MATEMATICA GENERALE E FINANZIARIA

a.a. 2023-24
Corso di laurea in Economia Aziendale e Management

UNIVERSITAS STUDIORUM MUTINENSIS ET REGIENSIS
1175

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Fascicolo n. 1

Algebra lineare delle matrici

- *Operazioni con le matrici*
- *Determinante di una matrice quadrata*
- *Matrice inversa*
- *Rango di una matrice, matrici parametriche*
- *Sistemi lineari di equazioni*

Prof.ssa Carla Fiori
Prof. Carlo Alberto Magni

Università di Modena e Reggio Emilia

Algebra lineare

Docente: Carla Fiori
Revisione, integrazioni ed editing: Carlo Alberto Magni

1. Algebra lineare (1) – Matrici e determinanti

0:00:00 Intro
0:00:15 Matrici
0:20:55 Operazioni tra matrici
0:57:09 Determinante di una matrice 1x1 e 2x2
1:03:47 Outro

2. Algebra lineare (2) – Determinante e matrice inversa

0:00:00 Intro
0:00:15 Determinante di matrici 3x3: regola di Sarrus
0:10:13 Determinante di matrici 3x3: Teorema di Laplace
0:38:09 Matrice inversa
0:53:19 Inversa di matrice 2x2
1:00:00 Domanda
1:00:10 Outro

3. Algebra lineare (3) – Matrice inversa, rango, matrici parametriche

0:00:00 Intro
0:00:16 Matrice inversa (richiamo)
0:04:00 Complemento algebrico
0:08:09 Procedimento per il calcolo dell'inversa
0:22:42 Rango (o caratteristica) di una matrice
0:38:40 (Rango di) matrici parametriche
1:02:25 Esercizio: sistema di equazioni
1:08:30 Esercizio: calcolo di inversa 3x3
1:15:44 Outro

4. Algebra lineare (4) – Sistemi lineari di equazioni

0:00:00 Intro
0:00:16 Sistemi di equazioni lineari
0:07:19 Caso m=n (matrice dei coefficienti quadrata): risoluzione con matrice inversa
0:22:58 Caso m=n (matrice dei coefficienti quadrata): risoluzione con metodo di Cramer
0:34:21 Caso m diverso da n (matrice dei coefficienti rettangolare)
0:56:41 Esempio di sistema rettangolare risolto con matrice inversa
0:58:46 Esercizi
1:20:45 Outro

MATRICI

Una **matrice** A di tipo m x n è una tabella di m·n elementi disposti in m righe ed n colonne e racchiusi tra due parentesi tonde (o quadre):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Gli elementi di una generica matrice si indicano mediante una lettera con due indici il primo dei quali indica la riga e il secondo la colonna a cui l'elemento appartiene. La matrice soprascritta è formata

dalle **m righe**

$$\begin{matrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}) \end{matrix}$$

dalle **n colonne**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento $\mathbf{a_{ij}}$ prende il nome di **elemento di posto i,j** della matrice e si trova all'incrocio della riga i-esima con la colonna j-esima

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow \text{1° riga} \\ \uparrow \text{2° colonna} & \end{array}$$

- La matrice il cui elemento di posto i,j è a_{ij}, a volte è indicata brevemente con il simbolo (a_{ij}).

- Una matrice 1 x n è detta **vettore riga**. Ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Una matrice m x 1 è detta **vettore colonna**. Ha la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

- Matrice **trasposta** A^T di una matrice A è la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 45 & -5 \\ 13 & -6 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 45 & 13 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Se m = n la **matrice** si dice **quadrata**, di ordine n.

- Una **matrice** quadrata si dice **simmetrica** se $A^T = A$

Esempio.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A^T$$

- Una **matrice** quadrata si dice **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ per $i > j$

Esempio.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Una **matrice** quadrata si dice **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $i < j$

Esempio.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Una **matrice** si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

  Esempio. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$$

- La matrice diagonale tale che $a_{ii} = 1, i = 1,2, \dots, n$, si chiama **matrice identità**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni con le matrici

1) Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici m x n, si definisce **somma** di A e B e si indica con C = A + B, la matrice m x n il cui elemento c_{ij} di posto i,j è dato da

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Esempio. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2) Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici m x n, si definisce **differenza** di A e B e si indica con C = A - B, la matrice m x n il cui elemento c_{ij} di posto i,j è dato da

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\ .}$$

Esempio. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Se $A = (a_{ij})$ è una matrice m x n e $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce **prodotto di λ per *A***, e si indica con λA, la matrice m x n il cui elemento di posto i,j è

$$\boxed{\lambda \cdot a_{ij}}$$

Esempio. $$7\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 & 21 \\ 0 & 7 & 35 \end{bmatrix}$$

4) Date le matrici A di tipo 1 x n e B di tipo m x 1, si definisce **prodotto** del **vettore riga** A **per il vettore colonna** B, il numero

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \,.}$$

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) = 2 - 21 = -19.$$

5) Date le matrici A di tipo m x r e B di tipo r x n ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

si definisce **prodotto righe per colonne** di A per B, la matrice C tale che l'elemento di posto ij è ottenuto moltiplicando la i-esima riga di A con la j-esima colonna di B.

$$\boxed{c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} \cdots a_{ir} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ir} b_{rj}}$$

Esempio. Considerate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si noti che il prodotto righe per colonne non gode della proprietà commutativa, ossia anche quando esistono sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in generale risulta $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Valgono le seguenti **proprietà**:

