MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24
Corso di laurea di Economia Aziendale e Management
Università di Modena e Reggio Emilia

Fascicolo n. 4

Funzioni di due variabili reali

- *Funzioni reali di due variabili reali*
- *Derivate parziali prime e seconde*
- *Differenziale totale*
- *Massimi e minimi, punti di sella*
- *Massimi e minimi vincolati*
- *Funzione lagrangiana*
- *Esercizi e applicazioni*

Prof.ssa Carla Fiori
Prof. Carlo Alberto Magni

Università di Modena e Reggio Emilia

Funzioni a due variabili

Docente: Carlo Alberto Magni
Revisione, integrazioni ed editing: Carlo Alberto Magni

0:42:12 Vincolo di disuguaglianza non stretta
0:43:54 Esempio 5 (vincolo di disuguaglianza non stretta)
0:59:34 Vincolo non esplicitabile
1:02:01 Outro

5. Funzioni a due variabili (5) – Determinazione di massimi e minimi vincolati – Metodo di Lagrange

0:00:00 Intro
0:00:18 Vincolo non esplicitabile
0:06:02 Metodo di Lagrange
0:20:16 Outro

6. Funzioni a due variabili (6) – Determinazione di massimi e minimi vincolati – Metodo di Lagrange (esempio)

0:00:00 Intro
0:00:18 Metodo di Lagrange
0:01:29 Esempio
0:04:18 Funzione lagrangiana
0:04:59 Condizioni del prim'ordine
0:14:35 Condizioni del second'ordine
0:21:34 Outro

7. Funzioni a due variabili (7) – Metodo di Lagrange e metodo di sostituzione (esempio)

0:00:00 Intro
0:00:18 Presentazione dei contenuti del video
0:00:50 Vincolo esplicitabile: metodo di Lagrange
0:02:42 Condizioni necessaria (prim'ordine)
0:07:50 Hessiano orlato
0:11:42 Condizioni sufficienti (second'ordine)
0:14:39 Vincolo esplicitabile: metodo di sostituzione
0:15:58 Condizioni necessarie (prim'ordine)
0:17:43 Condizioni sufficienti (second'ordine)
0:19:41 Outro

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x; y) \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \}$$

DEFINIZIONE. Sia D un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è detta **funzione reale di due variabili reali**:

$$f: (x, y) \to f(x, y) = z$$

$$f: (x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = z$$

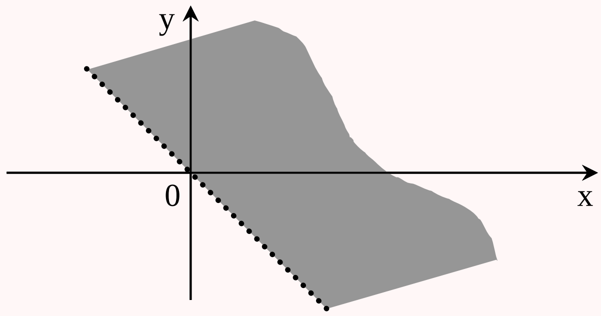
Esempi.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + 2y$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 - 1$.
- $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y - 3$ con $D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}$.

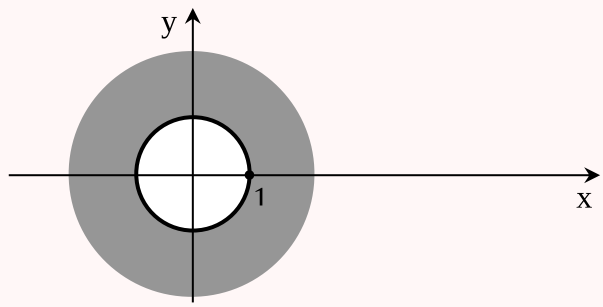
Se non si precisa il dominio (insieme di definizione, campo di esistenza) di una funzione, si sottintende che questo sia l'insieme dei punti nei quali i calcoli indicati nella espressione analitica della funzione sono eseguibili.

Esempi.

1. La funzione $f(x; y) = \ln(x + y)$ è definita in tutti i punti del semipiano $x + y > 0$.

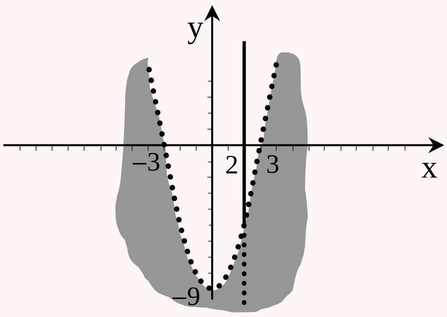


2. La funzione $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ è definita in tutti i punti del piano tali che $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ ossia in tutti i punti esterni e sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 .

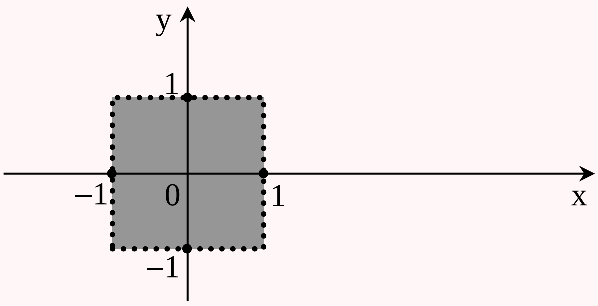


3. La funzione $f(x;y)=\frac{\ln(x^2-9-y)}{x-2}$ è definita in tutti i punti del piano tali che
$$\begin{cases} x^2-9-y>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$$

Il dominio è costituito dai punti "esterni" alla parabola di equazione
$y = x^2-9$ con l'esclusione dei punti della retta $x = 2$.



4. La funzione $f(x;y) = \ln(1-x^2) + \ln(1-y^2)$ è definita in tutti i punti del piano tali che $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-y^2>0 \end{cases}$. Il dominio è costituito dai punti interni al quadrato rappresentato nella figura dalla parte più scura; i punti del perimetro sono esclusi.



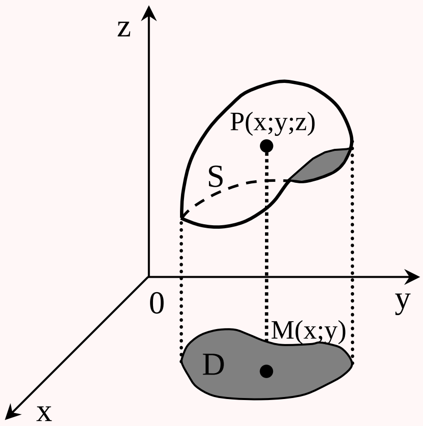
5. Determinare il dominio di
$$f(x,y)=\sqrt{y(x^2-4x+4)}$$

La condizione di esistenza del radicale è $y(x^2-4x+4)=y(x-2)^2\geq 0$. Poiché $(x-2)^2\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, allora $y(x^2-4x+4)\geq 0$ se e solo se $y\geq 0$ oppure $x=2$ (con y qualsiasi).

$$Dom\ f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\ \vee x=2\}$$

GRAFICO

Il **grafico** di una funzione $f(x;\ y) = z$ è costituito dai punti $P(x;\ y;\ z)$; essi formano una superficie nello spazio.



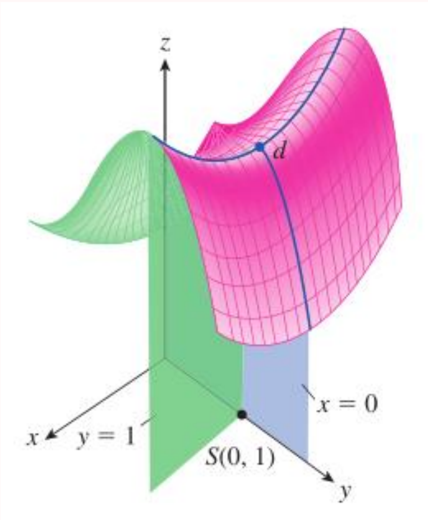
DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f(x;\ y): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, è **limitata** se è limitato il suo insieme immagine $f(D)$.

