$$

Le matrici A e C hanno entrambe rango 2, pertanto il sistema ammette soluzioni. In particolare, ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia, per esempio,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} 2x + z = y \\ x + z = -y \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D, mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti" (si noti che la terza riga è "scomparsa").

Possiamo riscrivere il sistema nella seguente forma matriciale:

$$D \cdot X = B, \text{ con } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$$

dove

$$X = D^{-1} \cdot B$$

Avendo determinante non nullo (l'abbiamo calcolato in precedenza), la matrice D ammette l'inversa. Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinarla.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta D^T:

$$D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta D^* dei complementi algebrici degli elementi di D^T:

$$D^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 1 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa D^{-1} premoltiplicando la matrice D^* per lo scalare $\frac{1}{\det D}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice D^* per $\det D$):

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot D^* = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot y + (-1) \cdot (-y) \\ (-1) \cdot y + 2 \cdot (-y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + y \\ -y - 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y \\ -3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione generale del sistema è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -3y \end{pmatrix}.$$

Per ogni $y \in \mathbb{R}$, il sistema ammette la soluzione propria $x = 2y$, $z = -3y$. Perciò, il sistema dato ammette le infinite soluzioni $(2y, y, -3y)$ ottenute al variare del parametro y in $\mathbb{R}$. Si tratta, come anticipato, di ∞^1 soluzioni (cioè, infinite soluzioni dipendenti da un parametro). Trattandosi di un sistema omogeneo, il sistema ammette anche le infinite soluzioni:

$$(2\alpha y, \alpha y, -3\alpha y) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Infatti, è sufficiente raccogliere a fattor comune il fattore α e semplificarlo per ottenere il sistema iniziale.

Esercizio 1, prova intermedia MGF/MMF del 27/01/2022 – Turno A

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Sia A la matrice incompleta del sistema. La soluzione del sistema è determinata dal prodotto

A. $\begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Soluzione.

La soluzione dell'esercizio è riportata anche nel seguente video del Prof. Magni: Matematica generale e finanziaria - Soluzione prova intermedia 27 gennaio 2022 (Turno A) - Esercizio 1.

Per prima cosa, possiamo escludere immediatamente le risposte B e D perché la soluzione di un sistema lineare di equazioni è, in forma matriciale compatta, $X = A^{-1} \cdot B$, dove la matrice A^{-1} è l'inversa della matrice dei coefficienti, mentre la matrice B è il vettore dei termini noti.

Siamo nel caso in cui $m = n$ (in particolare, si tratta di un sistema di 2 equazioni in 2 incognite).

Consideriamo la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. La prima cosa da fare è verificare che A sia invertibile (ovvero che $\det A$ sia diverso da 0).

$$\det A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -1 - 3 = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}.$$

Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinare la matrice inversa.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa A^{-1} premoltiplicando la matrice A^* per lo scalare $\frac{1}{\det A}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice A^* per $\det A$):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la A. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
A	…	…	…	…	…	…

Esercizio 1, prova totale MGF/MMF del 30/06/2022

Il sistema $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A. *non ha soluzione*

B. *ammette una soluzione*

C. *ammette due soluzioni*

D. *ammette infinite soluzioni*

<u>Soluzione</u>.

Possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Siamo nel caso generale in cui $m \neq n$ (si tratta, infatti, di un sistema di m equazioni in n incognite; in particolare, di 2 equazioni in 3 incognite).

La prima cosa da fare è verificare la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema abbia soluzioni, data dal teorema di Rouchè-Capelli, ovvero che le matrici completa e incompleta del sistema abbiano lo stesso rango.

Consideriamo la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(A)$. La matrice A è una matrice 2×3. Ne consegue che

$$r(A) \leq \min\{2, 3\} = 2.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo inizialmente la sottomatrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(A) = 2$, perché la matrice A presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Consideriamo ora la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(C)$. C è una matrice 2×4. Ne consegue che

$$r(C) \leq \min\{2, 4\} = 2.$$

Se consideriamo la stessa sottomatrice di prima, avente determinante non nullo, possiamo concludere che $r(C) = 2$.

Le matrici A e C hanno entrambe rango 2, pertanto il sistema ammette soluzioni. A questo punto, dato n, pari al numero di incognite, e k, pari al rango delle matrici incompleta e completa, potremmo concludere che

$$\text{il sistema ha } \infty^{n-k} \text{ soluzioni, ovvero } \infty^{3-2} = \infty^1 \Longrightarrow \text{ammette infinite soluzioni}$$

La risposta corretta da inserire nella griglia delle risposte (costruita nella prima pagina del compito) è la D. Si riporta di seguito un esempio di griglia.

1	2	3	4	5	6	7
D	…	…	…	…	…	…

Per completare l'esercizio, determiniamo le infinite soluzioni del sistema lineare. In particolare, dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia, per esempio,

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} -2x_2 = 1 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 = -x_1 \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D, mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti".