$A + (B + C) = (A + B) + C$	Proprietà associativa
$A + B = B + A$	Proprietà commutativa
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \lambda \in \mathbb{R}$	Proprietà distributiva
$(\lambda + \xi)A = \lambda A + \xi A \qquad \lambda, \xi \in \mathbb{R}$	Proprietà distributiva
$(AB)C = A(BC)$	Proprietà associativa
$A(B + C) = AB + AC$	Proprietà distributiva
$\lambda(AB) = (\lambda A)B \quad \lambda \in \mathbb{R}$	Proprietà associativa
$(A + B)C = AC + BC$	Proprietà distributiva
$(A + B)^T = A^T + B^T$	Trasposta di una somma
$(AB)^T = B^T A^T$	Trasposta di un prodotto fra matrici
$\lambda A^T = (\lambda A)^T \quad \lambda \in \mathbb{R}$	Trasposta di una matrice per uno scalare
$(A^T)^T = A$	Trasposta di una trasposta

Esempio.

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ si ha

$$(2(A + B))^T = 2\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^T = 2\begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 0 & 10 \\ -6 & 4 & 12 & -4 \end{bmatrix} = 2(A + B)^T$$

Esercizio 1.

Calcolare il prodotto (righe per colonne) delle matrici

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soluzione:

$c_{11} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 7$; $\quad c_{12} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -2$;

$c_{21} = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 11$, $\quad c_{22} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = -3$,

$c_{31} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -3$, $\quad c_{32} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$;

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 11 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.
Calcolare il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 2\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 4\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 4\cdot(-4) + 0\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.
Calcolare il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.
Calcolare il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 25 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizi da svolgere

Esercizio 1. *Trovare la matrice X tale che A+X=B dove* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *Eseguire i seguenti prodotti righe per colonne*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *verificare che* $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Esercizio 4. *Date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ *verificare che* $(A + B)^T = A^T + B^T$.

<u>Risposte</u>

Esercizio 1 : X=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

Esercizio 2 : a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$; b) (6)

Esercizio 3 : $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

Esercizio 4 : $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Per evidenziare come le matrici siano un importante strumento per tradurre in modelli matematici problemi della vita quotidiana, presentiamo alcune semplici applicazioni.

Applicazione (Spesa complessiva)

Acquistate uno stock di 20 CD, 50 DVD, 20 custodie per CD, 35 custodie per DVD. Il prezzo unitario dei CD è 0.2 euro, quello dei DVD è 0.35 euro, quello delle custodie è 0.15 euro e 0.25 euro rispettivamente. Rappresentare la matrice dei prezzi e la matrice delle quantità e calcolare, mediante il prodotto riga per colonna, la spesa complessiva.

<u>Soluzione</u>

Matrice dei prezzi

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.35 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Matrice delle quantità

$$B = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix}$$

La spesa complessiva è

$$AB = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.35 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix} = 33.25$$

Applicazione (Profitto)

Profitto febbraio (euro) – matrice A			
	Nord	Centro	Sud
TV LCD	10000	9000	8500
TV plasma	3400	2300	4000

Profitto marzo (euro) - matrice B			
	Nord	Centro	Sud
TV LCD	9800	9300	8100
TV plasma	3400	2400	4400

Variazioni profitto da febbraio a marzo :

$$B - A = \begin{bmatrix} -200 & 300 & -400 \\ 0 & 100 & 400 \end{bmatrix}$$

Qual è il profitto di febbraio suddiviso per area?

$$[1 \quad 1] \cdot A = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 10000 & 9000 & 8500 \\ 3400 & 2300 & 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{13400}^{Nord} & \overbrace{11300}^{Centro} & \overbrace{12500}^{Sud} \end{bmatrix}$$

Qual è il profitto complessivo di febbraio?

$$\begin{bmatrix} \overbrace{13400}^{Nord} & \overbrace{11300}^{Centro} & \overbrace{12500}^{Sud} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 37200$$

Qual è il profitto di febbraio suddiviso per prodotto?

$$\begin{bmatrix} 10000 & 9000 & 8500 \\ 3400 & 2300 & 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27500 \\ 9700 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{LCD} \\ \rightarrow \text{plasma} \end{matrix}$$

Qual è il profitto complessivo di febbraio?

$$[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 27500 \\ 9700 \end{bmatrix} = 37200$$

Qual è la variazione complessiva del profitto tra febbraio e marzo?

$$[1 \quad 1] \begin{bmatrix} -200 & 300 & -400 \\ 0 & 100 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 200$$

<u>**NOTA**</u> - Per trovare le risposte si sono usate opportunamente le operazioni fra matrici e il vettore unitario. In generale, possiamo affermare quanto segue:

Sia $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ *il vettore unitario. Sia A una matrice. Il prodotto* $\boldsymbol{e}^T A$ *è un vettore riga che ha come componenti le somme degli elementi delle colonne di A. Il prodotto* $A\boldsymbol{e}$ *è un vettore colonna che ha come componenti le somme degli elementi delle righe di A.*
Il prodotto

$$\boldsymbol{e}^T A \, \boldsymbol{e}$$

ha, come risultato, la somma di tutti gli elementi di una matrice.

Determinante di una matrice quadrata

Il determinante di una matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

è un numero. Si indica con det A oppure con la notazione fra linee verticali:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1. **Determinante di una matrice 1x 1**

   Data la matrice $A = (a)$

   si definisce determinante di A il numero

$$\det A = a.$$

2. **Determinante di una matrice 2 x 2**

   Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

   si definisce determinante di A il numero

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 12 = 28 \quad , \quad \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 48 = 42\,.$$

3. Determinante di una matrice 3 x 3

Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

per calcolare il determinante presentiamo due metodi.