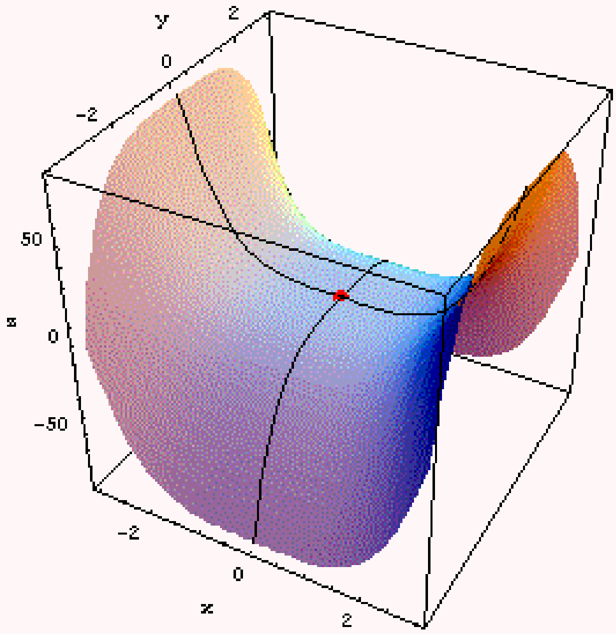
DEFINIZIONE. Sia $f(x;\ y): D \to R$, $D \subseteq R^2$, e sia $P(x_0;\ y_0) \in D$, si dice **intorno circolare**, di raggio $r > 0$, del punto P l'insieme dei punti interni della circonferenza di centro P e raggio r .

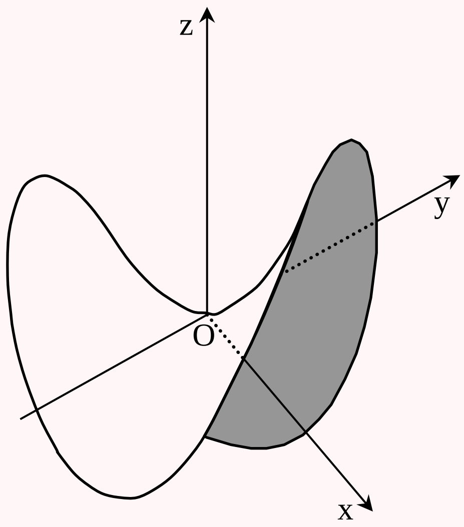
DEFINIZIONE. Sia $f(x, y)$ definita in un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ e sia $P(x_0, y_0)$ un punto interno a D, si dice che P è un punto di:

- **massimo relativo** (o locale) se esiste un intorno circolare H del punto P tale che per ogni $(x, y) \in D \cap H$ risulta $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- **minimo relativo** (o locale) se esiste un intorno circolare H del punto P tale che per ogni $(x, y) \in D \cap H$ risulta $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
- **massimo assoluto** per la funzione $f(x, y)$ se per ogni $(x, y) \in D$ risulta $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- **minimo assoluto** per la funzione $f(x, y)$ se per ogni $(x, y) \in D$ risulta $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Un punto P è detto **punto di sella** se esistono due direzioni tali che P è punto di massimo secondo una direzione e punto di minimo secondo l'altra.







CALCOLO DIFFERENZIALE IN $\mathbb{R}^2$

- **derivata parziale prima rispetto a *x***: è il limite del rapporto incrementale se la variabile y è fissata a un valore determinato y_0 ed è fatta variare la sola variabile x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- si indica con

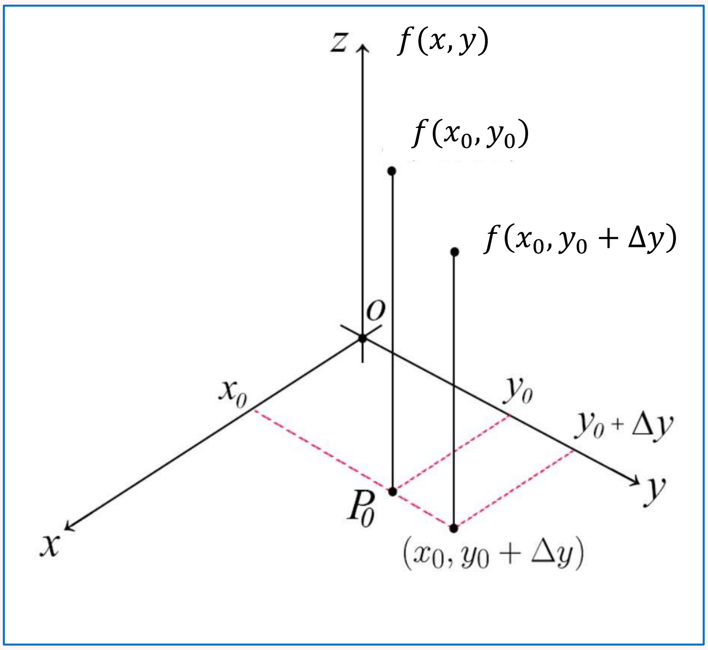
$$f_x \ , \qquad f'_x \ , \qquad f_x\,(x, y) \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x}$$

- **derivata parziale prima rispetto a *y***: è il limite del rapporto incrementale se la variabile x è fissata a un valore determinato x_0 ed è fatta variare la sola variabile y:

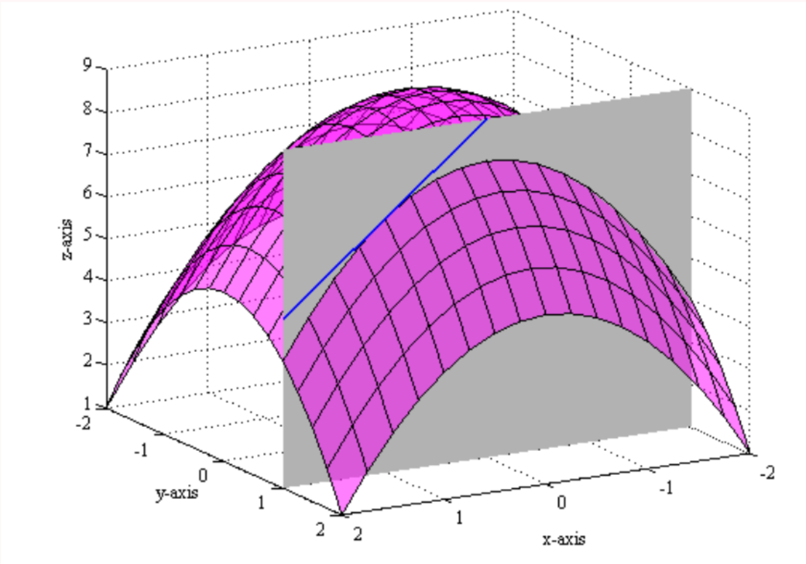
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

- si indica con

$$f_y \ , \qquad f'_y \ , \qquad f_y\,(x, y) \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$



Rappresentazione geometrica della derivata di una funzione $f(x,y)$ nel punto di coordinate $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. È il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione $z = F(x) = f(x,1)$.



Esempi.

1. Se $f(x,y) = x^2y^2 - x^3 + y$ risulta $f_x = 2xy^2 - 3x^2$, $f_y = 2x^2y + 1$.
2. Se $f(x,y) = e^{2x+y}$ risulta $f_x = 2e^{2x+y}$, $f_y = e^{2x+y}$.
3. Se $f(x,y) = \ln(x^2 + 3y)$ risulta $f_x = \frac{2x}{x^2+3y}$, $f_y = \frac{3}{x^2+3y}$.

Si può dire che f_x, calcolata in P$(x_0; y_0)$, misura l'incremento che subisce la funzione $f(x,y)$ per effetto della variazione della sola x nel punto P. Analogamente per f_y.

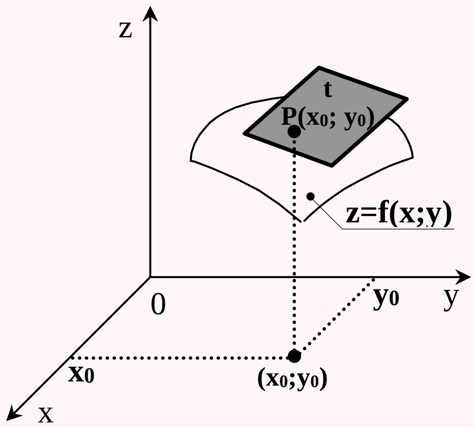
DEFINIZIONE. Data la funzione $f(x,y)$ si chiama **gradiente** di f in (x_0, y_0) la coppia formata dalle derivate parziali prime di f . Si scrive grad $f = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$.

A volte il gradiente si indica anche con ∇f .