Possiamo riscrivere il sistema nella seguente forma matriciale:

$$D \cdot X = B, \text{ con } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 - 3x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

dove

$$X = D^{-1} \cdot B$$

Avendo determinante non nullo (l'abbiamo calcolato in precedenza), la matrice D ammette l'inversa. Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinarla.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta D^T:

$$D^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta D^*:

$$D^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot 0 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa D^{-1} premoltiplicando la matrice D^* per lo scalare $\frac{1}{\det D}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice D^* per $\det D$):

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot D^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 3x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot (1 - 3x_1) \\ -\frac{1}{2} \cdot (1 - 3x_1) - 1 \cdot (-x_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2} + x_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La soluzione generale del sistema è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, il sistema ammette la soluzione $x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}$. Perciò, il sistema dato ammette le infinite soluzioni $(x_1, \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}, \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2})$ ottenute al variare di x_1 in $\mathbb{R}$. In particolare, il sistema ammette ∞^1 soluzioni, dipendenti da un parametro (x_1).

Esercizio 16.25, pag. 460 (Guerraggio, A. 2009. *Matematica*. Pearson, seconda edizione)

Risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \\ -4x + 5y + z + 8t = 2 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>.

Siamo nel caso generale in cui $m \neq n$ (si tratta, infatti, di un sistema di m equazioni in n incognite; in particolare, di 3 equazioni in 4 incognite).

La prima cosa da fare è verificare la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema abbia soluzioni, data dal **teorema di Rouchè-Capelli**, ovvero che le matrici completa e incompleta del sistema abbiano lo stesso rango.

Consideriamo la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(A)$. La matrice A è una matrice 3×4. Ne consegue che

$$r(A) \leq \min\{3, 4\} = 3.$$

Utilizziamo la definizione di rango di una matrice, valutando prima i minori di ordine massimo (e, se sono tutti nulli, scendendo di ordine finché non troviamo un minore non nullo). Consideriamo inizialmente la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e ne calcoliamo il determinante utilizzando la regola di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 + 20 - (8 + 5 + 2) = 15 - 15 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 8 + 10 - (4 - 10 + 16) = 10 - 10 = 0.$$

Consideriamo allora la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 16 + 2 - (-4 - 2 + 32) = 26 - 26 = 0.$$

Consideriamo, infine, la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 20 - 1 - (5 - 2 - 16) = -13 + 13 = 0.$$

Tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo. Scendiamo allora di ordine e controlliamo se esiste almeno un minore di ordine 2 diverso da zero. Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$

Ne consegue che $r(A) = 2$, perché la matrice A presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Consideriamo ora la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ e ne determiniamo il rango $r(C)$. La matrice C è una matrice 3×5. Ne consegue che

$$r(C) \leq \min\{3, 5\} = 3.$$

Inoltre, dal momento che la matrice C contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ avente determinante non nullo, possiamo aggiungere che

$$2 \leq r(C) \leq 3.$$

A questo punto dobbiamo verificare che non vi siano minori di ordine 3 non nulli. Abbiamo già visto che $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$, e $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$.

Consideriamo pertanto gli altri minori:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 10 - (4 + 0 + 4) = 8 - 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2 - (-4 + 0 + 8) = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 16 - (8 + 0 + 4) = 12 - 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 1 - (5 + 0 - 4) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 0 - 8 - (-10 + 0 - 2) = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 8 - (-2 + 0 + 2) = 0$$

Tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo. Scendiamo allora di ordine e controlliamo se esiste almeno un minore di ordine 2 diverso da zero. Dal momento che la matrice C contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, avente determinante non nullo, ne consegue che $r(C) = 2$, perché la matrice C presenta un minore di ordine 2 non nullo.

Le matrici A e C hanno entrambe rango 2, pertanto il sistema ammette soluzioni. In particolare, il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

Dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia, per esempio,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z - t \\ 2x - y = -z + 2t \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D, mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti".

Possiamo riscrivere il sistema nella seguente forma matriciale:

$$D \cdot X = B, \text{ con } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 - 2z - t \\ -z + 2t \end{pmatrix}$$

dove

$$X = D^{-1} \cdot B.$$

Avendo determinante non nullo (l'abbiamo calcolato in precedenza), la matrice D ammette l'inversa. Seguendo lo schema di pagina 22 del Videolibro (Fascicolo n. 1), andiamo a determinarla.

La prima cosa da fare è ricavare la matrice trasposta D^T:

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Successivamente ricaviamo la matrice aggiunta D^* (matrice dei complementi algebrici degli elementi di D^T):

$$D^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 2 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricaviamo la matrice inversa D^{-1} premoltiplicando la matrice D^* per lo scalare $\frac{1}{\det D}$ (o, in maniera equivalente, dividiamo ciascun elemento della matrice D^* per $\det D$):

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot D^* = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 2z - t \\ -z + 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (1 - 2z - t) + \frac{1}{3} \cdot (-z + 2t) \\ \frac{2}{3} \cdot (1 - 2z - t) - \frac{1}{3} \cdot (-z + 2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}t \\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3}z - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1 - 3z + t}{3} \\ \frac{2 - 3z - 4t}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione generale del sistema è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - 3z + t}{3} \\ \frac{2 - 3z - 4t}{3} \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Per ogni $z, t \in \mathbb{R}$, il sistema ammette la soluzione $x = \frac{1-3z+t}{3}$, $y = \frac{2-3z-4t}{3}$. Perciò, il sistema dato ammette ∞^2 soluzioni (cioè, infinite soluzioni dipendenti da 2 parametri) del tipo $(\frac{1-3z+t}{3}, \frac{2-3z-4t}{3}, z, t)$ ottenute al variare dei parametri z, t in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, se pongo $z = 1$, $t = 1$, ottengo la soluzione particolare $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1,1\right)$.