<u>1° metodo</u>: **Regola di Sarrus**

Il determinante si calcola utilizzando lo schema della figura sotto riportata. La linea continua sta a significare il prodotto dei tre termini, mentre la linea tratteggiata significa il prodotto dei tre termini cambiato di segno .

ATTENZIONE che questa regola <u>**vale solo per le matrici di ordine n = 3**</u>.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

<u>2° metodo</u>: **Regola generale**

Indichiamo con A_{1j} la matrice ottenuta da A eliminando la riga 1-esima e la colonna j-esima . Il determinante di A è definito da

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}\, a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

<u>Esempio</u>

Considerata la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

si ha

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, eliminando la prima riga e la terza colonna, $A_{13} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-1) - 2 \cdot (-6-0) = 1 + 12 = 13\,.$$

Sia $a_{ij} \in A$ con i,j indici compresi fra 1 e 3 , si definisce

- minore complementare di a_{ij} il numero $\det A_{ij}$,
- complemento algebrico di a_{ij} il numero $\left(-1^{i+j}\right) \det A_{ij}$.

La definizione di det A data nel 2° metodo si può allora esprimere dicendo che ***il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della prima riga di A per i rispettivi complementi algebrici***. **Questo procedimento si generalizza: fissata una qualunque riga (non necessariamente la prima riga come fatto sopra) o una qualunque colonna, il det *A* si ottiene sommando i prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici**.

Esempio. Sviluppando rispetto alla seconda riga il determinante della matrice (1) si ha

$$\det A = a_{21}(-\det A_{21}) + a_{22}(\det A_{22}) + a_{23}(-\det A_{23})$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Nel caso della matrice A data in (2) si ha

$$\det A = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 1 = 13\,.$$

Determinante di una matrice n x n

Quanto visto nella Regola generale (2° metodo) illustrata per il caso $n = 3$, si può generalizzare ad una qualunque matrice quadrata A di ordine n con $n \geq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Se i,j sono due indici compresi fra 1 ed n, con A_{ij} indichiamo la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima. Si definisce

- **minore complementare dell'elemento a_{ij} il numero $\det A_{ij}$,**
- **complemento algebrico dell'elemento a_{ij} il numero $(-1^{i+j}) \det A_{ij}$.**

TEOREMA DI LAPLACE . ***Il determinante di una matrice quadrata A di ordine n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i rispettivi complementi algebrici.***

Si noti che questo teorema riconduce la nozione di determinante di una matrice n x n a quella di determinante di n matrici $(n-1) \times (n-1)$. Calcolare il determinante applicando questo teorema è d'uso dire "*calcolo con il metodo di Laplace*".

Se per esempio calcoliamo con il metodo di Laplace il determinante di (3) sviluppando secondo la prima riga risulta:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

dove A_{1j} indica la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la prima riga e la colonna j-esima.

Il determinante di una matrice quadrata A si può pertanto esprimere con una delle seguenti due formule a seconda che il calcolo venga fatto a partire da una riga o da una colonna.

Considerando la i-esima riga $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ della matrice A :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad ,$$

Considerando la j-esima colonna $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ della matrice A si ha :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det A_{ij} \quad ,$$

Esercizio

Calcolare con il metodo di Laplace il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione . Sviluppando secondo la prima riga si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - (-2) = 6$$

NOTA – Il determinante di una **matrice diagonale** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ è

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Proprietà dei determinanti

1. $\det A = \det A^T$.

2. Date due matrici A e B quadrate di ordine n, si ha $\det AB = \det A \cdot \det B$.

3. Se la matrice A' si ottiene da A scambiando tra loro due righe o due colonne, allora $\det A = -\det A'$.

4. Se la matrice A' si ottiene da A moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det A' = \lambda \det A$.

5. Se due righe (o due colonne) della matrice A sono uguali, allora è $\det A = 0$. Più in generale, se gli elementi di una riga (rispettivamente colonna) sono proporzionali a quelli di un'altra riga (rispettivamente colonna), allora il determinante è nullo.

6. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero.

7. Se si somma ad una riga (o colonna) **un'altra** riga (o colonna) moltiplicata per un numero, il determinante non cambia.

Esercizi sui Determinanti

1. *Calcolare il determinante della seguente matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

La presenza di tre elementi nulli nella quarta riga della matrice suggerisce lo sviluppo secondo tale riga:

$$\det A = (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ora secondo la terza riga, si ottiene:

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-20) - 2 \cdot (12 - 10) = -40 - 4 = -44 .$$

2. *Calcolare il determinante della seguente matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

Sviluppando il determinante secondo la prima colonna si ottiene:

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & a \\ 7 & \frac{1}{2} & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ancora secondo la prima colonna entrambi i determinanti di ordine 3, otteniamo:

$$\det A = 2\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 3\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 11\cdot(a-4)\,.$$

3. *Calcolare il determinante della seguente matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u>

Sviluppiamo il determinante secondo la quinta colonna che presenta i primi quattro elementi nulli; si ottiene:

$$\det A = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & a & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ancora secondo la prima colonna della matrice, otteniamo:

$$\det A = 1\cdot \begin{vmatrix} a & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ a & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\,.$$

4. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u>

Applichiamo la regola di Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 10 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right.$$

$$\det A = 6\cdot 5\cdot 3 + 10\cdot(-1)\cdot(-2) + 3\cdot 3\cdot 1 - 10\cdot 3\cdot 3 - 6\cdot(-1)\cdot 1 - 3\cdot 5\cdot(-2) = 65$$

Esercizi da svolgere

Esercizio 1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ x^2+1 & x+1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} a-b & a^2 \\ 1 & a+b \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2. *Applicando la regola di Sarrus, calcolare i seguenti determinanti:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} ; \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} .$$

Esercizio 3. *Calcolare il seguente determinante:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio 4. *Calcolare il seguente determinante:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Risposte</u>

1. $\det A = -1$; $\det B = 2x$; $\det C = -b^2$.