DEFINIZIONE. Data la funzione $f(x,y)$, si chiama **differenziale totale** della funzione f relativo al punto $(x_0; y_0)$ e all'incremento Δx e Δy delle variabili, la quantità

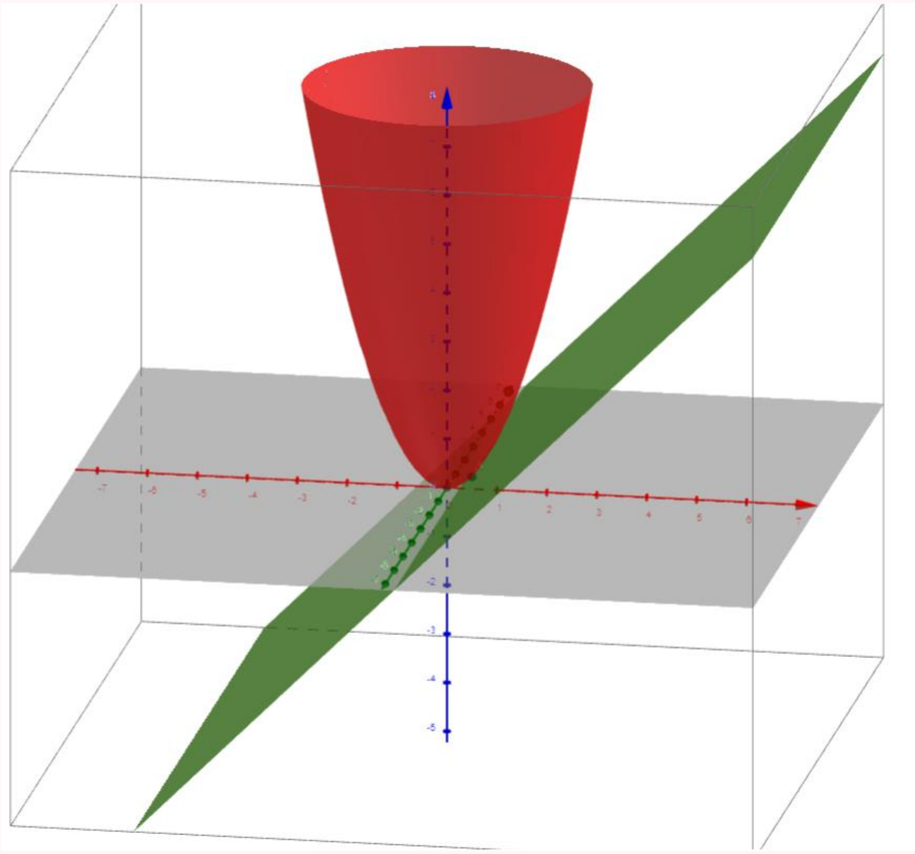
$$df = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y \ .$$

Il differenziale totale di f rappresenta una buona approssimazione dell'incremento della funzione, tanto migliore quanto più Δx e Δy sono piccoli. Geometricamente tale approssimazione equivale a "sostituire" la superficie, grafico della funzione, con il piano tangente nel punto P .



$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{piano tangente}}$$



Esempio. Calcolare il valore approssimato della funzione $f(x,y)$ nel punto $(1.5,3.4)$ sapendo che $f(1,3) = 2.3$, $f_x(1,3) = 0.2$, $f_y(1,3) = 0.1$.

$$f(1.5,3.4) - f(1,3) \approx f_x(1,3) \cdot 0.5 + f_y(1,3) \cdot 0.4$$

$$f(1.5,3.4) - 2.3 \approx 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.14 \Longrightarrow f(1.5,3.4) \approx 2.44.$$

Esempio. Calcolare il valore approssimato della funzione $f(x,y)$ nel punto $(0.2,1.3)$ sapendo che $f(0,1) = 2$, $f_x(0,1) = -1$, $f_y(0,1) = 0.7$.

$$f(0.2, 1.2) - f(0,1) \approx f_x(0,1) \cdot 0.2 + f_y(0,1) \cdot 0.3$$

$$f(0.2,1.2) - 2 \approx (-1) \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.3 = -0.2 + 0.021 = -0.179 \Longrightarrow f(1.5,3.4) \approx 1.821.$$

Derivate parziali seconde:

$$f_{xx} \quad , \quad f_{xy} \quad , \quad f_{yx} \quad , \quad f_{yy} \qquad \text{oppure}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Le derivate parziali seconde f_{xx} e f_{yy} sono dette **pure**, mentre le derivate seconde f_{xy} e f_{yx} sono dette **miste**.

Esempi.

1. Se $f(x,y) = x^2y + y^3 \Rightarrow f_x = 2xy\,, \quad f_y = x^2 + 3y^2$

$\Rightarrow f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yx} = 2x, \quad f_{yy} = 6y.$

2. Se $f(x,y) = y^2e^x + xy + 1$

$\Rightarrow f_x = y^2e^x + y,\ f_y = 2ye^x + x$

$\Rightarrow f_{xx} = y^2e^x, \quad f_{xy} = 2ye^x + 1,$

$f_{yx} = 2ye^x + 1, \quad f_{yy} = 2e^x.$

3. Se $f(x,y) = 3y - x^2 + xy^3 \Rightarrow f_x = -2x + y^3,\ f_y = 3 + 3xy^2$

$\Rightarrow f_{xx} = -2\,, \quad f_{xy} = 3y^2, \quad f_{yx} = 3y^2, \quad f_{yy} = 6xy.$

Quando una funzione $f(x,y)$ ha in un punto interno al suo dominio tanto la derivata f''_{xy} che la derivata f''_{yx}, queste possono risultare uguali oppure diverse. Sussiste però il seguente teorema.

TEOREMA di Schwarz

Se la funzione $f(x,y)$ definita in $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ ammette entrambe le derivate parziali miste f_{xy}, f_{yx} in tutto un intorno del punto $P(x_0,y_0)$, interno all'insieme D, e se tali derivate seconde sono continue in (x_0,y_0), allora $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI RELATIVI E DEI PUNTI DI SELLA

DEFINIZIONE. Se la funzione $f(x, y)$ ammette derivate parziali seconde continue, si chiama **matrice hessiana** la matrice che raccoglie le derivate di $f(x, y)$:

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Si chiama **determinante hessiano**, o più brevemente "hessiano" di $f(x, y)$ il determinante della matrice hessiana:

$$H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

Possiamo ora enunciare il teorema che ci dà un criterio per la ricerca dei punti estremanti di una funzione $f(x, y)$.

TEOREMA (condizioni del prim'ordine o necessarie)

Sia $f(x, y)$ definita in $D \subseteq R^2$ avente derivate parziali prime in un intorno circolare C del punto $P(x_0, y_0)$. Se $P(x_0, y_0)$ è un punto di massimo oppure un punto di minimo, allora $f_x'(x_0, y_0) = 0$ e $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

N.B. L'annullamento del gradiente è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché $P(x_0, y_0)$ sia punto di massimo o di minimo. Il punto $P(x_0, y_0)$è detto punto stazionario.

TEOREMA (condizioni del second'ordine o sufficienti)

Sia $f(x, y)$ definita in $D \subseteq R^2$ avente derivate parziali seconde continue in un intorno C del punto $P(x_0, y_0)$ e sia $P(x_0, y_0)$ un punto stazionario. Allora,

a) Se $H(x_0, y_0) > 0$, $f_{xx}''(x_0, y_0) > 0$, allora il punto P è di minimo relativo.

b) Se $H(x_0, y_0) > 0$, $f_{xx}''(x_0, y_0) < 0$, allora il punto P è di massimo relativo.

c) Se $H(x_0, y_0) < 0$, allora il punto P è un punto a sella.

d) Se $H(x_0, y_0) = 0$, allora non si può dire nulla senza ulteriori indagini su P.

Esempio. Determinare gli eventuali massimi, minimi relativi e punti di sella della funzione $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 6y$.

SOLUZIONE:

Condizioni del prim'ordine (o necessarie)

Risolviamo anzitutto il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 6y^2 - 6 \quad = 0 \end{cases}$.

Si trovano le seguenti soluzioni : $P(0,1)$, $Q(0,-1)$, $R(1,1)$, $S(1,-1)$.

Questi sono i punti candidati ad essere di massimo, di minimo o punti a sella; per stabilirlo cerchiamo dapprima l'hessiano.

Condizioni del second'ordine (o sufficienti)

$$H(x,y) = (12x - 6) \cdot 12y = 144xy - 72y$$

- $H(P) = -72 < 0$ allora P è punto di sella;
- $H(Q) = 72 > 0$ e $f_{xx}(Q) = -6 < 0$ allora Q è punto di massimo relativo;
- $H(R) = 72 > 0$ e $f_{xx}(R) \quad 6 > 0$ allora R è punto di minimo relativo;
- $H(S) = -72 < 0$ allora S è punto di sella.

ESEMPIO. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi e punti di sella della funzione $f(x,y) = 4x^3 - y^3 - x^2 + 27y$.

SOLUZIONE:

Condizioni del prim'ordine

Risolviamo anzitutto il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 12x^2 - 2x = 0 \\ -3y^2 + 27 = 0 \end{cases}$.

Si trovano le seguenti soluzioni : $P(0,3)$, $Q(0,-3)$, $R\left(\frac{1}{6},3\right)$, $S\left(\frac{1}{6},-3\right)$.

Questi sono i punti candidati ad essere di massimo, di minimo o punti di sella; per stabilirlo cerchiamo dapprima l'hessiano.

Condizioni del second'ordine

$H(x,y) = -144xy + 12y$.

- $H(P) = \; 36 > 0$ e $f_{xx}(P) = \; = -2 < 0$ allora Q è punto di massimo relativo;
- $H(Q) = -36 < 0$ allora Q è punto a sella;
- $H(R) \; = -36 < 0$ allora R è punto a sella;
- $H(S) \; = \; 36 > 0$ e $f_{xx}(S) = 2 > 0$ allora S è punto di minimo relativo.

ESEMPIO. Determinare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = 8\ln x - x^2 + y^3 - 6y$.
<u>*SOLUZIONE*</u>:

$Dom\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} f_x = \frac{8}{x} - 2x = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8-2x^2}{x} = 0 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$ non accettabile perché $-2 \notin Domf$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Condizioni del second'ordine

$$f_{xx}(x,y) = -8/x^2 - 2 \qquad f_{xy}(x,y) = 0$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 6y$$

$$H(x,y) = (-8/x^2 - 2)(6y)$$

$H(2,\sqrt{2}) = (-8/4 - 2)(6\sqrt{2}) = -24\sqrt{2} < 0$ è un punto di sella

$H(2,-\sqrt{2}) = (-8/4 - 2)(-6\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} > 0$. Poiché $f_{xx}(2,-\sqrt{2)} = -4 < 0$ si tratta di un punto di massimo.

ESEMPIO. Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x + y + \ln(xy)$

Dom f =$\{(x,y) \in R^2 : xy > 0\}$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} f_x = 1 + y/(xy) = 1 + 1/x = 0 \\ f_y = 1 + x/(xy) = 1 + 1/y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Il punto stazionario è accettabile perché $(-1) \cdot (-1) > 0$.

Condizioni del second'ordine

$f_{xx}(x,y) = -1/x^2$ $\qquad f_{xy}(x,y) = 0$
$f_{yx}(x,y) = 0$ $\qquad f_{yy}(x,y) = -1/y^2$

$H(x,y) = (-1/x^2)(-1/y^2) = \dfrac{1}{x^2y^2}$
$H(-1,-1) = 1 > 0.$

Pertanto, poiché $f_{xx}(-1,-1) = -1 < 0$, il punto è di massimo.

Applicazione (ricavo massimo) La vostra azienda produce due modelli di altoparlanti, BANG e OLUFSEN. La domanda per ciascuno dipende in parte dal prezzo dell'altro. Le funzioni di domanda per BANG e per OLUFSEN sono, rispettivamente,

$$q_1(p_1, p_2) = 100000 - 100p_1 + 10p_2$$
$$q_2(p_1, p_2) = 150000 + 10p_1 - 100p_2$$

dove q_1, q_2 rappresentano, rispettivamente, il numero di BANG e il numero di OLUFSEN venduti nell'arco di un anno, e p_1, p_2 denotano i prezzi dei due modelli.

Quali prezzi devono essere praticati per BANG e OLUFSEN per ottenere il ricavo massimo?

SOLUZIONE:

$$R(p_1, p_2) = p_1q_1 + p_2q_2$$

$$\begin{aligned} R(p_1, p_2) &= p_1(100000 - 100p_1 + 10p_2) + p_2(150000 + 10p_1 - 100p_2) \\ &= 100000p_1 - 100p_1^2 + 10p_1p_2 + 150000p_2 + 10p_1p_2 - 100p_2^2 \\ &= 100000p_1 - 100p_1^2 + 20p_1p_2 + 150000p_2 - 100p_2^2 \end{aligned}$$

Condizioni del prim'ordine

$$R_{p_1} = 100000 - 200p_1 + 20p_2 \qquad R_{p_2} = 20p_1 + 150000 - 200p_2$$

$$R_{p_1} = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{200p_1 - 100000}{20} = 10p_1 - 5000$$

$$R_{p_2} = 0 \Rightarrow 20p_1 + 150000 - 200(10p_1 - 5000) = -1980p_1 + 1150\,000 = 0$$

$$\Rightarrow -1980p_1 + 1150\,000 = 0 \Rightarrow p_1 = 580.81$$
$$\Rightarrow p_2 = 10(580.81) - 5000 = 808.08$$

Il punto $(p_1, p_2) = (580.81; 808.08)$ è un punto stazionario

Condizioni del second'ordine

$$R_{p_1p_1} = -200 R_{p_1p_2} = 20$$
$$R_{p_2p_1} = 20 R_{p_2p_2} = -200$$
$$H(p_1, p_2) = (-200)(-200) - 400 > 0$$

Il punto stazionario è un punto di massimo perché $R_{p_1p_1}(580.81, 808.08) = -200 < 0$

Esempio. Determinare la natura dei punti stazionari di $f(x,y) = y(x-1)^2$. .

SOLUZIONE:

Le derivate parziali prime sono

$$f_x(x,y) = 2y(x-1)$$
$$f_y(x,y) = (x-1)^2$$

Condizioni del prim'ordine.

$$\begin{cases} 2y(x-1) = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

da cui $x = 1$ e y qualsiasi. Esistono infiniti estremanti del tipo $(1, y)$.

Condizioni del second'ordine.

$$f_{xx}\,(x,y) = 2y, \;\; f_{xy}(x,y) = 2(x-1)$$
$$f_{yx}\,(x,y) = 2(x-1), \;\; f_{yy}(x,y) = 0$$

$H(x,y) = -4(x-1)^2 \Rightarrow H(1,y) = 0$. Non si può dire nulla della natura dei punti stazionari.

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI (O CONDIZIONATI)

Talvolta si presenta il problema di trovare il massimo e il minimo di una funzione $f(x, y)$ le cui **variabili indipendenti sono legate tra loro da certe condizioni (o vincoli)**. Noi tratteremo solo casi in cui il vincolo è espresso da una equazione, ossia le variabili indipendenti x e y devono verificare una equazione $g(x;\ y) = 0$.

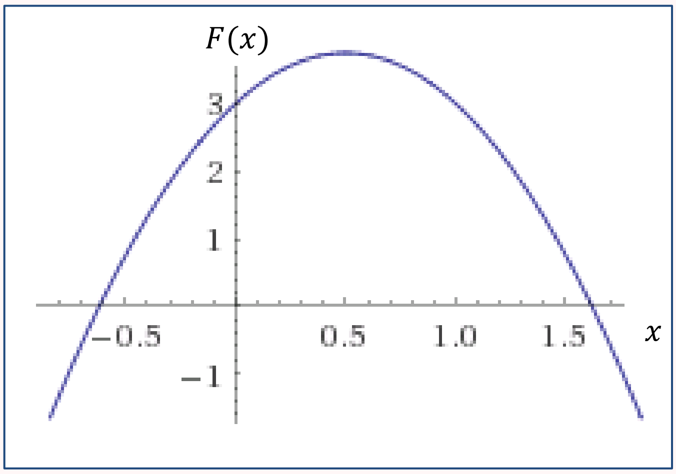
Si vuole produrre 1 tonnellata di pane combinando farina di farro e farina di grano in modo da massimizzare il profitto. La funzione del profitto è data da $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$ *, e con* x *tonnellate di farina di farro e* y *tonnellate di farina di grano si producono* $g(x, y) = x + y$ *tonnellate di pane.*

Il problema è quello di determinare il massimo della funzione $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$ subordinatamente al vincolo $x + y = 1$, cioè $g(x, y) = x + y - 1 = 0$.