2. $\det A = 0$; $\det B = 0$.

3. $\det A = -117$

4. $\det A = 34$

Matrice Inversa

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ esiste la matrice quadrata di ordine n

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

detta **matrice identità** perché $A \cdot I = I \cdot A = A$ qualunque sia la matrice A di ordine n.

Sia A una matrice quadrata di ordine n . Diremo che A è **invertibile** se esiste una matrice A^{-1} di ordine n tale che

$$A\, A^{-1} = A^{-1}\, A = I$$

La matrice A^{-1} si chiama **matrice inversa** di A . Si può verificare che, se esiste, l'inversa di una matrice è unica.

<u>Esempio</u>. La matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ è la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ perché risulta $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dunque $B = A^{-1}$.

TEOREMA. ***Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata ammetta l'inversa è che il suo determinante sia diverso da zero.***

In simboli: **esiste A^{-1} $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0$**

TEOREMA (CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA). ***Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine n invertibile , gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da***

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A},$$

dove $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$ è il complemento algebrico di a_{ji}.

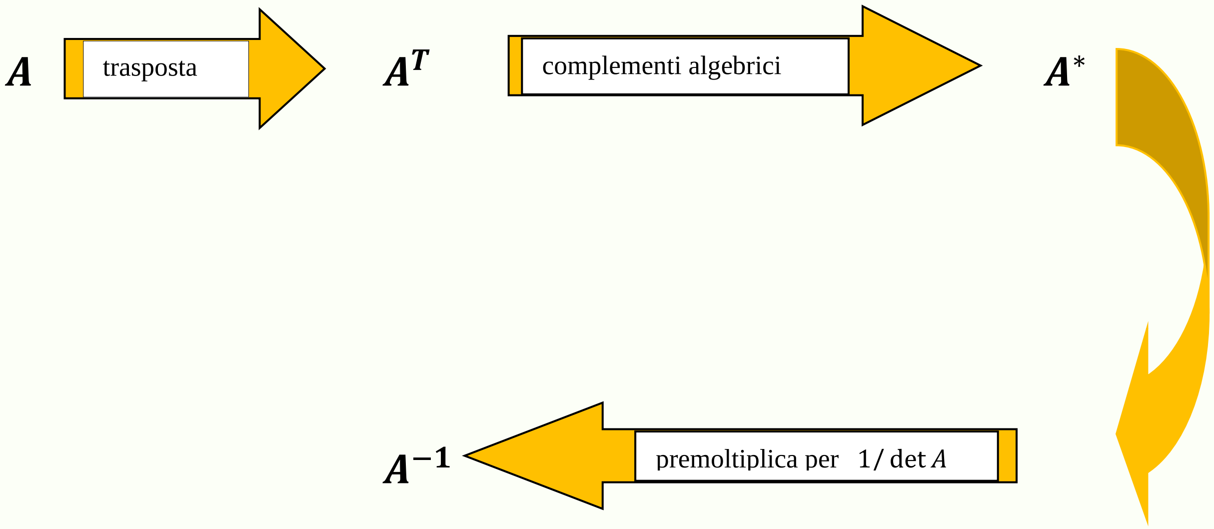
Siano A e B matrici quadrate di ordine n con det A ≠ 0. Poiché esiste A^{-1}, per risolvere le equazioni matriciali

$$\mathbf{A \cdot X = B} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y \cdot A = B}$$

basta moltiplicare, rispettivamente, a sinistra e a destra per A^{-1} :

$$\mathbf{X = A^{-1}\,B} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Y = B \cdot A^{-1}}$$

<u>NOTA</u> - Poiché $\det A_{ji} = \det A^T_{ij}$, indicato con A^* la matrice **aggiunta**, cioè la matrice che ha come elementi i complementi algebrici degli elementi di A^T, per calcolare la matrice inversa di A si può procedere in questo modo



<u>Esempio</u>.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det A = -1$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -1 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ infatti}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>NOTA</u> **–** Nel caso di una matrice A di ordine 2, per determinare A^{-1} si può procedere in questo modo:

- si scambiano gli elementi sulla diagonale principale,
- si cambia segno agli elementi sulla diagonale secondaria,
- si divide ogni elemento per det A.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -13 \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{7}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$

Esercizi sulla Matrice Inversa

1. *Determinare la matrice inversa di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

Calcoliamo prima il $\det A$. Sviluppiamo secondo la prima colonna:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Essendo $\det A \neq 0$, A è invertibile.

I complementi algebrici degli elementi di A sono:

$(-1)^{1+1} \det A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\qquad (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$(-1)^{1+3} \det A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$; $\qquad (-1)^{2+1} \det A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$(-1)^{2+2} \det A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$; $\qquad (-1)^{2+3} \det A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$(-1)^{3+1} \det A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +2$; $\qquad (-1)^{3+2} \det A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$;

$(-1)^{3+3} \det A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ricordando il Teorema di calcolo della matrice inversa, gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da $b_{ij} = (-1)^{i+j}\dfrac{\det A_{ji}}{\det A}$. Applicando questa formula:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La stessa soluzione può essere ottenuta utilizzando la matrice trasposta e quindi la matrice aggiunta. Si ha

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

I complementi algebrici degli elementi di A^T sono

$(-1)^{1+1}\det A^T_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,;$ $(-1)^{1+2}\det A^T_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\,;$

$(-1)^{1+3}\det A^T_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +2\,;$ $(-1)^{2+1}\det A^T_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,;$

$(-1)^{2+2}\det A^T_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\,;$ $(-1)^{2+3}\det A^T_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\,;$

$(-1)^{3+1}\det A^T_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\,;$ $(-1)^{3+2}\det A^T_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\,;$

$(-1)^{3+3}\det A^T_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$

La matrice aggiunta è dunque

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa è

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Determinare la matrice inversa di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u>.
Calcoliamo prima il $\det A$. Sviluppiamo secondo la prima colonna:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 .$$

Essendo $\det A \neq 0$, A è invertibile.

I complementi algebrici degli elementi di A sono:

$$(-1)^{1+1} \det A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 ; \qquad (-1)^{1+2} \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$(-1)^{1+3} \det A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \qquad (-1)^{2+1} \det A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 ;$$

$$(-1)^{2+2} \det A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 ; \qquad (-1)^{2+3} \det A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$(-1)^{3+1} \det A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 ; \qquad (-1)^{3+2} \det A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 ;$$

$$(-1)^{3+3} \det A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Utilizzando il Teorema di calcolo della matrice inversa A^{-1} si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la procedura alternativa (ma equivalente) si ottiene

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

I complementi algebrici degli elementi di A^T sono

$(-1)^{1+1}\det A^T_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\,;$ $(-1)^{1+2}\det A^T_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\,;$

$(-1)^{1+3}\det A^T_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\,;$ $(-1)^{2+1}\det A^T_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0\,;$

$(-1)^{2+2}\det A^T_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\,;$ $(-1)^{2+3}\det A^T_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\,;$

$(-1)^{3+1}\det A^T_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,;$ $(-1)^{3+2}\det A^T_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$(-1)^{3+3}\det A^T_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$

La matrice aggiunta è dunque

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava la matrice inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. *Determinare la matrice inversa della matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}\,.$$

<u>Soluzione</u>.
La matrice A è invertibile sempre perché $\det A = 1 \neq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizi da svolgere

Esercizio 1. *Calcolare, se esistono, le inverse delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Trovare la matrice X in modo che risulti*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *risultano invertibili le seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2k & 2+2k & 6 \\ k & 4-2k & 3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} k+3 & 3 & 2+k \\ 2 & 2 & k \\ 5 & 4 & 3+k \end{pmatrix}.$$

<u>Risposte</u>

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. B^{-1} *esiste per* $x \neq 0, y \neq 0$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. A è invertibile per $k \neq 0$ *e* $k \neq 1$. B è invertibile per $k \neq \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Rango (o caratteristica) di una matrice

La nozione di determinante di una matrice è definita solo per le matrici quadrate, ossia se A è una matrice di tipo $m \times n$ con $m \neq n$, **non** esiste il determinante di A.
Data una qualunque matrice (quadrata o rettangolare)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

da essa si possono "estrarre" delle sottomatrici quadrate i cui determinanti si dicono **minori** della matrice A. Il numero di righe (o colonne) della sottomatrice quadrata estratta si chiama **ordine** del minore.

DEFINIZIONE. Si chiama **rango** (o **caratteristica**) della matrice A l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

In altre parole, l'intero positivo $k \leq \min\{m, n\}$ è la caratteristica di A se :

1) dalla matrice A si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k ;
2) tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre da A, sono nulli.

Esempio. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

può avere al massimo rango 3 perché tale è l'ordine massimo delle matrici quadrate in essa contenute. Si verifica che i quattro minori di ordine 3 estraibili dalla matrice sono tutti nulli e perciò il rango sarà minore di 3. Poiché tra i minori di ordine 2 ve ne è almeno uno non nullo, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

si ha che il rango della matrice è 2 .

Esercizio 1.
Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} .$$

<u>Soluzione</u>
Si osservi che i quattro minori di ordine 3 che si possono estrarre da questa matrice

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} ,$$

sono tutti nulli, ossia hanno tutti determinante uguale a zero. Poiché risulta ad esempio:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 ,$$

rimane provato che esiste almeno un minore di ordine 2 con determinante diverso da zero e perciò il rango della matrice considerata è 2 : $r(A) = 2$.

Esercizio 2.
Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

<u>Soluzione</u>.
Poiché $\det A = 0$ e per esempio

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 ,$$

segue che il rango della matrice considerata è 2 : $r(A) = 2$.

Per determinare il rango di una matrice, si possono ridurre i calcoli se si utilizza il seguente teorema:

TEOREMA DI KRONEKER. ***Se la matrice A, quadrata o rettangolare, possiede un minore D non nullo di ordine r, e sono nulli tutti i minori d'ordine $r+1$ di A ottenuti "orlando" D con una riga e una colonna qualsiasi di A, allora il rango di A è uguale a r.***

In pratica, si procede nel seguente modo.

Supponiamo di aver trovato un minore D, d'ordine r, non nullo. Calcoliamo i minori d'ordine $(r+1)$ ottenuti "orlando" il minore D:

- se tutti questi minori sono nulli, il rango della matrice è r;
- se almeno uno di essi è non nullo, bisogna ripetere il procedimento considerando quest'ultimo minore.