<u>*SOLUZIONE:*</u>
Dal vincolo ricaviamo una della due variabili in funzione dell'altra. Ad esempio, ricavando y in funzione di x, si ha $y = 1 - x$, da cui

$$\begin{aligned} F(x) = f(x, 1-x) &= x(1-x) - x^2 - (1-x)^2 + 4 \\ &= x - 2x^2 - (1-x)^2 + 4 \\ &= x - 2x^2 - (1 + x^2 - 2x) + 4 \\ &= -3x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

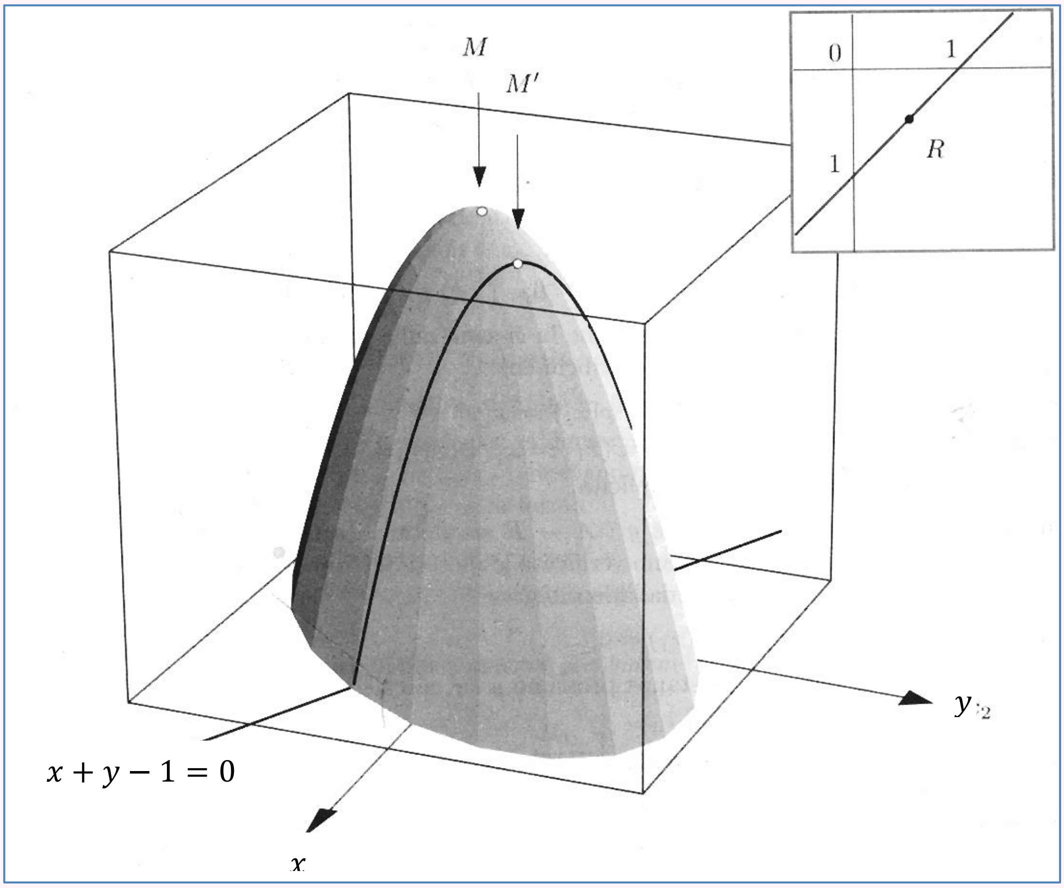
Quindi $F'(x) = -6x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$ che è un punto di massimo perché $F''(1/2) = -6 < 0$.

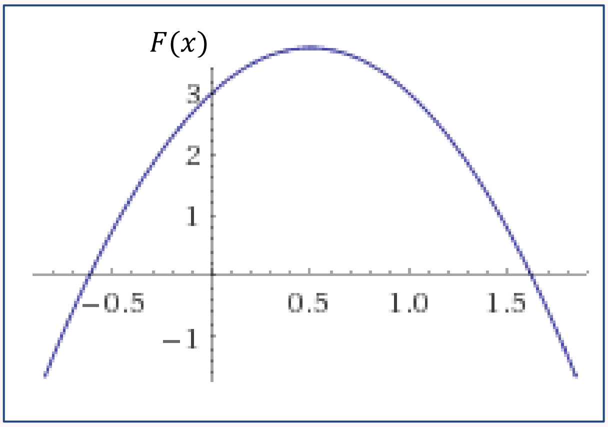


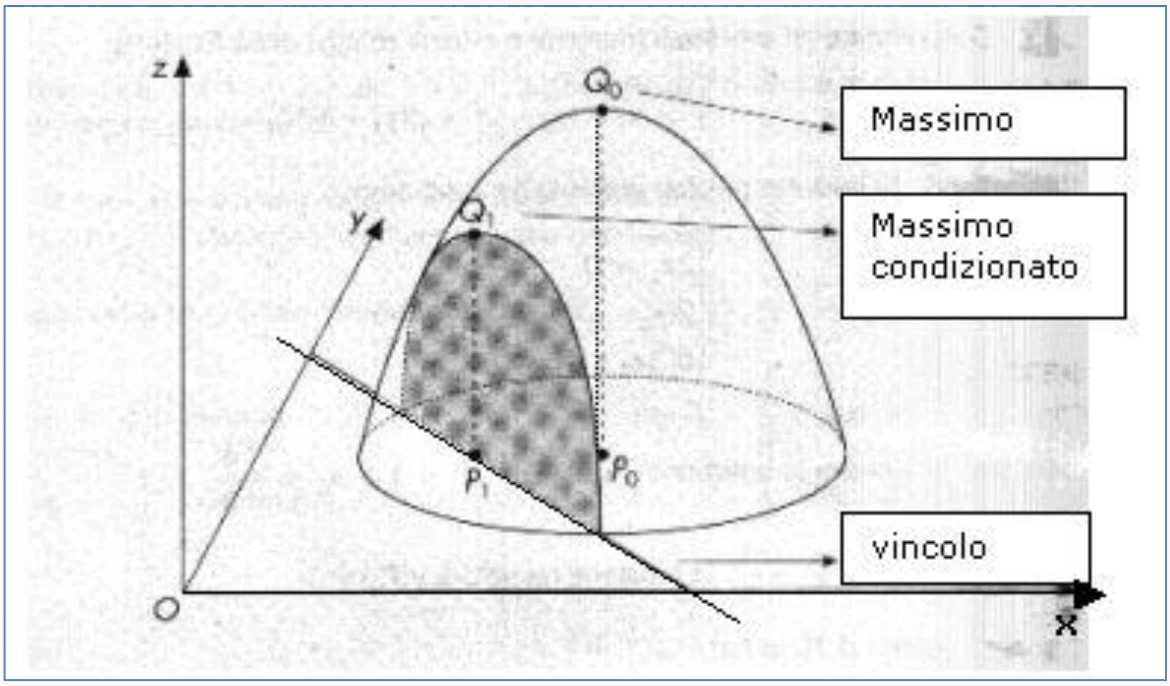
A questo corrisponde $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pertanto, il punto di massimo vincolato per $f(x, y)$ è P(1/2, 1/2) e il massimo della funzione è $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 4$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4} = 3.75.$$

Il massimo è individuato dal punto $M'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$






z
y
x
O
Q_0
Q_1
P_1
P_0
Massimo
Massimo condizionato
vincolo

Esempio 1. Determinare il minimo della funzione $f(x;\, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $x + y - 1 = 0$ (ossia i punti del dominio della f sono tutti e soli i punti della retta di equazione $x + y - 1 = 0$) .

SOLUZIONE:
Dal vincolo possiamo ricavare ad esempio x in funzione di y. Si ha $x = 1 - y$. Sostituendo in $f(x.y) = x^2 + y^2$ si ottiene una funzione nella sola y:

$$F(y) = f(1-y, y) = (1-y)^2 + y^2 = 1 + y^2 - 2y + y^2$$
$$= 2y^2 - 2y + 1.$$

Basta ora determinare il minimo di questa funzione ad una sola variabile.

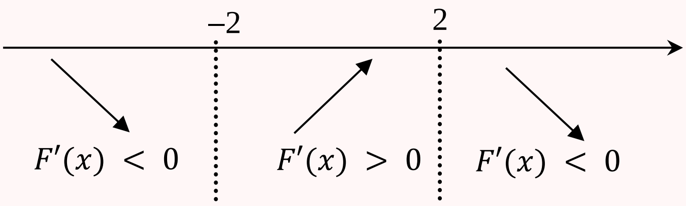
$$F'(y) = 4y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 0.5$$

allora il punto di ascissa $y = 0.5$ è un punto di minimo relativo poiché
$$F''(y) = 4 > 0 \;\; \forall y\,.$$

Il corrispondente punto sul vincolo è P(0.5, 0.5); in esso la funzione $f(x.y) = x^2 + y^2$ assume il valore $f(0.5, 0.5) = 0.25 + 0.25 = 0.5$.

Esempio 2. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo $x^2 + y - 12 = 0$.

SOLUZIONE:
Dal vincolo ricaviamo $y = -x^2 + 12$ e sostituendo nella funzione otteniamo $F(x) = -x^3 + 12x$; cerchiamo gli estremi relativi di questa funzione studiandone la derivata prima. Risulta $F'(x) = -3x^2 + 12$. Si ha $F'(x) = 0$ per $x = -2$ e $x = 2$; $F'(x) > 0$ per $x \in (-2,2)$ (in questo intervallo la funzione F è crescente); $F'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -2)$ e $x \in (2, +\infty)$ (in questi intervalli la funzione F è decrescente).



Pertanto, il punto $x = -2$ è un minimo relativo, il punto $x = 2$ è un massimo relativo. I corrispondenti punti di minimo e massimo relativo della funzione di partenza sul vincolo sono rispettivamente i punti $P(-2,\, 8)$ e $Q(2,\, 8)$; in essi la funzione $f(x,y)$ assume i valori $f(P) = -16$, $f(Q) = 16$.