Esercizi svolti

1. *Determinare il rango della matrice*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}:$$

<u>Soluzione</u>

Applichiamo il procedimento di Kronecker.

Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, essa è tale che $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0$, da cui $2\leq r(A)\leq 3=\min\{3,4\}$.

Consideriamo ora le sottomatrici di ordine 3 ottenute orlando la sottomatrice considerata:

$$M=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad N=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Poiché $\det M=3\neq 0$, si conclude che $r(A)=3$.

2. *Determinare il rango della matrice*:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u>

Applichiamo il procedimento di Kronecker.

Consideriamo la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, essa è tale che $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0$, da cui

$2\leq r(A)\leq 3=\min(4,3)$.

Considerata la sottomatrice di ordine 3

$$M=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

risulta $\det M=-4\neq 0$; si conclude pertanto che $r(B)=3$.

3. *Trovare il rango della matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>

La matrice contiene il minore non nullo di ordine 2

$$M=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0 .$$

Orlando il minore M si ottiene il minore di ordine 3

$$N=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0 .$$

Poiché i due minori del quarto ordine ottenuti orlando N sono nulli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

il rango della matrice A è uguale a 3.

4. *Trovare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix} .$$

Soluzione

La matrice contiene il minore non nullo di ordine 2:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \; .$$

Poiché tutti i nove minori di ordine 3 ottenuti orlando M sono nulli:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 13 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 14 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 15 & 16 & 17 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 15 & 16 & 18 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 15 & 16 & 19 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

si conclude che il rango della matrice A è 2.

Matrici dipendenti da un parametro

A volte è importante determinare il rango di una matrice, discutendo il problema in relazione ai parametri reali che vi figurano. Trattiamo l'argomento presentando qualche esempio.

Esercizio 1.

Calcolare, per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ -1 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 2 & k^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 2k \\ -k & -2k \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>

1) $\det A = k^2 + 2$, quindi $\det A \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e pertanto $r(A) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

2) $\det B = k^2 + 2k = k(k+2)$ quindi $\det B \neq 0$ per $k = 0$ e $K = -2$.
   - *Se* $k \neq 0$ *e* $k \neq -2$ *si ha* $\det B \neq 0$ *e pertanto* $r(B) = 2$.
   - *Se* $k = 0$ *oppure* $k = -2$ *si ha* $\det B = 0$ *e* $\det M \neq 0$ *con* $M = (1)$ *e pertanto* $r(B) = 1$.

3) $\det C = -2k^2 + 2k^2 = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ quindi $r(C) < 2$.
   - *Se* $k \neq 0$ *si ha* $r(C) = 1$.
   - *Se* $k = 0$ *si ha* $r(C) = 0$.

Esercizio 2.

Calcolare, per ogni valore del parametro t, *il rango della matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & t & t+2 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u>

Troviamo i valori di t per i quali si annulla il determinante di A, ossia risolviamo l'equazione:

$$\begin{vmatrix} 2t & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & t & t+2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione $t^2 + 3t - 4 = 0$ che ammette le soluzioni $t = 1$ e $t = -4$. Dobbiamo quindi distinguere i seguenti casi:

Caso 1. Per $t \neq 1$, $t \neq -4$, il determinante della matrice A è diverso da zero e perciò A ha rango 3 : $r(A) = 3$.

Caso 2. Per $t = 1$, si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ ,$$

perciò il rango della matrice A è 2 : $r(A) = 2$.

Caso 3. Per $t = -4$, si ha

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ ,$$

perciò il rango della matrice A è 2 : $r(A) = 2$.

Esercizio 3.
Determinare, per ogni valore del parametro t, *il rango della matrice*:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t & t-1 & 0 \\ t & 2t-2 & 2t-2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione
Troviamo i valori di t per i quali si annulla il determinante della matrice A, cioè risolviamo l'equazione $t\,(t-1)\,(2t-2) = 0$ che ammette le soluzioni $t = 0$ e $t = 1$.

Dobbiamo quindi distinguere i seguenti casi:

Caso 1. Per $t \neq 0$, $t \neq 1$, il determinante della matrice A è diverso da zero e perciò A ha rango 3 : $r(A) = 3$.

Caso 2. Per $t = 0$, si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ ,$$

perciò il rango della matrice A è 2 , cioè r(A) = 2 .

Caso 3. Per t = 1 , si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

e tutti i minori di ordine 2 uguali a zero perché la matrice A ha due colonne tutte di zeri; pertanto, il rango della matrice A è 1 : r(A) = 1 .

Esercizi da svolgere

Esercizio 1. *Determinare il rango delle seguenti matrici.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ ; \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Studiare il rango delle seguenti matrici in funzione di k.*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 8 & 2k \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Risposte.

1. $r(A) = 1$; $r(B) = 2$; $r(C) = 3$.

2. $r(A) = 2$ per $k \neq \pm 2$; $r(A) = 1$ per $k = \pm 2$.

$r(B) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

SISTEMI LINEARI

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Un **sistema lineare di m equazioni in n incognite** è della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema soprascritto è costituito da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$. Il sistema si dice lineare perché nelle equazioni ogni termine incognito figura al primo grado. I numeri reali a_{11}, a_{12}, ..., che compaiono nel sistema, vengono indicati brevemente con a_{ij} e prendono il nome di **coefficienti** del sistema; i numeri reali $b_1, b_2, \dots, b_m$ prendono il nome di **termini noti**. Se i termini noti sono tutti nulli, il sistema lineare si dice **omogeneo**.

Il sistema è caratterizzato dalla **matrice A dei coefficienti**, detta anche matrice del sistema, dal vettore ***B*** **dei termini noti** e dal vettore ***X*** **delle incognite.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Il sistema si può rappresentare

1. in forma matriciale esplicita :

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1. in forma matriciale compatta:

$$A \cdot X = B$$

dove $A \cdot X$ è il prodotto righe per colonne della matrice A per il vettore X. Si osservi che si tratta del prodotto di una matrice m x n per una matrice n x 1 (matrice colonna) che dà per risultato una matrice m x 1 . Esistono delle condizioni sui coefficienti e sui termini noti affinché il sistema ammetta delle soluzioni, ossia affinché esistano dei valori reali $x_1, x_2, \dots, x_n$ per i quali tutte le equazioni del sistema risultino contemporaneamente soddisfatte; in tal caso la n-pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è detta una **soluzione** del sistema.

Caso $m = n$ *con* $\det A \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Siano rispettivamente A, B, X la matrice dei coefficienti, dei termini noti, delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se* $\det A \neq 0$ *il sistema ha una ed una sola soluzione.

Per trovare la soluzione del sistema illustriamo due metodi generali (caso m=n, det A ≠ 0).

<u>Primo metodo</u>: *Metodo matrice inversa.*

Risolvere il sistema significa risolvere l'equazione $AX = B$:

$$AX = B$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$X = A^{-1}B$$

Esempio
Consideriamo il sistema rappresentato da $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 + 6 + 0 - (0 + 0 + 0) = 9$$

Poiché $\det A \neq 0$, determiniamo la matrice A^{-1}:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ -2/9 & 1/3 & 1/9 \\ -2/9 & -2/3 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ -2/9 & 1/3 & 1/9 \\ -2/9 & -2/3 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 13/9 \\ -14/9 \end{pmatrix}$$

Pertanto, il sistema dato ha come unica soluzione $\left(x = \frac{10}{3}, y = \frac{13}{9}, z = \frac{-14}{9}\right)$.

Esercizio

Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +3 & 5 \end{pmatrix}$ *risolvere l'equazione* $AX = B$.

Soluzione

Poiché $\det A \neq 0$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ si ha:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$$

<u>**Secondo metodo**</u> : *Metodo di Cramer*.

Senza ricorrere alla matrice inversa, un metodo generale per risolvere il sistema (1) è dato dal seguente teorema.

TEOREMA DI CRAMER. ***Il sistema lineare $AX = B$ con A matrice quadrata di ordine n e $\det A \neq 0$, ammette una ed una sola soluzione data da***

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}}\ , \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}}\ , \qquad \ldots.. \qquad \boldsymbol{x_n = \frac{\det A_n}{\det A}}$$

dove A_i è la matrice che si ottiene sostituendo la colonna i-esima di A con la colonna B dei termini noti, per i = 1, 2, … ,n .

In forma matriciale compatta il teorema di Cramer è espresso da

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

Esercizio 1
Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>
La matrice del sistema è :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e risulta } \det A = 24 .$$

Poiché $\det A \neq 0$, per il teorema di Cramer, il sistema lineare ammette una ed una sola soluzione (x_1, x_2, x_3) fornita dalla regola di Cramer:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \ , \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21 \ , \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \ .$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{27}{24} = -\dfrac{9}{8} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8} \\ x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = -\dfrac{12}{24} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 2

Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + 5z = -1 \\ 2x + 3y - z = 11. \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -42 \ ,$$

Poiché $\det A \neq 0$, il sistema si può risolvere applicando il teorema di Cramer. Risulta:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 42 \ ; \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -210 \ ; \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -84 \ ;$$

e pertanto la soluzione cercata è:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{42}{-42} = -1 \ ; \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-210}{-42} = 5 \ ; \qquad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-84}{-42} = 2$$

Il teorema di Rouché – Capelli

Consideriamo un sistema lineare di tipo generale, formato da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots \quad \dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o, con notazione matriciale, $AX = B$, dove A è la matrice dei coefficienti ed è detta **matrice incompleta** del sistema di equazioni:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice X è la matrice delle incognite:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matrice B è la matrice dei termini noti:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si definisce **matrice completa** del sistema (2), la matrice C ottenuta aggiungendo alle colonne di A la colonna dei termini noti :

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Il seguente importante teorema fornisce un criterio per stabilire se il sistema (2) ammette oppure no soluzioni (si tenga presente che m ed n **non** sono necessariamente uguali).

Teorema di Rouchè-Capelli. ***Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di m equazioni lineari in n incognite abbia soluzioni è che le matrici completa e incompleta del sistema abbiano lo stesso rango.***

Se il sistema ha soluzioni, detto k il rango delle due matrici (completa ed incompleta), per risolvere il sistema si procede nel seguente modo:

1) *Dalla matrice incompleta A si estrae una sottomatrice quadrata A_k con $k = r(A)$ e $\det A_k \neq 0$.*

2) *Si scrive un "nuovo" sistema formato dalle k equazioni i cui coefficienti sono le righe di A_k. Inoltre, si portano al secondo membro tutti gli eventuali n-k termini i cui coefficienti non compaiono in A_k.*

3) *Si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite, con determinante non nullo, mediante la regola di Cramer;*

4) ***Le soluzioni del sistema iniziale sono le n-ple ottenute con la soluzione del sistema costruito nel punto 3) e con gli n-k parametri se $k < n$.*** In questo caso si dice che

il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni.