Esempio 3. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x;\ y) = xy + x^2$ soggetta al vincolo $x + 2y - 4 = 0$.

SOLUZIONE: dal vincolo ricaviamo $x = -2y + 4$ e sostituendo nella funzione otteniamo

$F(y) = 2y^2 - 12y + 16$, cerchiamo gli estremi relativi di questa funzione studiandone la

derivata prima. Risulta $F'(y) = 4y - 12$.

$F'(y) = 0$ per $y = 3$, $F(y) > 0$ per $y > 3$ (funzione crescente), $F'(y) < 0$ per $y < 3$

(funzione decrescente). Pertanto, il punto $y = 3$ è un minimo relativo; il corrispondente

punto sul vincolo è $P(-2;\ 3)$ e in esso la funzione assume il valore minimo $f(P) = -2$.

Applicazione (geometria)

Un filo metallico lungo 12 cm è tagliato in due pezzi, uno dei quali viene curvato per formare un cerchio e l'altro per formare un quadrato. Indicando con x il perimetro della circonferenza e con y il perimetro del quadrato, si trovi in quale modo deve essere tagliato il filo affinché la somma delle aree così formata sia

a. massima
b. minima

SOLUZIONE:
è necessario esprimere formalmente le aree della circonferenza e del quadrato.
Come noto, l'area della circonferenza è $\pi \cdot r^2$ (dove r denota il raggio).
Esprimiamo il raggio r in termini della variabile x:

$$2\pi \cdot r = x \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

L'area della circonferenza è allora $\pi \cdot r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$.

Come noto, l'area del quadrato è l^2 (dove l è il lato). Esprimiamo il lato l in termini della variabile y: $y = 4l \quad \Rightarrow \quad l = \frac{y}{4}$. L'area del quadrato è allora $l^2 = \frac{y^2}{4^2} = \frac{y^2}{16}$.

Massimizzare la somma delle aree vuole dire massimizzare la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} \text{ sotto il vincolo } x + y = 12.$$

Il vincolo implica $y=12-x$, che rappresenta il perimetro del quadrato. Sostituendo nell'espressione della funzione, si ottiene $f(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(12-x)^2}{16}$.

Si tratta di una funzione il cui dominio è $Dom\ f=[0,12]$. Condizione necessaria per l'esistenza di estremanti: $f'(x)=0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{4\pi}+\frac{2(12-x)(-1)}{16} \\
&= \frac{x}{2\pi}+\frac{-12+x}{8} \\
&= \frac{8x-24\pi+2\pi x}{16\pi} \\
&= \frac{4x-12\pi+\pi x}{8\pi}=0 \Rightarrow x(4+\pi)=12\pi \Rightarrow x=\frac{12\pi}{4+\pi}=5.279
\end{aligned}
$$

$$f'(x)>0 \quad \text{se e solo se} \quad x>5.279,$$

quindi la funzione $f(x)$ è (strettamente) crescente per $x>5.279$ e (strettamente) decrescente per $x<5.279$. Il punto $x=5.279$ è dunque un punto di minimo per la funzione. La funzione assume valore minimo quando la circonferenza ha perimetro *x*= 5.279 e il quadrato ha perimetro $y=12-x=12-5.279=6.721$.

La somma delle aree è in questo caso

$$f(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(12-x)^2}{16}=5.279^2\cdot\frac{1}{12.566}+6.271^2\cdot\frac{1}{16}=4.675.$$

Tale somma è invece massima agli estremi del dominio, vista l'analisi di crescenza della funzione.

$$f(0)=\frac{(12)^2}{16}=9$$

$$f(12)=\frac{144}{4\pi}=11.46$$

Il punto *x*=0 è un punto di massimo relativo (locale), il punto *x*=12 è un punto di massimo assoluto, L'area è massima quando si utilizza tutto il filo per la circonferenza.
(x,y)=(12,0) è punto di massimo assoluto.

Il vincolo può essere espresso nella forma $\boldsymbol{g(x,y) < 0}$

Si procede come per i problemi di massimizzazione/minimizzazione libera e poi si escludono i punti che non soddisfano il vincolo. In sostanza, questo problema equivale al problema di determinazione di massimi e minimi liberi dove il dominio naturale della funzione viene ristretto:

$$\boldsymbol{Dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) < 0\}}$$

Esempio. Calcolare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2y + yx$$

subordinatamente al vincolo $g(x,y) = x + y < 0$.

<u>*SOLUZIONE*</u>:

$$f_x(x,y) = 2xy + y = 0$$
$$f_y(x,y) = x^2 + x = 0$$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = 0$ o $x = -1$. Sostituendo nella prima si ottiene $y = 0$ in entrambi i casi. Pertanto, si ottengono due punti stazionari: $P(0,0), Q(-1,0)$. P non è accettabile perché $0 + 0 = 0$, Q è accettabile perché $-1 + 0 < 0$.

Condizioni del second'ordine

$f_{xx} = 2y \qquad f_{xy} = 2x + 1$
$f_{yx} = 2x + 1 \qquad f_{yy} = 0$

$$H(x,y) = 2y \cdot 0 - (2x+1)^2 = -(2x+1)^2$$
$$H(-1,0) = -(-2+1)^2 = -1 < 0$$

Q è un punto a sella.

E se il vincolo è del tipo $g(x,y) \leq 0$?

Si divide il problema in due sottoproblemi:

$$\begin{aligned} &\textbf{1)}\ \ \boldsymbol{g(x,y) < 0} \\ &\textbf{2)}\ \ \boldsymbol{g(x,y) = 0} \end{aligned}$$

e si cercano separatamente gli eventuali massimi/minimi interni (caso 1) e di frontiera (caso 2)

Esempio. Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 + xy - x^4 + y^2$ subordinatamente al vincolo $y \leq x^2$

<u>*SOLUZIONE*</u>:

1) $\boldsymbol{g(x,y) = y - x^2 < 0}$

$$f_x(x,y) = 2x + y - 4x^3 = 0$$
$$f_y(x,y) = x + 2y = 0$$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} 2x + y - 4x^3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

da cui $y = -x/2$ e, sostituendo nella seconda equazione, $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Pertanto, si trovano i punti stazionari $P_1(0,0), P_2\left(\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\right), P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$. Solo P_2 e P_3 soddisfano il vincolo, quindi sono accettabili.

Condizioni del second'ordine

$f_{xx} = 2 - 12x^2,\ \ f_{xy} = 1$

$f_{yx} = 1,\ \ f_{yy} = 2$

$H(x,y) = 3 - 24x^2$

$H(P_2) = 3 - 24 \cdot \dfrac{3}{8} = -6 < 0$

$H(P_3) = 3 - 24 \cdot \dfrac{3}{8} = -6 < 0$

P_2 e P_3 sono punti di sella. Il valore assunto da $f(x,y)$ nei due punti di sella è $f(P_2) = f(P_3) = \frac{9}{64} = 0.1406$.

2) $\boldsymbol{g(x,y) = y - x^2 = 0}$

$$f(x,y) = F(x) = x^3 + x^2 \Longrightarrow F'(x) = 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, x = -2/3.$$

$F''(x) = 6x + 2$, $F''(0) = 2 > 0$ e $F''\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 < 0$. Allora $x = 0$ è punto di minimo per F e $x = -2/3$ è punto di massimo per F. Inoltre, essendo

$$x = 0 \Longrightarrow \ y = 0^2 = 0, \quad x = -\frac{2}{3} \Longrightarrow y = \frac{4}{9}$$

il punto $Q_1(0,0)$ è punto di minimo per f e il punto $Q_2\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{9}\right) = (-0.6666, 0.4444)$ è punto di massimo per f. I corrispondenti minimo e massimo sono, rispettivamente, $F(Q_1) = 0, F(Q_2) = 0.148148$.

Riassumendo, la funzione f presenta due punti di sella, P_2 e P_3 (interno al dominio considerato) e due estremanti sulla frontiera: un punto di minimo Q_1 e un punto di massimo Q_2.

Applicazione (software). La Beffa&Burla Software House vende i suoi migliori prodotti, CELIA e CILECCA, realizzando un profitto pari a

$$f(x,y) = 20x + 40y - 0.1(x^2 + y^2)$$

dove x e y rappresentano le rispettive quantità vendute dei due programmi. Se è possibile produrre un massimo di 400 copie complessive dei due programmi, quale combinazione condurrà al massimo profitto?

Il vincolo è dato da $x + y \leq 400$. In altri termini, consideriamo il dominio costituito dai punti del piano (x, y) che giacciono al di sotto della retta oppure sulla retta di equazione $x + y = 400$.

SOLUZIONE:

1) $\boldsymbol{g(x,y) = x + y - 400 < 0}$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 20 - 0.2x = 0 \\ f_y(x,y) = 40 - 0.2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases}$$

100+200<400 quindi (100, 200) è accettabile

Condizioni del second'ordine

$$f_{xx}(x,y) = -0.2 \qquad f_{xy}(x,y) = 0$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = -0.2$$

$H(x,y) = (-0.2)^2$

$H(100,200) = (-0.2)^2 > 0$

Pertanto, poiché $f_{xx}(100,200) = -0.2 < 0$, il punto è di massimo locale. Il valore assunto dalla funzione in (100, 200) è $f(100,200) = 20(100) + 40(200) - 0.1(100^2 + 200^2) = 5000$

2) $\boldsymbol{g(x,y) = x + y - 400 = 0}$

Si ha $y = 400 - x$ e quindi

$$f(x,y) = F(x) = 20x + 40(400 - x) - 0.1(x^2 + (400 - x)^2)$$

$$= 20x + 16000 - 40x - 0.1(x^2 + 160000 + x^2 - 800x)$$

$$= 60x - 0.2x^2 \Longrightarrow F'(x) = 60 - 0.4x = 0 \Longrightarrow x = 150 \Longrightarrow F''(x) = -0.4 < 0$$

$$y = 400 - 150 = 250$$

Il punto stazionario (150, 250) è di massimo relativo e il valore assunto dalla funzione f è $f(150,250) = 20(150) + 40(500) - 0.1(150^2 + 250^2) = 4500.$

E se il vincolo è del tipo $g(x,y) \geq 0$?

Il problema si risolve come appena visto, dal momento che

$$g(x,y) \geq 0$$

equivale a

$$-g(x,y) \leq 0$$

(ad esempio, $x^2 - y^3 - 7 \geq 0$ si riscrive come $y^3 - x^2 + 7 \leq 0$)

ALTRE APPLICAZIONI ALL'ECONOMIA

Esempio 1.

Un'impresa vuole produrre 140 pezzi di un dato prodotto e vuole combinare i fattori di produzione, x e y, in modo da minimizzare i costi. La funzione costo è data da $C = 5x^2 + 2xy + 5y^2 + 800$ mentre la funzione di produzione è $g(x; y) = 4x + 2y$.
Determinare la produzione di x e y in modo da minimizzare i costi.

<u>*SOLUZIONE:*</u>

Si tratta di determinare il minimo della funzione C sotto il vincolo $140 = 4x + 2y$. Dal vincolo ricaviamo $y = 70 - 2x$ e sostituendo si ottiene

$$C = 5x^2 + 2x(70 - 2x) + 5(70 - 2x)^2 + 800 = 21x^2 - 1260x + 25300$$

ed essendo il suo grafico una parabola convessa, ha il suo minimo nel vertice che ha ascissa $x = -\frac{-1260}{42} = 30$ da cui segue $y = 70 - 60 = 10$. Dunque la funzione costo ha il suo minimo per una produzione di $x = 30$ e di $y = 10$. Tale costo minimo vale $C(30; 10) = 6400$.

Esempio 2.

Un'impresa produce due beni x e y venduti, rispettivamente, ai prezzi fissi p_1 e p_2 e le cui leggi di domanda sono espresse da

$$\begin{cases} x = 700 - 2p_1 + p_2 \\ y = 500 + 3p_1 - 4p_2 \end{cases} ;$$

la funzione costo è data da $C = 140x + 190y$. Determinare i valori di x e y per i quali il profitto risulta massimo.

<u>*SOLUZIONE:*</u>

Il profitto è dato da $\pi = R - C$ e poiché il ricavo R è dato da $R = p_1x + p_2y$, ricaviamo p_1 e p_2 in funzione di x e y.

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \\ y = 500 + 3p_1 - 4(x - 700 + 2p_1) = 3300 - 4x - 5p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \\ y = 500 + 3p_1 - 4(x - 700 + 2p_1) = 3300 - 4x - 5p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = x - 700 + 2p_1 \Rightarrow p_2 = x - 700 + 2(660 - 0.8x - 0.2y) \Rightarrow p_2 = 620 - 0.6x - 0.4y \\ p_1 = 660 - 0.8x - 0.2y \end{cases}$$

La funzione profitto è dunque

$$\pi = R - C = p_1x + p_2y - C = -0{,}8x^2 - 0{,}4y^2 - 0{,}8xy + 520x + 430y .$$

Cerchiamo anzitutto i punti che annullano contemporaneamente le derivate parziali prime di π e poi studiamo tali punti con l'hessiano.

$$\begin{cases} \pi'_x = -1{,}6x - 0{,}8y + 520 = 0 \\ \pi'_y = -0{,}8y - 0{,}8x + 430 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $x = 112{,}5$, e $y = 425$.
Studiamo il punto $P(112{,}5; 425)$.

$$H = \begin{vmatrix} -1{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & -0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}64$$

H risulta costante e quindi anche $H(P) = 0{,}64 > 0$, inoltre $\pi'_{xx}(P) = -1{,}6 < 0$ allora si conclude che $P(112{,}5; 425)$ è un punto di massimo; in esso la funzione profitto vale $\pi(112{,}5;425) = 120625$.

Esempio 3.
Si consideri un'impresa, in regime di monopolio, che produce una merce utilizzando due impianti aventi rispettivamente funzione di costo $C_1 = 10x$ e $C_2 = 0{,}25y^2$. Sia data la domanda di mercato $t = 200 - 2p$ (da cui $p = 100 - 0{,}5t$) con $t = x + y$.
Determinare le quantità x e y per avere il massimo profitto.
SOLUZIONE:
Il profitto è dato da $\pi = R - C_1 - C_2$ e $R = tp = t\,(100 - 0{,}5t) = 100t - 0{,}5\,t^2$ ossia $R = 100\,(x + y) - 0{,}5(x + y)^2$.
Si ottiene pertanto :

$$\pi = 100\,(x + y) - 0{,}5(x + y)^2 - 10x - 0{,}25y^2 = -0{,}5x^2 - 0{,}75y^2 - xy + 90x + 100y \ .$$

Cerchiamo i valori di x e y che annullano le derivate prime di π :

$$\begin{cases} \pi'_x = -x - y + 90 = 0 \\ \pi'_y = -1{,}5y - x + 100 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $x = 70$ e $y = 20$.
Studiamo il punto $P(70; 20)$ con l'hessiano: $H = -1(-1.5) - (-1)(-1) = 0.5$
H risulta costante e quindi anche $H(P) = 0{,}5 > 0$, inoltre $\pi'_{xx}(70; 20) = -1 < 0$ e quindi in corrispondenza dei valori $x = 70$ e $y = 20$ la funzione profitto π raggiunge il massimo. La produzione complessiva è dunque $t = 70 + 20 = 90$ che sarà venduta al prezzo $p = 100 - 45 = 55$ producendo il profitto massimo di $\pi(70; 20) = R - C_1 - C_2 = 4150$.

Esempio 4.
Massimizzare la funzione di utilità $U = xy + x + 2y$ con il vincolo di bilancio $2x + 5y = 51$.
SOLUZIONE:
Dal vincolo otteniamo $y = \frac{51 - 2x}{5}$ e sostituendo in U si ottiene $U = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{52}{5}x + \frac{102}{5}$ che è una parabola concava verso il basso e quindi ha il suo massimo nel vertice per $x = 13$. Dunque la funzione di utilità ha il suo massimo per $x = 13$ e $y = 5$ e assume il valore $U(13; 5) = 88$.

GEOMETRICAMENTE:
Si può ritrovare geometricamente lo stesso risultato disegnando nel piano le curve (dette di indifferenza)

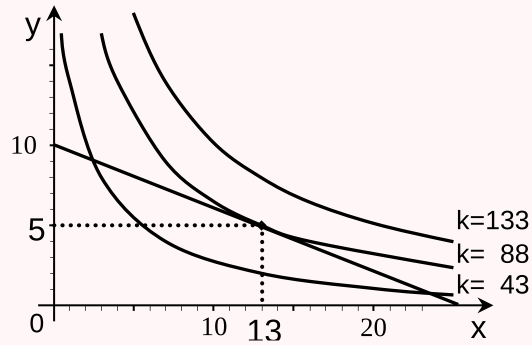
1. xy +x +2y = k

che sono iperboli equilatere di equazione $y = \frac{-x+k}{x+2}$ e disegnando la curva di bilancio espressa dal vincolo

2. 2x + 5y = 51 .

Il massimo di utilità si ha per i valori di k che rendono la (1) tangente alla (2) che esprime il vincolo. Le coordinate dei punti di tangenza sono i valori di x e y che rendono massima la funzione utilità.