Ad esempio, sia k, $k < n$, il rango di A e di C e sia D una sottomatrice di A avente rango k, per semplicità supponiamo che D sia costituita dalle prime k righe e dalle prime k colonne.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad \det D \neq 0 .$$

Consideriamo il sistema nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k = b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

Poiché $\det D \neq 0$, per il teorema di Cramer, il sistema (3) ammette una ed una sola soluzione nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_k$, in questa soluzione figurano come parametri $x_{k+1}, \dots, x_n$ a cui si può attribuire qualunque valore reale. In definitiva il sistema (2) ammette pertanto infinite soluzioni, ciascuna delle quali si ottiene ricavando, con la regola di Cramer, i valori di $x_1, x_2, \dots, x_k$ e fissando arbitrariamente $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Esempio 1

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = -4 \end{cases},$$

la matrice incompleta A e la matrice completa C sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed hanno entrambe rango 2 e pertanto il sistema ammette soluzioni. Dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia per esempio

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = -4 + x_3 \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti". Possiamo riscrivere il sistema, con notazioni matriciali: $DX = B$ con $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 + x_3 \end{pmatrix}$, ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 + x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice D ammette l'inversa (il suo determinante è non nullo e uguale a 1). La calcoliamo:

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow D^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow D^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + x_3 \\ -4 + x_3 \end{pmatrix}$$

La soluzione generale del sistema è dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + x_3 \\ -4 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Per ogni $x_3 \in \mathbb{R}$ questo sistema ammette la soluzione $x_1 = -2 + x_3$, $x_2 = -4 + x_3$. Perciò il sistema dato ammette le infinite soluzioni $(-2 + x_3, -4 + x_3, x_3)$ ottenute al variare di x_3 in $\mathbb{R}$.

Esempio 2

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

la matrice incompleta A e la matrice completa C sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

ed hanno entrambe rango 2 e pertanto il sistema ammette soluzioni. Dalla matrice A estraiamo una sottomatrice quadrata di ordine 2 e rango 2. Sia per esempio

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

ottenuto considerando come incognite quelle relative ai coefficienti delle colonne di D mentre le altre incognite si portano al secondo membro e si considerano "termini noti". Risolvendo questo sistema (per esempio con Cramer) si ottiene la soluzione $x_1 = 1, x_2 = 2$ che è anche l'unica soluzione del sistema dato perché il rango k è uguale al numero n delle incognite.

Esempio 3

Discutere e risolvere al variare del parametro h il sistema

$$\begin{cases} hx + y = 1 \\ x + hy = 1 - h \end{cases}$$

La matrice incompleta è $A = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}$, la matrice completa è $C = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1-h \end{pmatrix}$. Risulta $\det A = h^2 - 1$ e pertanto

1) se $h = \pm 1$ si ha $\det A = 0$, quindi $r(A) = 1$ mentre $r(C) = 2$ e perciò il sistema non ammette soluzioni.
2) se $h \neq \pm 1$ si ha $\det A \neq 0$ e $r(A) = r(C) = 2$ e perciò il sistema ammette soluzioni. Applicando, per esempio, il teorema di Cramer si trova la soluzione

$$\left(\frac{2h - 1}{h^2 - 1}, \frac{h - h^2 - 1}{h^2 - 1} \right).$$

Sistemi omogenei

Un sistema lineare avente tutti i termini noti nulli, ossia del tipo $AX = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

prende il nome di **sistema omogeneo**. Tale sistema ha sempre soluzione perché ammette la **soluzione banale** o **ovvia** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Diremo che $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una soluzione non banale, detta anche **soluzione propria**, se almeno uno dei numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non è nullo.
Se il sistema (4) ammette una soluzione propria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, allora ammette anche infinite soluzioni, della forma

$$(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

qualunque sia $a \in \mathbb{R}$. Basta infatti sostituire questa soluzione nel sistema (4) e raccogliere il fattore a.

Da quanto detto, nel caso sia $m = n$, il sistema lineare omogeneo (4) ammette una soluzione non banale (e quindi infinite) se e soltanto se risulta $\det A = 0$.

Esercizi da svolgere

Esercizio 1.
Risolvere il sistema $AX = B$ *essendo*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2.
Discutere e risolvere, al variare del parametro reale k, *il sistema* $AX = B$ *con:*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & k \\ -k & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3.
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ x+1y=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+\ y+z=0 \\ x-5y-z=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=h-1 \\ x+hy=0 \\ -x+(h-1)y=3 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+hy=1 \\ hx+y=2-h \end{cases}$

<u>Risposte</u>:

1. $\left(\frac{19-23z}{17} , \frac{20+8z}{17} , z\right)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$.
2. Per $k \neq 0$ unica soluzione $\left(\frac{-k-1}{k^2} , \frac{2k+1}{k} , \frac{-1}{k}\right)$.
Per $k = 0$ sistema impossibile .
3a) $(1 , 2 , 3)$.
3b) Non ammette soluzioni.
3c) $(0 , 0 , 0)$.
3d) $(2y , y , -3y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.
3e) Sistema impossibile per $h \neq \pm 1$.
Per $h = 1$ unica soluzione $(-3 , 3)$.
Per $h = -1$ unica soluzione $(-1 , -1)$.
3f) Per $h \neq \pm 1$ unica soluzione $\left(\frac{1-h}{1+h} , \frac{2}{1+h}\right)$.
Per $h = 1$ soluzioni: $(1-y , y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.
Per $h = -1$ sistema impossibile .