Nel grafico sono riportate le curve relative a tre diversi valori di k . (k = 43 ; k = 88 ; k = 133)



ESERCIZI DA SVOLGERE

1. Trovare i massimi e i minimi relativi delle seguenti funzioni a due variabili:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$

b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + x$

c) $f(x,y) = x - x^2 - 2y^3 - 4xy$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$

e) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy + x$

f) $f(x,y) = xy\,(2x + y - 2)$

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

h) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

i) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

l) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

2. Trovare i massimi e i minimi vincolati delle seguenti funzioni a due variabili, col vincolo a fianco indicato:

a) $f(x,y) = xy$ $\quad 2x + 3y - 5 = 0$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

c) $f(x,y) = e^{x^2 + y^2}$ $\quad x - y + 2 = 0$

d) $f(x,y) = xy^2$ $\quad x + 2y = 1$

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ $\quad x + y + 3 \leq 0$

f) $f(x,y) = x + 2y$ $\quad x^2 + y = 5$

g) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad 4x^2 - 2y = 0$

Soluzione esercizio e)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$$

1) $g(x,y) = x + y + 3 < 0$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} f_x = 2x - y + 1 = 0 \\ f_y = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2(2x+1) - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$g(-1,-1) = -1 - 1 + 3 > 0 \Longrightarrow$ il punto stazionario non è accettabile.

2) $g(x,y) = x + y + 3 = 0$

$$x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -x - 3$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = F(x) = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x - x - 3 - 4$$

$$F(x) = x^2 + (-x-3)^2 + x^2 + 3x - 7 = 3x^2 + 9x + 2$$

$$F'(x) = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3/2$$

$$F''(x) = 6 > 0 \Rightarrow F''(-3/2) = 6 > 0$$

Il punto stazionario è di minimo per $F(x)$.

$$y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

Il punto $P(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ è di minimo per la funzione $f(x,y)$.

METODO DI LAGRANGE

Per la determinazione dei massimi e minimi vincolati esiste anche un **metodo generale** applicabile anche se il vincolo non è esplicitabile rispetto ad una delle variabili: è il cosiddetto

metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Data la funzione $f(x,\ y)$ soggetta al vincolo $g(x,\ y) = 0$, si costruisce la funzione ausiliaria, detta *funzione lagrangiana*:

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si determinano successivamente le soluzioni $(\lambda;\ x;\ y)$ del sistema

$$\begin{cases} L'_\lambda = 0 \\ L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Gli eventuali punti $(x_0,\ y_0)$ di massimo o di minimo della funzione $f(x,y)$ soggetta al vincolo $g(x,\ y) = 0$ si trovano fra le soluzioni di tale sistema. Per ognuna di queste soluzioni (λ_0, x_0, y_0) si calcola il determinante hessiano:[1]

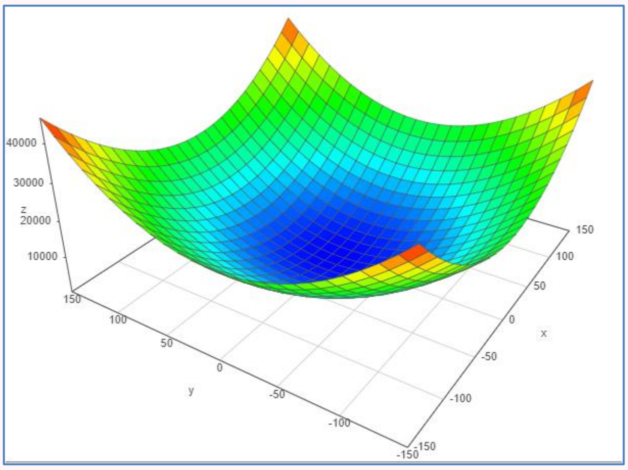
$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} L_{\lambda,\lambda} & L_{\lambda,x} & L_{\lambda,y} \\ L_{x,\lambda} & L_{x,x} & L_{x,y} \\ L_{y,\lambda} & L_{y,x} & L_{y,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L_{x,x} & L_{x,y} \\ g'_y & L_{y,x} & L_{y,y} \end{vmatrix}$$

H è anche detto "hessiano orlato".

- Se $H(\lambda_0, x_0, y_0) > 0$ allora in P(x_0; y_0) si ha un massimo;
- Se $H(\lambda_0, x_0, y_0) < 0$ allora in P(x_0; y_0) si ha un minimo;
- Se $H(\lambda_0, x_0, y_0) = 0$ allora non si può dire nulla (occorrono ulteriori indagini).

[1] Per determinare il valore del determinante si ricorda che: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$.

Esempio 1. Determinare massimi e minimi di $f(x,y)=(x-4)^2+y^2$ subordinatamente al vincolo $x^2=y^2+4$.



<u>*SOLUZIONE*</u>:
Il lagrangiano è

$$L(\lambda,x,y)=(x-4)^2+y^2+\lambda(x^2-y^2-4)$$

Condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2-y^2-4=0 \\ L'_x = 2(x-4)+2\lambda x=0 \\ L'_y = 2y-2\lambda y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2-y^2-4=0 \\ L'_x = 2(x-4)+2\lambda x=0 \\ L'_y = 2y-2\lambda y=0 \end{cases}$$

La terza equazione fornisce $\lambda=1$ o $y=0$

$$(A)\begin{cases} x^2-y^2-4=0 \\ 2(x-4)+2\lambda x=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B)\begin{cases} x^2-y^2-4=0 \\ 2(x-4)+2\lambda x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(A)\begin{cases} x^2-y^2-4=0 \\ 2(x-4)+2x=0 \Longrightarrow x=2 \\ \lambda=1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B)\begin{cases} x=\pm 2 \\ 2(x-4)+2\lambda x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(A)\begin{cases} -y^2=0 \Longrightarrow y=0 \\ x=2 \\ \lambda=1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (B1)\begin{cases} x=2 \\ -4+4\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(B2)\begin{cases} x=-2 \\ -12-4\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

Le soluzioni di (A) e $(B1)$ coincidono. I punti stazionari sono allora due: $P_1 = (2,0)$ e $P_2 = (-2,0)$, i quali sono candidati ad essere punti di massimo o minimo per $f(x, y)$.

Condizioni del second'ordine

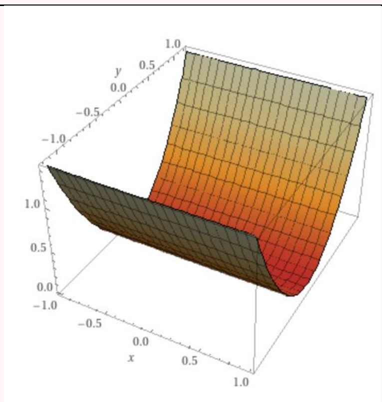
$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & -2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & 2-2\lambda \end{vmatrix} = -\left(4y^2(2+2\lambda) + 4x^2(2-2\lambda)\right)$$

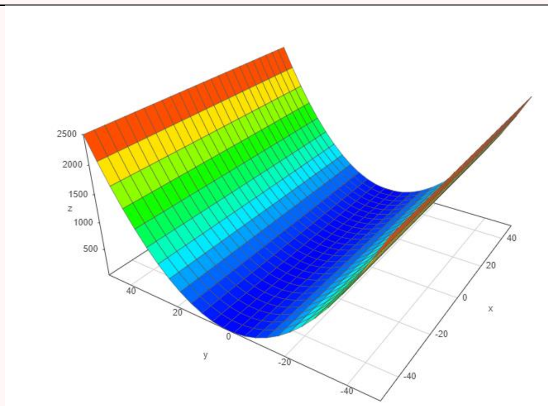
$H(1,2,0) = 0$ non si può dire nulla di P_1

$H(-3,-2,0) = -128 < 0$ P_2 è un punto di minimo.

Esempio 2.

Determinare i massimi e minimi della funzione $f(x;\ y) = y^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$





SOLUZIONE:

La funzione Lagrangiana è $L(\lambda; x; y) = y^2 + \lambda\ (x^2 + y^2 - 1)$. Gli eventuali punti di massimo e minimo vanno cercati fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

Si ottengono quattro soluzioni:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$P\ (1,0)$ $Q\ (-1,0)$ $R(0,1)$ $S(0,-1)$

Calcoliamo l'hessiano:

$$H(\lambda, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = -8x^2 - 8\lambda x^2 - 8\lambda y^2 \ .$$

$H(P) = -8 < 0$ allora P è punto di minimo;

$H(Q) = -8 < 0$ allora Q è punto di minimo;

$H(R) = \ \ 8 > 0$ allora R è punto di massimo;

$H(S) = \ \ 8 > 0$ allora S è punto di massimo.